BIBLIOTECA NAZ
Vittorio Emanuele III
XXXIV
G
5
NAPOLI

XXXIV.
G
5

H. 72. 27.

xxiv
5
5

XXXIV
G
5



Ariſtippus Philoſophus Socraticus, naufragio cum ejectus ad Rhodienſium litus animadvertiſſet Geometrica ſchemata deſcripta, exclamaviſſe ad comites ita dicitur Bene ſperemus, Hominum enim veſtigia video.
Vitruv. Architect. lib. 6. Praef.

NAPOLI

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI OCTO,

ET

SERENI ANTISSENSIS
DE SECTIONE

CYLINDRI & CONI
LIBRI DUO.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITT... NAPOLI



OXONIÆ,

E Theatro Sheldoniano, An. Dom. MDCCX.

Imprimatur.

GUIL. LANCASTER,

Vice-Can. OXON.

Feb. 9. 1709.

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ

ΚΩΝΙΚΩΝ

ΒΙΒΛΙΑ Δ΄. ΤΑ ΠΡΟΤΕΡΑ

ΜΕΤΑ

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ

ΛΗΜΜΑΤΩΝ

ΚΑΙ

ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ

ΥΠΟΜΝΗΜΑΤΩΝ

APOLLONII PERGÆI

CONICORUM

LIBRI IV. PRIORES

CUM

PAPPI ALEXANDRINI

LEMMATIS

ET

EUTOCII ASCALONITÆ

COMMENTARIIS.

Ex Codd. MSS. Græcis edidit EDMUNDUS HALLEIUS apud *Oxonienſes* Geometriæ Profeſſor *Savilianus*.

Viro Præſtantiſſimo,

JURISQUE CONSULTISSIMO,

D. JOANNI HOLT

EQUITI AURATO,

Capitali in *BANCO REGIO*

TOTIUS ANGLIÆ

JUSTITIARIO,

FIDO LEGUM CUSTODI,

Rectique & Æqui per Iniquiſſima Tempora

VINDICI & *ASSERTORI*

CONSTANTISSIMO,

APOLLONII CONICORUM

LIBROS QUATUOR,

Nunc primum Græce & Latine

EDITOS

In Perenne Grati Animi Teſtimonium

D. D. C.

EDM. HALLEIUS.

PRÆFATIO

AD REVERENDUM VIRUM

D. *GUIL. LANCASTER*

S. T. P.

ACADEMIÆ *OXONIENSIS*

Quarto VICE-CANCELLARIUM,

Reliquoſque PRELI SHELDONIANI

CURATORES.

EUCLIDE, *qui Mathematicorum agmen ducit, non ita pridem à viro celeberrimo D.* Dav. Gregorio, *collega meo deſideratiſſimo, in reipublicæ literariæ uſum edito; idque eâ curâ eâque elegantia, ut eruditorum omnium plauſum meruerit: Eidem mihique ſuaſerunt amici artium optimarum amantiſſimi, ut unum aut alterum è veteribus Geometris ei comites adjungeremus. Hoc ut facere vellemus, Tu, Vir egregie,* D^ne^ Vice-Cancellarie, *aſſentiente Curatorum cœtu, auctoritate tuâ noſmet permoviſti: Tu inquam, cui nihil antiquius eſt quam ut ſummo ſplendore gaudeat Academia noſtra, bonæque literæ ſuam habeant & tueantur dignitatem. Cogitantibus igitur nobis quemnam Veterum potiſſimum eligeremus, in quo expoliendo opera noſtra eniteſceret,* Archimedes, *dum ætatem ejus & præſtantiam reſpicimus, opem primus efflagitare viſus eſt. Sed cum ille Elementa* Conica *ubique fere, ut prius cognita, aſſumpſerit, quæ tamen non niſi ab* Apollonio *demonſtrata habemus; atque* Archimedes Græce *pariter ac* Latine *aliquoties prodierit, dum* Pergæus *non niſi magna ſui parte truncatus, idque verſione minus fideli parumque eleganti, circumferretur: his cauſis adducti ad* Apollonium *emendandum & edendum noſmet ſumma cum alacritate accinximus; ea quidem lege ut* Gregorius *quatuor priores Conicorum libros cum* Eutocii *Commentariis* Græce Latineque *prelo pararet, atque ipſe tres poſteriores ex* Arabico *in* Latinum *ſermonem verterem, Octavumque (quem temporis injuria deſideramus) reſtituere conarer. Illi opus hoc aggredienti ad manus erat* Apollonii *Codex MS.* Græcus *è Bibliotheca* Savilii *Mathematica,*

præſtantiſſimi iſtius Viri calamo hinc illinc non leviter emendatus; & paulo poſt acceſſit alter benigne nobiſcum à Reverendo D[no] Baynard *S. T. P. communicatus: ſed eadem fere utriſque communia erant vitia, utpote ex eodem Codice, ut videtur, deſcriptis. Ad* Eutocium *quidem publicandum non aliud repertum eſt exemplar* Græcum, *præter* Baroccianum *in Bibliotheca* Bodlejana *adſervatum. His igitur auxiliis inſtructus, dum* Græcis *accurandis,* Latinaque *Verſioni* Commandini *corrigendæ* (*quæ non exigui negotii res erat*) *ſtrenue atque omni cura & cogitatione incumbit, ictu mortis improviſo, magno ſane meliorum literarum damno, nobis ereptus eſt, opere jam ſub prelo fervente, ſed ad paginam duntaxat* XLIV[tam] *provecto. Quo factum eſt ut abſolvendi quod ſupererat labor in me devolveretur, novumque onus ſuſcipere neceſſe habuerim.*

Rei autem difficultate & magnitudine nihil deterritus, in Gregorii *pariter ac mea quam nactus eram ſparta ornanda proceſſi, uſus Apographo* Bodlejano *Codicis* Arabici, *ex Verſione ſatis antiqua à* Thebit ben Corah *facta, ſed* (*annis abhinc circiter* CCCCL.) *à* Naſir-Eddîn *recenſita,* (*viris inter Mathematicos Orientis celeberrimis.*) *In conſilium tamen nonnunquam adhibui etiam MS. Codicem* Arabicum *alium* Bodlejanum, *qui continet Epitomen ejuſdem Verſionis ab* Abdolmelec Schirazita Perſa *ante quingentos annos confectam: qui quidem codex à* Chriſtiano Ravio *ex Oriente advectus eſt, & ab eodem, magis quam facile exiſtimari poteſt, barbare traductus. Quandoque etiam mihi adjumento fuit altera Conicorum* Apollonii *Epitome ab* Abalphath Iſphahanenſi *adornata, quam haud ita commode traduxit* Abraham Echellenſis: *commentariis tamen uberrimis illuſtravit eximius ille Mathematicus & Philoſophus* Alphonſus Borellus. *Interpretatione autem mea, qua potui fide, ad umbilicum perducta, ad nos demum perlatum eſt exemplar illud* Golianum *antiquiſſimum, quod ab hæredibus* Golii *redemerat Vir maximus idemque optimus* Narciſſus Marſh *Archiepiſcopus* Armachanus; *quod, pro ſummo ſuo erga ſcientias Mathematicas amore, nobis ad operis emolumentum deeſſe noluit: codicem quantivis pretii per mare hyemale medioſque hoſtes ex* Hibernia *tranſmittens. Ex hoc optimæ notæ codice* (*qui ſeptem* Apollonii *libros complexus eſt*) *non ſolum Verſionem meam recenſui, & à mendis nonnullis liberavi; ſed & lacunas aliquot, quæ paſſim fere, etiam in* Græcis, *occurrebant, ſupplevi; ſenſumque auctoris, quoad ejus fieri potuit, primæva perſpicuitate donavi. His peractis, ad librum Octavum reſtituendum aggreſſus ſum; quem etiam ante ætatem* Thebit *deperditum fuiſſe comperimus: deprehendentes autem indicio* Pappi, *quod argumentum ejus argumento Septimi conjunctiſſimum fuerat, quodque problemata* διωρισμένα *Octavi è theorematis* διοριστικοῖς *Septimi limites ſuos habuerant, tam problemata ipſa quam eorundem ordinem aſſecutus mihi videor. Analyſes vero noſtras, ut & Compoſitiones ipſorum problematum, quas loco Apolloniana-*

rum

rum ſubſtituimus, ſi non cum illis ubique fere conſentiant, ab iiſdem tamen non multum eſſe diverſas perſuaſum habeo. Sed hac de re aliorum eſto judicium. Porro ſingulis Apollonii *libris* Pappi Lemmata *præfixa dedimus, e duobus Codd. MSS.* Savilianis *deſumpta, quæ quidem vice Commentarii eſſe poſſunt in loca difficiliora: quem in finem eadem ipſa aliquoties ab* Eutocio *uſurpantur. Ob argumenti autem affinitatem,* Sereni *libros duos de Sectione Cylindri & Coni publico donare haud gravatus ſum, jam primum* Græce *impreſſos: quos è Codicibus tribus Bibliothecæ Regiæ* Pariſienſis *ſui in uſum deſcribi curaverat vir doctiſſimus* Henricus Aldrichius S.T.P. *Ædis* Chriſti Decanus; *mihique, ut ſimul cum* Apollonio *lucem aſpicerent, perhumaniter impertiit. In his omnibus evulgandis induſtriam haud levem & diligentiam adhibui; mecum (quod fateri non piget) ſummopere adnitente D.* Joanne Hudſono *Bibliothecæ* Bodlejanæ *Præfecto, manumque auxiliarem (prout in* Euclide *fecerat) non invito porrigente: cui, cum noſtro tum communi omnium eruditorum nomine, gratias quas poſſumus maximas referimus. Hactenus de operibus noſtro opere & ſtudio qualicunque emendatis: de Autoribus ipſis pauca ſuperſunt dicenda.*

Apollonius Pergæ *natus eſt (quæ celebris olim* Pamphyliæ *urbs) tempore* Ptolemæi Euergetæ *regis* Ægypti *(cujus regnum iniit anno* CCXLVII. *ante* Chriſtum) *ut nobis autor eſt* Heraclius *ſive* Heraclides *(nam utroque modo ſcribitur apud* Eutocium) *qui vitam* Archimedis *deſcripſit. Apud* Euclidis *diſcipulos* Alexandriæ *diu operam dedit ſtudiis Mathematicis: & ſub* Philopatore *(qui imperii ſui anno* XVII, *ante* Chriſtum CCV. *diem obiit ſupremum) maxima erat in celebritate, teſte* Ptolemæo Hephæſtione *apud* Photium *Cod.* CXC. *adeo ut hinc liceat conjicere, quod annis circiter* XL *minor fuerit* Archimede, *quodque non longo intervallo præceſſerit* Geminum Rhodium, *certe* Hipparcho *majorem. Teſtatur autem* Geminus *hunc noſtrum* Apollonium, *propter eximium hoc Conicorum opus, inter ſui ævi Mathematicos* Magni Geometræ *nomen adeptum eſſe. Quanti illum æſtimarunt Veteres non ſolum ex* Vitruvio *conſtat,* Cap. I. Lib. I. *ubi etiam* Archimedi, *ſaltem ordine, præfertur; ſed ex eo quod, ut inter* Græcos *magni nominis commentatores habuerit quamplurimos,* Pappum, Hypatiam, Serenum & Eutocium, *ita & inter Orientales etiam nonnullos ingenii doctrinæque laude præcellentes; quales apud* Arabes *fuere* Thebit ben Corah & Beni Moſes; *apud* Perſas *vero* Abalphath & Abdolmelec, *à quibus in Epitomen redactus eſt; ac denique magnum illud Matheſeos* Perſicæ *lumen* Naſir-eddin, *qui Conica hæc omnia recenſuit, notiſque illuſtravit, circa annum* Chriſti MCCL. *Unde mirum fortaſſe videbitur tanti nominis autorem, & fere per bis mille annos inter principes Geometras habitum, in hoc erudito ſeculo nondum* Græce *comparuiſſe. Præter Conica autem multa alia ſcripſit* Apollonius *noſter, autore* Pappo *in Præfatione ad librum* VII. Collect. Math.

quam

quam non ita pridem nos primi Græce *edidimus: duos ſcilicet* περὶ λόγου ἀποτομῆς *&* περὶ χωρίου ἀποτομῆς *libros, quos, noſtro opere non infeliciter (uti ſperamus) reſtitutos, in lucem emiſimus; dein* περὶ διωρισμένης τομῆς *libros duos, ac totidem* περὶ ἐπαφῶν *duos quoque* νεύσεων, *ac pariter duos* τόπων ἐπιπέδων. *Lemmata his omnibus demonſtrandis aſſumpta conſervavit* Pappi *liber* VII *unde etiam diſcimus hæc omnia fuiſſe* τόπε ἀναλυομένε, *ſive ad Analyſin Veterum uſurpata. Quin & aliud* Apollonii *opus laudatur ab* Eutocio, *in Commentario in* Archimedis *Dimenſionem Circuli,* ὠκυτόκιον *dictum; quo tractatum fuit, uti videtur, de expediendo calculo Arithmetico, ante inventas cyphras* Indicas *valde intricato: ejuſque ſpecimen habetur in fragmento lib. II.* Pappi, *ut exiſtimat ſubtiliſſimus* Wallifius, *qui anno* MDCLXXXVIII. *fragmentum iſtud edidit. Verum pro* ὠκυτόκιον *rectius (mea ſententia) ſcriberetur* ὠκυτόκιον: *utpote cujus ope numerorum magnorum multiplices* &c. *cito & facillime producerentur.*

De Eutocio (*nam* Pappum *præterimus, ſpei pleni unum aut alterum quandoque exoriturum, qui illum ejuſque opera illuſtrabit*) *nobis hoc tantum conſtat; quod* Aſcalone Palæſtinæ *urbe oriundus ſub* Juſtiniano *floruerit, circa annum* Chriſti DXL. *Nam quæ commentatus eſt in* Apollonium *inſcripſit* Anthemio Tralliano; *quæ vero in* Archimedem *præceptori ſuo* Iſidoro Mileſio *Mechanico: illi vero, Architecti clariſſimi,* Juſtiniano *imperante celeberrimum Sanctæ* Sophiæ *templum exſtruxerunt, ſtatim ab Anno* Chriſti DXXXII. *teſte* Procopio.

Quod vero ad Serenum *attinet, de eo nihil comperimus, niſi quod* Antiſſà *Inſulæ* Lesbi *urbe ortus fuerit; &, præter Librum unum de Sectione Cylindri & alterum de Sectione Coni, Commentaria ſcripſerit in* Apollonium; *quodque ante* Marinum (Procli *diſcipulum*) *vixerit, uti conſtat ex* Marini *Præfatione in* Euclidis *Data.*

Abſoluta hac laboris mei & operum jam Vobis oblatorum hiſtoriola, reliquum eſt ut Vobis, Preli Curatoribus, gratias agam immortales, pro eo quo Matheſin, &, ſi id adjici patiemini, me quoque proſecuti eſtis ſtudio; Deum O. M. obteſtans atque precans, ut cuſtodiat, ſervet, & protegat hunc rei literariæ ſtatum, hanc florentiſſimam Academiam.

Erratis levioribus quæſumus ignoſcat Lector, graviora ſic corrigat.

Pag. 8 verſ. 9 Eutocii lege [illegible]. & in verſione v. 2. [illegible]. p. 10. v. 37 l. [illegible]. p. 10. v. 38. l. [illegible]. p. 18. v. 51 l. [illegible]. p. [illegible]. v. 35 l. [illegible] p. 22 v. 22. l. [illegible] p. 33. v. 17. l. [illegible] p. 43. v. 11. l. [illegible]. v. 41. l. [illegible]. v. 45 l. [illegible] p. [illegible], v. 16. l. [illegible]. p. 56. v. penult. l. [illegible] p. 92. v. 48. l. [illegible] p. 93. v. antepenult l. [illegible]. p. 94. v. 4 l. [illegible]. p. 99. v. 34 l. [illegible]. p. 107. v. 3. l. [illegible] ΔΒ. p. 144. in Schem. [illegible] ΓΞ v. 42. l. [illegible] ΚΗ. p. 154. v. 22. l. [illegible] ΓΑΒ p. 174. v. penult. l. [illegible] ΓΑ. p. 176. v. [illegible]. l. [illegible] ΜΑΞ. p. 182. v. 23. l. [illegible] ΑΒ. p. 204. in Schem. 3. duc rectam ΒΑ.

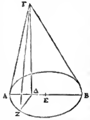
ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΛΗΜΜΑΤΑ
ΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA
IN PRIMUM LIBRUM CONICORUM
APOLLONII PERGÆI.

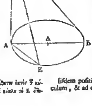
ΛΗΜΜΑ α'.

Ἔστω κῶνος οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον. εἰ μὲν οὖν ἰσοσκελής ἐστιν ὁ κῶνος, φανερὸν ὅτι πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν ΑΒ κύκλον προσπίπτουσαι εὐθεῖαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· εἰ δὲ σκαληνὸς, δέον ἔστω εὑρεῖν τίς μεγίστη, καὶ τίς ἐλαχίστη.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒ κύκλου ἐπίπεδον κάθετος, καὶ πιπτέτω πρότερον ἐντὸς τοῦ ΑΒ κύκλου, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΓΒ. λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΓΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν ΑΒ προσπιπτουσῶν. προσβεβλήσθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῆς ΔΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ εἰσὶν αἱ πρὸς τῷ Δ γωνίαι ὀρθαί· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΓΖ. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΓΑ μείζων ἐστίν. ὥστε μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΓΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΓΑ.



Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἡ ἀπὸ τοῦ Γ κάθετος ἀγομένη πιπτέτω ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΑΒ, καὶ ἔστω ΓΑ, καὶ πάλιν ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ. λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ. ὅτι μὲν οὖν μείζων ἡ ΓΒ τῆς ΓΑ φανερόν. διήχθω δέ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΓΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ΑΕ, καὶ αὐταῖς πρὸς ὀρθάς ἡ ΑΓ, μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῆς ΓΕ· ὁμοίως καὶ πασῶν. καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ μείζων δειχθήσεται ἡ ΕΓ τῆς ΓΑ· ὥστε μεγίστη μὲν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΓΑ τῶν ἀπὸ τοῦ Γ σημείου πρὸς τὸν ΑΒ κύκλον προσπιπτουσῶν εὐθειῶν.



Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, πιπτέτω ἡ κάθετος ἐκτὸς τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε ἐπι-

LEMMA I.

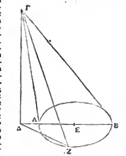
Sit conus cujus baſis circulus AB, & vertex punctum Γ. ſi quidem iſoſceles eſt conus, manifeſto conſtat rectas omnes, quæ ab ipſo Γ ad circuli AB circumferentiam ducuntur, inter ſe æquales eſſe: ſi vero ſcalenus eſt; oporteat invenire quæ maxima ſit, & quæ minima.

Ducatur [per 11. 11.] à puncto Γ ad planum circuli AB recta perpendicularis, quæ primum cadat intra circulum, ſitque ΓΔ, & ſumatur centrum circuli, quod ſit E; & juncta ΔE producatur in utramque partem ad puncta A, B; deinde AΓ, ΓB jungantur. dico ipſam BΓ maximam eſſe, & AΓ minimam linearum omnium quæ à puncto Γ ad circulum AB pertingunt. ducatur enim alia quævis ΓZ, & ZΔ jungatur. major igitur eſt [per 7. 3.] BΔ quam ΔZ, communis autem ΓΔ, & anguli qui ad Δ recti; ergo major eſt BΓ quàm ΓZ: eodem modo & ΓZ major oſtendetur quàm ΓA. ex quibus apparet ΓB omnium maximam, AΓ vero minimam eſſe.

Rurſus perpendicularis à puncto Γ ducta cadat in ipſius AB circuli circumferentiam, quæ ſit ΓA, & ad circuli centrum Δ juncta AΔ producatur in B, & BΓ jungatur. dico BΓ maximam eſſe, & AΓ minimam. rectam igitur ΓB majorem eſſe quam ΓA perſpicuum eſt. ducatur autem alia quævis recta ΓE; & jungatur AE. itaque quoniam AB diameter eſt, neceſſario major erit quam AE, & AΓ normalis eſt ipſis AB, AE; ergo ΓB quam ΓE major erit: & ſimiliter major quàm ceteræ omnes eodem modo & EΓ major oſtendetur quam ΓA: quare BΓ maxima eſt, AΓ vero minima rectarum omnium, quæ ab ipſo Γ ad circulum AB pertingunt.

Iiſdem poſitis, cadat perpendicularis ΓΔ extra circulum, & ad circuli centrum E ducta ΔE producatur

tur, junganturque ΑΓ, ΒΓ. dico ΒΓ maximam, & ΑΓ minimam eſſe omnium quæ à puncto Γ ad ΑΒ circulum perducuntur. conſtat namque ΒΓ majorem eſſe ipſa ΓΑ: ſed & major erit omnibus quæ ab ipſo Γ in circumferentiam circuli ΑΒ cadunt. ducatur enim alia quævis recta ΓΖ, & ΔΖ jungatur. cum igitur ΒΔ per centrum tranſeat, major eſt [per 8 3] quam ΔΖ. eſt autem ΔΓ perpendicularis ad rectas ΔΒ, ΔΖ, quoniam & ad ipſum planum; ergo major erit ΒΓ quam ΓΖ: & ſimiliter major quam aliæ omnes. perſpicuum eſt igitur ipſam ΓΒ maximam eſſe. at vero ΑΓ minimam *hoc modo oſtendemus*. quoniam enim minor eſt [per 8.3.] ΑΔ quam ΔΖ, atque eſt ad ipſas perpendicularis ΔΓ; minor erit ΑΓ quam ΓΖ: & ita minor quam aliæ. recta igitur ΑΓ minima eſt, & ΒΓ maxima omnium, quæ à puncto Γ ad ΑΒ circuli circumferentiam perducuntur.



ζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΒΓ. λέγω ὅτι δὴ μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΒΓ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπτουσῶν εὐθειῶν. ὅτι μὲν οὖν μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΓΑ φανερόν· λέγω δὴ ὅτι καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὴν τοῦ ΑΒ κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν. προσπιπτέτω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΓΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ. ἐπεὶ οὖν διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΔ, μείζων ἐστὶν ἡ ΔΒ τῆς ΔΖ. καὶ ἔστιν αὐταῖς ὀρθὴ ἡ ΔΓ, ἐπεὶ καὶ τῷ ἐπιπέδῳ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς ΓΖ· ὁμοίως καὶ πασῶν. μεγίστη μὲν ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ. ὅτι δὲ καὶ ἡ ΑΓ ἐλαχίστη. ἐπεὶ γὰρ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΖ, ἔστι καὶ αὐταῖς ὀρθὴ ἡ ΔΓ, ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΖ· ὁμοίως καὶ πασῶν. ἐλαχίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, μεγίστη δὲ ἡ ΒΓ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ πρὸς τὴν τοῦ ΑΒ κύκλου περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν.

In Definitiones Conicorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli &c.] Convenienter *Apollonius* addidit, *in utramque partem producatur*; cum uniuſcujuſque coni generationem tradat. ſi enim iſoſceles ſit conus fruſtra produceretur, quia recta linea quæ convertitur circumferentiam circuli perpetuo contingit; quippe cum ab ea punctum manens ſemper æquali diſtet intervallo. ſed quoniam poteſt & ſcalenus eſſe conus, in quo, ut jam demonſtratum eſt, & maximum, & minimum latus invenitur, neceſſario illud appoſuit; ut quæ minima eſt linea uſqueadeo augeri intelligatur quoad fiat maximæ æqualis, & propterea circuli circumferentiam ſemper contingat.

Εἰς τοὺς κωνικοὺς ὅρους.

ΕΑΝ ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν] Εἰκότως ὁ Ἀπολλώνιος προστίθησι, «ἐφ' ἑκάτερα προσεκβληθῇ», ἐπειδήπερ τοῦ τυχόντος κώνου γένεσιν δηλοῖ. εἰ μὲν γὰρ ἰσοσκελὴς ὁ κῶνος, περιττὸν ἦν προσεκβάλλειν, διὰ τὸ φερομένην εὐθεῖαν αἰεί ποτε ψαύειν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἐπειδήπερ πάντοτε τὸ σημεῖον ἴσον ἀφέξειν ἔμελλεν τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας. ἐπεὶ δὲ δύναται καὶ σκαληνὸς εἶναι ὁ κῶνος, ἔστι δέ, ὡς προγέγραπται, ἐν κώνῳ σκαληνῷ μεγίστη τις καὶ ἐλαχίστη πλευρά, ἀναγκαίως προσέθηκε τὸ «προσεκβληθῇ»· ἵνα αἰεὶ προσεκβληθεῖσα ἡ ἐλαχίστη αὔξηται ἕως ἴση γένηται τῇ μεγίστῃ, καὶ ψαύῃ κατ' ἐκεῖνο τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

LEMMA II.

Sit linea ΑΒΓ, & poſitione data ΑΓ; omnes autem, quæ ab ipſa linea ad ΑΓ perpendiculares ducuntur, ita ſe habeant, ut quadratum uniuſcujuſque ipſarum æquale ſit rectangulo ſub baſis ſegmentis, quæ ab ipſa ſecantur, contento: dico ΑΒΓ circuli circumferentiam eſſe, diametrum autem ipſius rectam ΑΓ.

DUCANTUR enim à punctis Δ, Β, Ε perpendiculares ΔΖ, ΒΗ, ΕΘ. ergo quadratum ex ΔΖ æquale eſt rectangulo ſub ΑΖΓ, & quadratum ex ΒΗ rectangulo ſub ΑΗΓ, ipſum vero ex ΕΘ quadratum rectangulo ſub ΑΘΓ æquale. ſecetur ΑΓ bifariam in Κ, & ΚΔ, ΚΒ, ΚΕ jungantur. itaque quoniam ΑΖΓ rectangulum unà cum quadrato ex ΖΚ eſt æquale [per 5.2.] quadrato ex ΑΚ, & ipſi ΑΖΓ æquale eſt [ex hyp.] quadratum ex ΔΖ: erit quadratum ex ΔΖ unà cum quadrato ab ipſa ΖΚ, hoc eſt [per 47. 1.] quadratum ex ΔΚ, æquale quadrato ex ΑΚ. quare ΑΚ ipſi ΚΔ eſt æqualis. ſimiliter oſtendemus & unamquamque rectarum ΒΚ, ΚΚ, ipſi ΑΚ vel ΚΓ æqualem eſſe: ergo ΑΒΓ circumferentia eſt circuli cujus centrum Κ, hoc eſt circa diametrum ΑΓ deſcripti.



ΛΗΜΜΑ β'.

Ἔστω γραμμὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ θέσει ἡ ΑΓ, πᾶσαι δὲ αἱ ἀπὸ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετοι ἀγόμεναι οὕτως ἀγέσθωσαν, ὥστε τὸ ἀπὸ ἑκάστης αὐτῶν τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων ἀφ' ἑκάστης αὐτῶν τμηθέντων· λέγω ὅτι κύκλου περιφέρειά ἐστιν ἡ ΑΒΓ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἐστιν ἡ ΑΓ.

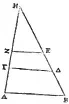
ΗΧΘΩΣΑΝ γὰρ ἀπὸ σημείων τῶν Δ, Β, Ε κάθετοι αἱ ΔΖ, ΒΗ, ΕΘ. τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ ΔΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖΓ, τὸ δὲ ἀπὸ ΒΗ τῷ ὑπὸ ΑΗΓ, τὸ δὲ ἀπὸ ΕΘ τῷ ὑπὸ ΑΘΓ. τετμήσθω δὲ δίχα ἡ ΑΓ κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΔ, ΚΒ, ΚΕ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΖΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΚ, ἀλλὰ τῷ ὑπὸ ΑΖΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΔΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΒ, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ ΔΒ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΚ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΚΔ. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΒ, ΕΒ ἴση ἐστὶ τῇ ΑΒ ἢ τῇ ΚΓ· κύκλου ἄρα περιφέρειά ἐστιν ἡ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Κ, τοῦτ' ἔστι περὶ διάμετρον τὴν ΑΓ.

ΛΗΜΜΑ

Digitized by Google

ΛΗΜΜΑ γʹ.

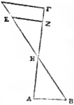
Τρεῖς παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, καὶ διήχθωσαν εἰς αὐτὰς δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΗΖΓ, ΒΗΕΔ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ τετράγωνον.



Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΕ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΖ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΖ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ. δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ τετράγωνον οὕτω τὸ ὑπὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ τετράγωνον.

LEMMA III.

Sint tres rectæ parallelæ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, & in ipſas ducantur duæ rectæ ΑΗΖΓ, ΒΗΕΔ: dico ut rectangulum quod fit ſub ΑΒ & ΕΖ ad quadratum ex ΓΔ ita eſſe rectangulum ſub ΑΗΖ ad quadratum ex ΗΓ.



Quoniam enim ut recta ΑΒ ad ΖΕ, hoc eſt [per 1. 6.] ut rectangulum ſub ΑΒ & ΖΕ ad quadratum ex ΒΕ, ita [per 4. 6.] ΑΗ ad ipſam ΗΒ, hoc eſt [per 1. 6] rectangulum ſub ΑΗΒ ad quadratum ex ΗΖ: erit [per 11.5.] ut rectangulum ſub ΑΒ & ΖΕ ad quadratum ex ΒΕ ita rectangulum ſub ΑΗΖ ad quadratum ex ΗΒ. ſed [per 4. & 22. 6.] ut quadratum ex ΒΕ ad quadratum ex ΓΔ ſic quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΓ. ex æquali igitur [per 22. 5.] ut rectangulum ſub ΑΒ & ΖΕ ad quadratum ex ΓΔ ſic rectangulum ſub ΑΗΖ ad quadratum ex ΗΓ.

ΛΗΜΜΑ δʹ.

Ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον· ὅτι γίνονται τὸ μὲν ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΕΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΔΓ τῷ ὑπὸ ΒΔΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΒΓ τῷ ὑπὸ ΕΒΔ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ· συνθέντι, καὶ τὰ ἡμίση τῶν ἡγουμένων, καὶ ἀναστρέψαντι, ἔστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΓ οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΕ τετραγώνῳ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΕΔ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΔΕ. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ ΒΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΓ, ἀμφότερα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ τετραγώνου· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΒΔ. γίνονται ἄρα τὰ τρία.

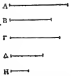
LEMMA IV.

Sit ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΔ ad ΔΓ, & ſecetur ΑΓ biſariam in puncto Ε: dico rectangulum ſub ΒΕΔ quadrato ex ΒΓ æquale eſſe; itemque rectangulum ſub ΑΔΓ æquale rectangulo ſub ΒΔΕ; & rectangulum ſub ΑΒΓ rectangulo ſub ΕΒΔ.

Quoniam enim ut ΑΒ ad ΒΓ ita eſt ΑΔ ad ΔΓ; erit [per 15, 18, & 19. 5.] componendo, ſumptiſque antecedentium dimidiis, & per converſionem rationis, ut ΒΕ ad ΕΓ ita ΓΕ ad ΕΔ: rectangulum igitur ſub ΒΕΔ [per 17.6.] æquale eſt quadrato ex ΓΒ. commune auferatur quadratum ex ΕΔ: ergo quod relinquitur [per 3. & 5. 2.] rectangulum ſub ΑΔΓ rectangulo ſub ΒΔΕ eſt æquale. rurſus quoniam rectangulum ſub ΒΕΔ æquale eſt quadrato ex ΕΓ, utraque auferantur à quadrato ex ΒΕ; reliquum igitur rectangulum ſub ΑΒΓ [per 6.2.] reliquo ſub ΕΒΔ [per 2. 2.] æquale erit. quæ tria erant demonſtranda.

ΛΗΜΜΑ εʹ.

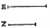
Τὸ Α πρὸς τὸ Β τὸν συνημμένον λόγον ἐχέτω ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ τὸν συνημμένον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β, καὶ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε.



Τῷ γὰρ τοῦ Β πρὸς τὸ Ζ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τοῦ Δ πρὸς τὸ Η. ἐπεὶ οὖν ὁ τοῦ Α πρὸς τὸ Β λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τοῦ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τοῦ τοῦ Ε πρὸς τὸ Ζ, τουτέστι τοῦ Δ πρὸς τὸ Η· ἀλλὰ ὁ συνημμένος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ Δ πρὸς τὸ Η, ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸ Η ἐστιν· ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Η. ἐπεὶ δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ τὸν συνημμένον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ Γ πρὸς τὸ Η, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ Η πρὸς τὸ Δ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ Γ πρὸς τὸ Η ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τοῦ Α πρὸς τὸ Β, ὁ δὲ τοῦ Η πρὸς τὸ Δ

LEMMA V.

Habeat Α ad Β rationem compoſitam ex ratione Γ ad Δ, & ex ratione Ε ad Ζ: dico Γ ad Δ rationem compoſitam habere ex ratione Α ad Β, & ratione Ζ ad Ε.



Fiat enim ratio Δ ad Η eadem quæ eſt Ε ad Ζ. & quoniam ratio Α ad Β compoſita eſt ex ratione Γ ad Δ, & ratione Ε ad Ζ, hoc eſt Δ ad Η; ratio autem compoſita ex ratione Γ ad Δ, & ratione Δ ad Η eſt [per 5. def 6.] eadem cum ratione Γ ad Η: erit ut Α ad Β ita Γ ad Η. rurſus quoniam Γ ad Δ rationem habet compoſitam ex ratione Γ ad Η, & ratione Η ad Δ; & ratio Γ ad Η demonſtrata eſt eadem quæ Α ad Β; & invertendo ratio Η ad Δ eadem

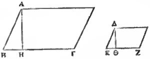
eadem eſt quæ Z ad E: habebit igitur Γ ad Δ rationem compoſitam ex ratione A ad B, & ratione Z ad E.

ἐκ τῆς ἀνάπαλιν ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς Z πρὸς τὸ E· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ τὸν συνημμένον λόγον ἔχει ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ A πρὸς τὸ B, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει τὸ Z πρὸς τὸ E.

LEMMA VI.

Sint duo parallelogramma AΓ, ΔZ æquiangula, quorum angulus B ſit æqualis angulo E: dico ut rectangulum ſub ABΓ ad rectangulum ſub ΔEZ ita eſſe parallelogrammum AΓ ad ΔZ parallelogrammum.

SI enim anguli B, E recti ſint, illud perſpicue conſtat: ſin minus, demittantur perpendiculares AH, ΔΘ. & quoniam angulus B æqualis eſt angulo E, & angulus ad H rectus æqualis recto ad Θ: erit triangulum ABH triangulo ΔEΘ æquiangulum. quare [per 4. 6.] ut BA ad AH ita EΔ ad ΔΘ. ſed [per 1. 6.] ut BA ad AH ita rectangulum ſub ABΓ ad rectangulum quod ſub AH, BΓ continetur: & ut EΔ ad ΔΘ ita rectangulum ſub ΔEZ ad rectangulum contentum ſub ΔΘ, EZ. quare permutando, ut rectangulum ſub ABΓ ad rectangulum ſub ΔEZ ita rectangulum ſub AH, BΓ, hoc eſt [per 36. 1.] parallelogrammum AΓ, ad rectangulum ſub ΔΘ, EZ, hoc eſt ad parallelogrammum ΔZ.



ΛΗΜΜΑ ς΄.

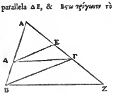
Ἔστω δύο παραλληλόγραμμα τὰ AΓ, ΔZ ἰσογώνια, ἴσην ἔχοντα τὴν B γωνίαν τῇ E γωνίᾳ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ABΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔEZ οὕτω τὸ AΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΔZ παραλληλόγραμμον.

ΕἸ μὲν οὖν ὀρθαί εἰσιν αἱ B, E γωνίαι, φανερόν· εἰ δὲ μὴ, ἤχθωσαν κάθετοι αἱ AH, ΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν B γωνία τῇ E, ἡ δὲ H ὀρθὴ τῇ Θ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABH τρίγωνον τῷ ΔEΘ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν AH οὕτως ἡ EΔ πρὸς τὴν ΔΘ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ BA πρὸς τὴν AH οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ABΓ πρὸς τὸ ὑπὸ AH, BΓ· ὡς δὲ ἡ EΔ πρὸς τὴν ΔΘ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΔEZ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΘ, EZ. ἔστιν ἄρα ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ὑπὸ ABΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔEZ οὕτω τὸ ὑπὸ AH, BΓ, τουτέστι τὸ AΓ παραλληλόγραμμον, πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΘ, EZ, τουτέστι πρὸς τὸ ΔZ παραλληλόγραμμον.

LEMMA VII.

Sit triangulum ABΓ, ſitque BΓ parallela ΔE, & quadrato ex ΓA æquale ſit rectangulum ſub ZAE: dico quod, ſi jungantur ΔΓ, BZ, recta BZ ipſi ΔΓ parallela eſt.

HOC vero manifeſte patet. quoniam enim [ex hyp. & per 17. 6.] ut ZA ad AΓ ita eſt ΓA ad AE; & [per 2. 6.] ut ΓA ad AE (ob parallelas) ita BA ad AΔ: erit ut ZA ad AΓ ita BA ad AΔ. ergo BZ, ΔΓ ſunt parallelæ.



ΛΗΜΜΑ ζ΄.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ABΓ, ἔστω δὲ παράλληλος ἡ BΓ τῇ ΔE, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓA ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ZAE· ὅτι, ἐὰν ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΔΓ, BZ, γίνεται παράλληλος ἡ BZ τῇ ΔΓ.

ΤΟΥΤΟ δὲ ἐστι φανερόν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ZA πρὸς τὴν AΓ οὕτως ἡ ΓA πρὸς τὴν AE, οὕτως ἐστὶν, ἐν παραλλήλῳ, ἡ BA πρὸς AΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ZA πρὸς AΓ οὕτως ἡ BA πρὸς AΔ, παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ BZ, ΔΓ.

LEMMA VIII.

Sit triangulum ABΓ, trapezium vero ΔBZH, ita ut ABΓ angulus angulo ΔBZ ſit æqualis, & ΔH parallela EZ: dico ut rectangulum ſub ABΓ ad rectangulum quod continetur ſub utraque ipſarum ΔH, BZ, & ΔB, ſic eſſe triangulum ABΓ ad trapezium ΔBZH.

DUCANTUR enim perpendiculares AΘ, ΔK. & quoniam angulus ABΓ æqualis eſt angulo ΔEZ, & qui eſt ad Θ rectus æqualis recto ad K; erit [per 4. 6.] ut BA ad AΘ ita EΔ ad ΔK. ſed [per 1. 6.] ut BA ad AΘ ita rectangulum ſub ABΓ ad id quod continetur ſub AΘ, BΓ; & ut EΔ ad ΔK ita rectangulum quod continetur ſub utraque ΔH, EZ, & ΔE, ad contentum ſub utraque ΔH, BZ, & ΔK. eſt autem triangulum ABΓ dimidium rectan-



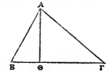
ΛΗΜΜΑ η΄.

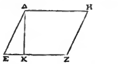
Ἔστω τρίγωνον μὲν τὸ ABΓ, τραπέζιον δὲ τὸ ΔBZH, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ABΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔBZ γωνίᾳ, ἡ δὲ ΔH τῇ EZ παράλληλος· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ABΓ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔH, EZ, καὶ τῆς ΔE, οὕτω τὸ ABΓ πρὸς τὸ ΔBZH.

ΗΧΘΩΣΑΝ κάθετοι αἱ AΘ, ΔK. ἐπεὶ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ABΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔBZ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὀρθὴ Θ τῇ K ὀρθῇ ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς AΘ οὕτως ἡ BΔ πρὸς ΔK. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ BA πρὸς AΘ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ABΓ πρὸς τὸ ὑπὸ AΘ, BΓ· ὡς δὲ ἡ BΔ πρὸς τὴν ΔK οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔH, BZ, καὶ τῆς ΔB, πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔH, EZ, καὶ τῆς ΔK. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ AΘ, BΓ ἥμισυ τὸ ABΓ

ΑΒΓ τρίγωνον· τὸ δὲ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ, ΕΖ, καὶ τῆς ΔΚ ἥμισυ τὸ ΔΕΖΗ τραπέζιον. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ, ΕΖ, καὶ τῆς ΔΕ, οὕτω τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖΗ τραπέζιον.

Καὶ ἐὰν ᾖ δὲ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ· γίνεται ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖΗ παραλληλόγραμμον οὕτω τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ





ΔΕΖ, καθ' τὰ αὐτά. καὶ φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ, ἐὰν ᾖ παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ καὶ ἴσον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ἴσον γίνεται τῷ δὶς ὑπὸ ΔΕΖ· ἐὰν δὲ ᾖ τραπέζιον, ἴσον γίνεται τῷ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΗ, ΒΖ, καὶ τῆς ΔΕ.

guli contenti ſub ΑΘ, ΒΓ: & trapezium ΔΕΖΗ dimidium ejus quod ſub utraque ΔΗ, ΒΖ, & ΔΚ continetur. ergo ut rectangulum ſub ΑΒΓ ad rectangulum contentum ſub utraque ΔΗ, ΕΖ, & ΔΕ, ita eſt triangulum ΑΒΓ ad ΔΕΖ trapezium.

Quod ſi ΑΒΓ triangulum ſit, & ΔΖ parallelogrammum: eadem ratione fiet, ut ΑΒΓ triangulum ad ΔΕΖΗ parallelogrammum ita rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ ad duplum rectanguli ſub ΔΕΖ. ex quibus conſtat rectangulum ſub ΑΒ, ΒΓ (ſiquidem ΔΖ parallelogrammum ſit ipſique ΑΒΓ triangulo æquale) æquale eſſe duplo rectanguli ſub ΔΕΖ: ſi vero trapezium, æquale ei, quod ſub utraq; ΔΗ, ΒΖ, & ipſa ΔΕ continetur.

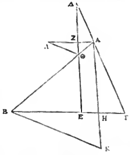
ΛΗΜΜΑ θ'.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΓΑ διήχθω τις τυχοῦσα ἡ ΔΘΕ, καὶ αὐτῇ μὲν παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, τῇ δὲ ΒΓ ἡ ΑΖ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ τετράγωνον.

Κείσθω τῷ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΗΚ, τῷ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴσον τὸ ὑπὸ ΛΖΑ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΘΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ Γ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΚΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΛΑ ἐν κύκλῳ, ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΖΘΛ· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΚΒ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΖΘΛ γωνίᾳ. ἀλλὰ καὶ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΚ οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΖΘ. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΒ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ἐστὶν ἐν παραλλήλῳ ἡ ΖΘ πρὸς ΖΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΒΗ πρὸς ΗΚ οὕτως ἄλλη τις ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ἡγουμένην τὴν ΖΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΚ οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΖΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΚ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, ὡς δὲ ἡ ΛΖ πρὸς ΖΑ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΛΖΑ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΔΖΘ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ.

LEMMA IX.

Sit triangulum ΑΒΓ, &, producta ΓΑ ad Δ, ducatur quælibet recta ΔΘΕ, cui quidem parallela ducatur ΑΗ; ipſi vero ΒΓ parallela ΑΖ: dico ut quadratum ex ΑΗ ad rectangulum ſub ΒΗΓ ita eſſe rectangulum ſub ΔΖΘ ad quadratum ex ΖΑ.

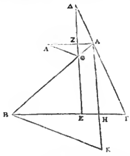


PONATUR rectangulo ſub ΒΗΓ æquale rectangulum ſub ΑΗΚ, & rectangulo ſub ΔΖΘ æquale rectangulum ſub ΛΖΑ, & jungantur ΒΚ, ΘΛ. quoniam igitur [per 21. 3.] angulus ad Γ æqualis eſt angulo ΒΚΗ*; & angulus ΔΛΑ in circulo æqualis angulo ΖΘΛ: erit & angulus ΗΚΒ angulo ΖΘΛ æqualis. ſed [per 29. 1.] & angulus ad Η eſt æqualis angulo ad Ζ: ergo [per 4. 6.] ut ΒΗ ad ΗΚ ita ΛΖ ad ΖΘ. quoniam autem ut ΑΗ ad ΗΒ ita ΘΕ ad ΕΒ; & ob parallelas ut ΘΕ ad ΕΒ ita ΘΖ ad ΖΑ: ut igitur ΑΗ ad ΗΒ ita ΘΖ ad ΖΑ. quoniam igitur eſt quidem ut ΑΗ ad ΗΒ ita ΘΖ ad ΖΑ, ut vero ΒΗ ad ΗΚ ita alia quædam ΛΖ ad antecedentem ΖΘ: quare ex æquali in perturbata proportione [per 23. 5.] ut ΑΗ ad ΗΚ ita ΛΖ ad ΖΑ. ut vero ΑΗ ad ΗΚ ita [per 1. 6.] quadratum ex ΑΗ ad rectangulum ſub ΑΗΚ, hoc eſt [per conſt.] ad rectangulum ſub ΒΗΓ; & ut ΛΖ ad ΖΑ ita rectangulum ſub ΛΖΑ, hoc eſt ſub ΔΖΘ, ad quadratum ex ΖΑ: ergo ut quadratum ex ΑΗ ad rectangulum ſub ΒΗΓ ita rectangulum ſub ΔΖΘ ad quadratum ex ΖΑ.

* Nam [per 35. 3.] circulus circa triangulum ΒΑΓ deſcriptus tranſit per Κ. Similiter circulus circa ΔΛΘ deſcriptus tranſit per Λ.

Sed per compoſitionem rationum ſic. Quoniam enim [per 4.6.] ratio ΑΗ ad ΗΒ eſt eadem quæ ΘΕ ad ΕΒ; hoc eſt ΘΒ ad ΖΑ: ratio autem ΑΗ ad ΗΓ eadem quæ ΔΖ ad ΕΓ; hoc eſt ΔΖ ad ΖΑ: erit ratio compoſita ex ratione ΑΗ ad ΗΒ, & ex

Διὰ δὲ τῆς συνημμένου. Ἐπεὶ ὁ μὲν τῆς ΑΗ πρὸς ΗΒ λόγος ἐστὶν ὁ τῆς ΘΕ πρὸς ΕΒ, τοῦτ' ἔστιν ὁ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ· ὁ δὲ τῆς ΑΗ πρὸς τὴν ΗΓ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΔΕ πρὸς ΕΓ, τοῦτ' ἔστι τῷ τῆς ΔΖ πρὸς ΖΑ· ὁ ἄρα συνημμένος ἔκ τε τοῦ



ratione ΑΗ ad ΗΓ, quæ quidem [per 23. 6.] eſt ratio quadrati ex ΑΗ ad rectangulum ſub ΒΗΓ, eadem cum illa quæ componitur ex ratione ΘΖ ad ΖΑ, & ratione ΔΖ ad ΖΑ. hæc autem eſt ratio rectanguli ſub ΔΖΘ ad quadratum ex ΒΑ.

ὃν ἔχει ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ὅς ἐστιν ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συνημμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ, καὶ τοῦ τῆς ΔΖ πρὸς ΖΑ, ὅς ἐστιν ὁ τοῦ ὑπὸ ΔΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ τετράγωνον.

ΑΠΟΛ-

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ

ΚΩΝΙΚΩΝ

ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ,

ΜΕΤΑ ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑΤΩΝ.

APOLLONII PERGÆI

CONICORUM

LIBER PRIMUS,

CUM COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITÆ.

Ἀπολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν.

Εἰ τῷ τε σώματι εὖ ἐπανάγεις, καὶ τὰ ἄλλα κατὰ γνώμην ἐστί σοι, καλῶς ἂν ἔχοι· μετρίως δὲ ἔχομεν καὶ αὐτοί. καθ' ὃν δὲ καιρὸν ἤμην μετά σου ἐν Περγάμῳ, ἐθεώρουν σε σπεύδοντα μετασχεῖν τῶν πεπραγμένων ἡμῖν κωνικῶν. πέπομφα οὖν σοι τὸ πρῶτον βιβλίον διορθωσάμενος· τὰ δὲ λοιπά, ὅταν εὐαρεστήσωμεν, ἐξαποστελοῦμεν. οὐκ ἀμνημονεῖν γὰρ οἴομαί σε παρ' ἐμοῦ ἀκηκοότα, διότι τὴν περὶ ταῦτα ἔφοδον ἐποιησάμην, ἀξιωθεὶς ὑπὸ Ναυκράτους τοῦ γεωμέτρου, καθ' ὃν δὲ καιρὸν ἐσχόλαζε παρ' ἡμῖν παραγενηθεὶς εἰς Ἀλεξάνδρειαν· καὶ διότι πραγματεύσαντες αὐτὰ ἐν ὀκτὼ βιβλίοις, ἐξ αὐτῆς μεταδεδώκαμεν αὐτά, εἰς τὸ σπουδαιότερον, διὰ τὸ πρὸς ἔκπλῳ αὐτὸν εἶναι, οὐ διακαθάραντες, ἀλλὰ πάντα τὰ ὑποπίπτοντα ἡμῖν θέντες, ὡς ἔσχατον ἐπελευσόμενοι. ὅθεν καιρὸν νῦν λαβόντες, αἰεὶ τὸ τυγχάνον διορθώσεως ἐκδίδομεν. καὶ ἐπεὶ

Apollonius Eudemo S. P.

Si & corpore vales, & aliæ res tuæ ex animi tui ſententia ſe habent, bene eſt; nos quidem ſatis belle habemus. Quo tempore tecum Pergami fui, animadverti te cupidum intelligendi Conica, quæ à nobis conſcripta ſunt. Itaque miſi ad te primum librum emendatum; reliquos deinceps miſſurus, cum animo ero tranquilliori. non enim arbitror te oblitum, quod à me accepiſti, quid ſcilicet cauſæ fuerit, cur ego hæc ſcribere aggreſſus ſim, rogatus à Naucrate Geometra, quo tempore Alexandriam veniens apud nos fuit: & cur nos cum de illis, octo libris, egiſſemus, ſtatim illos cum eo communicavimus, non eâ quâ par erat diligentiâ (quòd quamprimum erat navigaturus) eos emendantes, ſed quæcunque ſeſe nobis obtulerunt conſcribentes; utpote qui ea denuo eſſemus percurſuri. quamobrem nunc tempus nacti, ut quæque emendamus, ita edimus. Et quoniam

Digitized by Google

niam accidit nonnullos alios ex iis, qui nobiſcum fuerant, habuiſſe primum & ſecundum librum antequam emendaretur; noli mirari ſi in quædam incidas, quæ aliter ſe habeant. Ex octo autem libris quatuor primi hujus diſciplinæ continent elementa; quorum primus complectitur generationes trium coni ſectionum, & earum quæ oppoſitæ dicuntur, itemque principalia ipſarum accidentia, à nobis & uberius & univerſalius, quam ab aliis, qui de ea re ſcripſerunt, elaborata. Secundus liber tractat ea, quæ attinent ad diametros, & ad axes ſectionum, & ad rectas aſymptotos; tum de aliis differit, quæ & generalem & neceſſariam utilitatem ad determinationes afferunt: quas autem vocem diametros, & quos axes, ex hoc libro cognoſces. Tertius liber continet multa & admirabilia theoremata, quæ utilia erunt & ad ſolidorum locorum compoſitiones, & ad determinationes, quorum complura & pulchra & nova ſunt. Hæc nos perpendentes animadvertimus non poſitam eſſe ab *Euclide* rationem componendi loci ad tres & quatuor lineas; verum ipſius tantummodo particulam quandam, atque hanc non ſatis feliciter: neque enim fieri poterat, ut ea compoſitio recte perficeretur abſque iis quæ à nobis inventa ſunt. Quartus liber tradit quot modis conorum ſectiones inter ſeſe, & circuli circumferentiæ occurrere poſſint, & multa alia ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab iis, qui ante nos fuerunt, memoriæ proditum eſt; item coni ſectio, & circuli circumferentia, & oppoſitæ ſectiones ad quot puncta oppoſitis ſectionibus occurrant. Reliqui autem quatuor libri ad abundantiorem ſcientiam pertinent. Etenim quintus de minimis & maximis magna ex parte agit; Sextus de æqualibus, & ſimilibus coni ſectionibus: Septimus continet theoremata quæ determinandi vim habent; Octavus problemata conica determinata. At vero omnibus his editis, licet unicuique, qui in ea legendo inciderit, ex animi ſui ſententia judicare. Vale.

συμβέβηκε καὶ ἄλλους τινὰς τῶν συμμεμιχθότων ἡμῖν μετειληφέναι τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον βιβλίον πρὶν ἢ διορθωθῆναι, μὴ θαυμάσῃς, ἐὰν περιπίπτῃς αὐτοῖς ἑτέρως ἔχουσιν. ἀπὸ δὲ τῶν ὀκτὼ βιβλίων τὰ πρῶτα τέσσαρα πέπτωκε πρὸς εἰσαγωγὴν στοιχειώδη. περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων, καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα ἐπιπλεῖον καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξειργασμένα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα. τὸ δὲ δεύτερον τὰ περὶ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν συμβαίνοντα, καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρείαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς· τίνας δὲ διαμέτρους, ἢ τίνας ἄξονας καλῶ, εἰδήσεις ἐκ τούτου τοῦ βιβλίου. τὸ δὲ τρίτον πολλὰ καὶ παράδοξα θεωρήματα χρήσιμα πρός τε τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων καὶ τοὺς διορισμούς, ὧν τὰ πλεῖστα καλὰ καὶ ξένα. ἃ καὶ κατανοήσαντες συνείδομεν μὴ συντιθέμενον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριον τὸ τυχὸν αὐτοῦ, καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ δυνατὸν ἄνευ τῶν προσευρημένων ἡμῖν τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν. τὸ δὲ τέταρτον ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλουσι, καὶ ἄλλα ἐκ περισσοῦ, ὧν οὐδέτερον ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν γέγραπται· κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια, καὶ ἔτι ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλουσι. τὰ δὲ λοιπά ἐστι περιουσιαστικώτερα· ἔστι γὰρ τὸ μὲν περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων ἐπιπλεῖον· τὸ δὲ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων τομῶν κώνων· τὸ δὲ περὶ διοριστικῶν θεωρημάτων· τὸ δὲ προβλημάτων κωνικῶν διωρισμένων. οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ πάντων ἐκδοθέντων ἔξεστι τοῖς περιτυγχάνουσι κρίνειν αὐτά, ὡς ἂν αὐτῶν ἕκαστος αἱρῆται. εὐτύχει.

EUTOCII COMMENTARII.

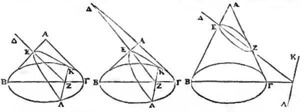
APOLLONIUS geometra, *Anthemi* ſodalis chariſſime, natus eſt *Pergæ*, quæ *Pamphiliæ* civitas eſt, tempore *Ptolemæi Evergetæ*, ut tradit *Heraclius* in *Archimedis* vita, qui etiam ſcribit *Archimedem* quidem primum conica theoremata fuiſſe aggreſſum; *Apollonium* vero, cum ea inveniſſet ab

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ὁ γεωμέτρης, ὦ φίλε ἑταῖρε Ἀνθέμιε, γέγονε μὲν ἐκ Πέργης τῆς ἐν Παμφυλίᾳ, ἐν χρόνοις τοῦ Εὐεργέτου Πτολεμαίου, ὡς ἱστορεῖ Ἡράκλειος ἐν τῷ βίῳ Ἀρχιμήδους γράφων, ὃς καί φησι τὰ κωνικὰ θεωρήματα ἐπινοῆσαι μὲν πρῶτον τὸν Ἀρχιμήδην, τὸν δὲ Ἀπολλώνιον αὐτὰ εὑ-

ρόντα

ὄντα ὑπὸ Ἀρχιμήδους μὴ ἐκδοθέντα, ἰδιοποιήσασθαι, οὐκ ἀληθεύων κατά γε τὴν ἐμήν. ὅ τε γὰρ Ἀρχιμήδης ἐν πολλοῖς φαίνεται ὡς παλαιοτέρας στοιχειώσεως τῶν κωνικῶν μεμνημένος, καὶ ὁ Ἀπολλώνιος οὐχ ὡς ἰδίας ἐπινοίας γράφει· οὐ γὰρ ἂν ἔφη, ἐπὶ πλέον καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξειργάσθαι ταῦτα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα. ἀλλ' ὅπερ φησὶν ὁ Γεμῖνος ἀληθές ἐστιν· ὅτι οἱ παλαιοὶ κῶνον ὁριζόμενοι τὴν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου περιφοράν, μενούσης μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν, εἰκότως καὶ τοὺς κώνους πάντας ὀρθοὺς ὑπελάμβανον γίνεσθαι, καὶ μίαν τομὴν ἐν ἑκάστῳ, ἐν μὲν τῷ ὀρθογωνίῳ τὴν νῦν καλουμένην Παραβολήν, ἐν δὲ τῷ ἀμβλυγωνίῳ τὴν Ὑπερβολήν, ἐν δὲ τῷ ὀξυγωνίῳ τὴν Ἔλλειψιν· καὶ ἔστι παρ' αὐτοῖς εὑρεῖν οὕτως ὀνομαζομένας τὰς τομάς. ὥσπερ οὖν τῶν ἀρχαίων ἐπὶ ἑνὸς ἑκάστου εἴδους τριγώνου θεωρησάντων τὰς δύο ὀρθάς, πρότερον ἐν τῷ ἰσοπλεύρῳ, καὶ πάλιν ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ, καὶ ὕστερον ἐν τῷ σκαληνῷ· οἱ μεταγενέστεροι καθολικὸν θεώρημα ἀπέδειξαν τοιοῦτον· παντὸς τριγώνου αἱ ἐντὸς τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· οὕτω καὶ ἐπὶ τῶν τοῦ κώνου τομῶν, τὴν μὲν γὰρ λεγομένην ὀρθογωνίου κώνου τομὴν ἐν ὀρθογωνίῳ μόνον κώνῳ ἐθεώρουν, τεμνομένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου. τὴν δὲ τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομὴν ἐν ἀμβλυγωνίῳ γινομένην κώνῳ ἀπεδείκνυσαν· τὴν δὲ τοῦ ὀξυγωνίου ἐν ὀξυγωνίῳ, ὁμοίως ἐπὶ πάντων τῶν κώνων ἄγοντες τὰ ἐπίπεδα ὀρθὰ πρὸς μίαν πλευρὰν τοῦ κώνου· δηλοῖ δὲ καὶ αὐτὰ τὰ ἀρχαῖα ὀνόματα τῶν γραμμῶν. ὕστερον δὲ Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος καθόλου τι ἐθεώρησεν, ὅτι ἐν παντὶ κώνῳ, καὶ ὀρθῷ καὶ σκαληνῷ, πᾶσαι αἱ τομαί εἰσι, κατὰ διάφορον τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸν κῶνον προσβολήν. ὃν καὶ θαυμάσαντες οἱ κατ' αὐτὸν γενόμενοι, διὰ τὸ θαυμάσιον τῶν ὑπ' αὐτοῦ ἀποδεδειγμένων κωνικῶν θεωρημάτων, μέγαν Γεωμέτρην ἐκάλουν. ταῦτα μὲν οὖν ὁ Γεμῖνος ἐν τῷ ἕκτῳ φησὶ τῆς τῶν μαθημάτων θεωρίας.

Ὃ δὲ λέγει σαφὲς ποιήσομεν ἐπὶ τῶν ὑποκειμένων καταγραφῶν. ἔστω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος κώνου τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΒ ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕΖ, καὶ τὸ διὰ τῆς ΔΖ ἐπίπεδον ἐκβληθὲν ὀρθὸν πρὸς τὴν ΑΒ τεμνέτω τὸν κῶνον· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ, ΑΕΖ γωνιῶν, καὶ ὀρθογωνίου μὲν ὄντος τοῦ κώνου, καὶ ὀρθῆς δηλονότι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς, δύο ὀρθαῖς ἴσαι ἔσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ,



ΑΕΖ γωνίαι. ὥστε παράλληλος ἐστὶν ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ, καὶ γίνεται ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομὴ ἡ καλουμένη Παραβολή, οὕτω κληθεῖσα ἀπὸ τοῦ παράλληλον εἶναι τὴν ΔΕΖ, ἥτις ἐστὶ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, τῇ ΑΓ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου. ἐὰν δὲ ἀμβλυγώνιος ᾖ ὁ κῶνος, ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, ἀμβλείας δηλονότι οὔσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, ὀρθῆς δὲ τῆς ὑπὸ ΑΕΖ· δύο ὀρθῶν μείζονες ἔσονται αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ γωνίαι· ὥστε οὐ συμπεσεῖται ἡ ΔΕΖ τῇ ΑΓ πλευρᾷ ἐπὶ τὰ πρὸς τοῖς Ζ, Γ μέρη, ἀλλὰ ἐπὶ τὰ πρὸς τοῖς Α, Ε, προσεκβαλλομένης δηλονότι τῆς ΓΑ ἐπὶ τὸ Δ. ποιήσει οὖν τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομὴν ἐπικαλουμένην Ὑπερβολήν, οὕτω κληθεῖσαν ἀπὸ τοῦ ὑπερβάλλειν τὰς εἰρημένας, τουτέστι τὰς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΕΖ δύο ὀρθάς, ἢ διὰ τὸ ὑπερβάλλειν τὴν ΔΕΖ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, καὶ συμπίπτειν

Archimede nondum edita; ſicut propria ſua edidiſſe, neque id vere, ut mea fert opinio. Nam & *Archimedes* multis in locis velut antiquioris conicorum inſtitutionis mentionem facere videtur; & *Apollonius* ea ſcribit, non ut à ſeipſo inventa: non enim dixiſſet, uberius & univerſalius hæc à ſe, quam ab aliis, tractata fuiſſe. Sed quod ſcribit *Geminus* verum eſt, quod antiqui conum definientes, rectanguli trianguli circumvolutionem manente uno eorum quæ circa rectum angulum ſunt latere; & conos omnes rectos, & unam in ſingulis ſectionem fieri arbitrati ſunt; in rectangulo quidem cono vocatam *Parabolam*; in obtuſangulo *Hyperbolam*; in acutangulo autem *Ellipſim*: atque ita nominatas apud ipſos ſectiones paſſim invenias. Quemadmodum igitur antiquis illis in unaquaque triangulorum ſpecie contemplantibus duos rectos, primum in æquilatero, deinde in æquicruri, poſtea in ſcaleno; æstate poſteriores univerſale theorema demonſtrarunt ejuſmodi; *Omnis trianguli interiores tres anguli duobus rectis ſunt æquales*: ita & in coni ſectionibus, rectanguli quidem coni ſectionem dictam in rectangulo tantum cono contemplati ſunt; ſecto ſcilicet plano ad unum coni latus recto. obtuſanguli autem coni ſectionem in cono obtuſangulo factam demonſtrarunt: & acutanguli ſectionem in cono acutangulo; ſimiliter in omnibus conis ducentes plana ad unum coni latus recta; quod & antiqua linearum nomina indicant. Verum poſtea *Apollonius Pergæus* univerſe inſpexit in omni cono, tam recto, quam ſcaleno, omnes ſectiones ineſſe juxta plani ad conum diverſam inclinationem. Quem illius temporis homines, admirati propter mirificam conicorum theorematum demonſtrationem, *Magnum Geometram* appellarunt. Hæc quidem *Geminus* ſcripta reliquit in ſexto mathematicarum præceptionum libro.

Quod autem dicit manifeſtum faciemus in ſubjectis figuris. Sit enim per axem coni triangulum ΑΒΓ, & à quovis puncto Ε ducatur ipſi ΑΒ ad angulos rectos ΔΕΖ, & per ΔΖ ductum planum rectum ad ipſam ΑΒ conum ſecet: rectus igitur eſt uterque angulus ΑΕΔ, ΑΕΖ; rectanguloque exiſtente cono & angulo ΒΑΓ recto, ut in prima figura apparet, erunt anguli ΒΑΓ, ΑΕΖ duo recti anguli:

quare [per 28. 1.] parallela erit ΔΕΖ ipſi ΑΓ, & fiet in ſuperficie coni ſectio *Parabola*, ſic dicta, quod recta ΔΕΖ, quæ communis ſectio eſt plani ſecantis & trianguli per axem, parallela ſit ipſi ΑΓ lateri trianguli. Sed ſi obtuſangulus ſit conus, ut in ſecunda figura, obtuſo videlicet exiſtente angulo ΒΑΓ, & angulo ΑΕΖ recto: anguli ΒΑΓ, ΑΕΖ duobus rectis majores erunt, & non conveniet ΔΕΖ cum ipſo ΑΓ latere ad partes Ζ, Γ, ſed ad partes Α, Ε, producta nimirum ΓΑ in Δ. faciet igitur ſecans planum in ſuperficie coni ſectionem, *Hyperbolam* dictam, vel ab eo quod anguli ΒΑΓ, ΑΕΖ excedant duos rectos, vel quod ΔΕΖ excedat verticem coni, & cum ipſa ΓΑ

Digitized by Google

extra conveniat. Quod ſi acutangulus ſit conus, hoc eſt acuto exiſtente angulo ΒΑΓ, erunt anguli ΒΑΓ, ΑΕΖ minores duobus rectis, & lineæ ΕΖ, ΑΓ productæ convenient tandem in aliqua parte: augere namque conum & in longius producere poſſumus: erit igitur in ſuperficie ſectio, quæ appellatur *Ellipſis*, ſic dicta vel quod dicti anguli à duobus rectis deficiant, vel quod ellipſis diminutus quidam circulus ſit. Ad hunc quidem modum antiqui, ponentes ſecans planum per ΔΕΖ ad rectos angulos ipſi ΑΒ lateri trianguli per axem coni, conſiderarunt etiam differentes conos, & propriam in unoquoque ſectionem. At *Apollonius*, ponens conum & rectum & ſcalenum, diverſo ipſius plani occurſu diverſas efficit ſectiones. Sit enim, ut in iiſdem figuris, ſecans planum ΚΕΛ; communis autem ſectio ipſius plani & baſis coni, recta ΚΛ; communis rurſus ſectio ejuſdem & trianguli ΑΒΓ ſit ipſa ΕΖ, quæ & diameter appellatur ſectionis: itaque in omnibus ſectionibus ponit rectam ΚΛ ad rectos angulos eſſe ipſi ΒΓ baſi trianguli ΑΒΓ. Verum ſi ΕΖ parallela ſit ΑΓ, parabolam fieri ΚΕΛ ſectionem in coni ſuperficie: ſi vero ΕΖ conveniat cum latere ΑΓ extra verticem coni ut in Δ, fieri ipſam ΚΕΛ ſectionem hyperbolam. quod ſi conveniat intra, fieri ſectionem ellipſim, quam & *Scutiformem* vocant. Generaliter igitur parabolæ diameter parallela eſt uni lateri trianguli; hyperbolæ autem diameter cum latere trianguli convenit quidem ad partes verticis coni; ellipſis vero diameter convenit cum latere trianguli ad partes baſis. Scire præterea illud oportet, parabolam & hyperbolam ex eorum numero eſſe quæ in infinitum augentur; at ellipſim non item; tota enim in ſeipſam redit, ſicuti circulus.

Cum autem plures editiones ſint, ut etiam ipſe [*Apollonius*] in epiſtola ſcribit; optimum fore judicavi, ea diverſis quæ occurrerunt, evidentius dicta & meliori argumentandi ordine diſpoſita exhibere; ſeorſum vero in commentariis, ut par eſt, diverſos demonſtrationis modos explicare. Itaque in epiſtola dicit primos quatuor libros hujus diſciplinæ elementa continere. quorum primus quidem complectitur generationes trium coni ſectionum, & earum quæ oppoſitæ dicuntur, itemque principalia ipſarum accidentia: hæc autem ſunt quæcunque ipſis in prima generatione contingunt; habent enim & alia quædam conſequentia. Secundus autem liber tractat ea quæ attinent ad diametros, & ad axes ſectionum, & ad rectas aſymptotos: tum & alia quæ & generalem & neceſſariam utilitatem afferunt ad determinationes. Determinatio autem duplex eſt, ut manifeſte patet; altera quidem poſt expoſitionem eorum quæ ad quæſitum pertinent: altera vero propoſitionem univerſalem eſſe prohibens, quæ declarat quando, & qua ratione, & quot modis id quod propoſitum eſt fieri poſſit; ut in vigeſimo ſecundo theoremate primi libri elementorum *Euclidis*: *Ex tribus rectis, quæ æquales ſint tribus datis, triangulum conſtituere: oportet autem duas ejuſmodi rectas reliqua eſſe majores, quomodocunque ſumantur*, quippe cum demonſtratum ſit, omnis trianguli duo latera, quomodocunque ſumpta, reliquo majora eſſe. Tertius vero conicorum liber continet multa & admirabilia theoremata, ad ſolidorum locorum compoſitionem utilia. *Planos Locos* antiqui geometræ appellare conſueverunt, quando non ab uno duntaxat puncto ſed à pluribus [*rectæ ſcilicet aut peripheriæ circuli*] problema efficitur: ut ſiquis proponat, Data recta terminata, invenire punctum à quo perpendicularis ducta ad datam rectam ſit inter ipſius rectæ partes media proportionalis. *Locum* ejuſmodi vocant geometræ; quoniam non unum duntaxat eſt punctum quod problema efficit, ſed locus totus quem occupat circumferentia circuli circa datam rectam, tanquam diametrum, deſcripti. ſi enim ſuper data re-

τῆς ΓΑ ἐκτός. ἐὰν δὲ ὀξυγώνιος ᾖ ὁ κῶνος, ὀξείας οὔσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, αἱ ΒΑΓ, ΑΕΖ ἔσονται δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές τι, καὶ αἱ ΕΖ, ΑΓ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται· προσεκβάλλειν γὰρ δυνάμεθα τὸν κῶνον. ἔσται οὖν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομή, ἥτις καλεῖται Ἔλλειψις, ἤτοι διὰ τὸ ἐλλείπειν δύο ὀρθαῖς τὰς προειρημένας γωνίας, ἢ διὰ τὸ τὴν ἔλλειψιν κύκλον εἶναι ἐλλιπῆ. οὕτω μὲν οὖν οἱ παλαιοὶ ὑποτιθέμενοι τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὸ διὰ τῆς ΔΕΖ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κώνου τριγώνου, καὶ ἔτι διαφόρους τοὺς κώνους ἐθεώρησαν, καὶ ἐπὶ ἑκάστου ἰδίαν τομήν. ὁ δὲ Ἀπολλώνιος, ὑποθέμενος κῶνον καὶ ὀρθὸν καὶ σκαληνόν, τῇ διαφόρῳ τοῦ ἐπιπέδου κλίσει διαφόρους ἐποίησε τὰς τομάς. ἔστω γὰρ πάλιν, ὡς ἐπὶ τῶν αὐτῶν καταγραφῶν, τὸ τέμνον ἐπίπεδον τὸ ΚΕΛ, κοινὴ δὲ αὐτοῦ τομὴ καὶ τῆς βάσεως ἡ ΚΛ, κοινὴ δὲ πάλιν αὐτοῦ τοῦ ΚΕΛ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἡ ΕΖ, ἥτις καὶ διάμετρος καλεῖται τῆς τομῆς. ἐπὶ πάντων οὖν τῶν τομῶν ὑποτίθεται τὴν ΚΛ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΓ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. λοιπὸν δὲ εἰ μὲν ἡ ΕΖ παράλληλος εἴη τῇ ΑΓ, παραβολὴν γίνεσθαι τὴν ΚΕΛ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τομήν· εἰ δὲ συμπίπτει τῇ ΑΓ πλευρᾷ ἡ ΕΖ ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, ὡς κατὰ τὸ Δ, γίνεσθαι τὴν ΚΕΛ τομὴν ὑπερβολήν· εἰ δὲ ἐντὸς συμπίπτει τῇ ΑΓ ἡ ΕΖ, γίνεσθαι τὴν τομὴν ἔλλειψιν, ἣν καὶ θυρεὸν καλοῦσι. καθόλου οὖν τῆς μὲν παραβολῆς ἡ διάμετρος παράλληλός ἐστι τῇ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου· τῆς δὲ ὑπερβολῆς ἡ διάμετρος συμπίπτει τῇ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου, ἐπὶ τὰ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ κώνου μέρη· τῆς δὲ ἐλλείψεως ἡ διάμετρος συμπίπτει τῇ πλευρᾷ τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὰ πρὸς τῇ βάσει μέρη. καὶ τοῦτο δὲ χρὴ εἰδέναι, ὅτι ἡ μὲν παραβολὴ καὶ ἡ ὑπερβολὴ τῶν εἰς ἄπειρόν εἰσιν αὐξανομένων, ἡ δὲ ἔλλειψις οὐκέτι· πᾶσα γὰρ εἰς αὐτὴν συννεύει, ὁμοίως τῷ κύκλῳ.

Πλειόνων δὲ οὐσῶν ἐκδόσεων, ὡς καὶ αὐτός φησιν ἐν τῇ ἐπιστολῇ, ἄμεινον ἡγησάμην συναγαγεῖν αὐτάς, ἐκ τῶν ἐμπιπτόντων τὰ σαφέστερα παρατιθέμενος ἐν τῷ ῥητῷ, διὰ τὴν τῶν εἰσαγομένων εὐμάρειαν· ἔξωθεν δὲ ἐν τοῖς συντεταγμένοις σχολίοις ἐπισημαίνεσθαι τοὺς διαφόρους, ὡς εἰκός, τρόπους τῶν ἀποδείξεων. φησὶ τοίνυν ἐν τῇ ἐπιστολῇ τὰ πρῶτα τέσσαρα βιβλία περιέχειν ἀγωγὴν στοιχειώδη. ὧν τὸ μὲν πρῶτον περιέχει τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τοῦ κώνου τομῶν, καὶ τῶν καλουμένων ἀντικειμένων, καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα· ταῦτα δέ ἐστιν ὅσα συμβαίνει παρὰ τὴν πρώτην αὐτῶν γένεσιν· ἔχουσι γὰρ καὶ ἕτερά τινα παρακολουθήματα. τὸ δὲ δεύτερον τὰ παρὰ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν, καὶ τὰς ἀσυμπτώτους· καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρείαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς. ὁ διορισμὸς ὅτι διπλοῦς ἐστι παντί που δῆλον· ὁ μὲν μετὰ τὴν ἔκθεσιν ἐφιστάνων τί ἐστι τὸ ζητούμενον· ὁ δὲ τὴν πρότασιν ὁ συγχωρῶν καθολικὴν εἶναι, λέγων πότε καὶ πῶς καὶ ποσαχῶς δυνατὸν συστῆναι τὸ προτεθέν, οἷός ἐστιν ὁ ἐν τῷ εἰκοστῷ δευτέρῳ θεωρήματι τοῦ πρώτου βιβλίου τῶν Εὐκλείδου στοιχειώσεων· "ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντῃ μεταλαμβανομένας", ἐπεὶ δέδεικται ὅτι παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. τὸ δὲ τρίτον τῶν κωνικῶν περιέχει, φησί, πολλὰ καὶ παράδοξα θεωρήματα χρήσιμα πρὸς τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων. Ἐπιπέδους τόπους ἔθος τοῖς παλαιοῖς γεωμέτραις λέγειν, ὅτε τῶν προβλημάτων οὐκ ἀφ' ἑνὸς σημείου μόνον, ἀλλ' ἀπὸ πλειόνων γίνεται τὸ ποίημα· οἷον εἰ ἐπιτάξει, τῆς εὐθείας δοθείσης πεπερασμένης, εὑρεῖν τι σημεῖον ἀφ' οὗ ἡ ἀχθεῖσα κάθετος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν μέση ἀνάλογον γίνεται τῶν τμημάτων. Τόπον καλοῦσι τὸ τοιοῦτον, οὐ μόνον γὰρ ἓν σημεῖόν ἐστι τὸ ποιοῦν τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ τόπος ὅλος ὃν ἔχει ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου περὶ διάμετρον τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν κύκλου. ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐ-

θείας

Digitized by Google

θείας ἡμικύκλιον γραφῇ, ὅπερ ἂν ἐπὶ τῆς περιφερείας λάβῃς σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετον ἀγάγῃς ἐπὶ τὴν διάμετρον, ποιήσει τὸ προταθέν. ὁμοίως δὲ δοθείσης εὐθείας, ἐάν τις ἐπιτάξῃ εὑρεῖν ἐκτὸς αὐτῆς σημεῖον ἀφ' οὗ ἐπιζευγνύμεναι ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας ἴσαι ἔσονται ἀλλήλαις· καὶ ἐπὶ τούτου οὐ μόνον ἕν σημεῖόν ἐστι τὸ ποιοῦν τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ τόπος ὃν ἐπέχει ἡ ἀπὸ τῆς διχοτομίας πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη. ἐὰν γὰρ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν δίχα τεμὼν, καὶ ἀπὸ τῆς διχοτομίας πρὸς ὀρθὰς ἀγάγῃς, ὅπερ ἂν ἐπ' αὐτῆς λάβῃς σημεῖον ποιήσει τὸ ἐπιταχθέν. ὁμοίως καὶ γράφει αὐτὸς Ἀπολλώνιος ἐν τῷ ἀναλυομένῳ τόπῳ ἐπὶ τοῦ ὑποκειμένου.

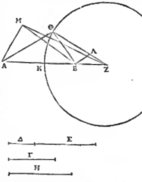
ℓta ſemicirculus deſcribatur, quodcunque in circumferentia ſumpſeris punctum, & ab ipſo perpendicularem ad diametrum duxeris, quod propoſitum eſt efficiet. Similiter autem data recta, ſi quis proponat invenire extra ipſam punctum à quo rectæ ad ejus extrema ductæ inter ſe æquales ſint; etiam in hoc non unicum duntaxat eſt punctum problema efficiens, ſed locus quem occupat recta à puncto medio rectæ datæ ad rectos angulos ducta. nam ſi data recta bifariam ſecetur, & ab eo puncto recta ad rectos ducatur angulos, quodcunque in ipſa ſumpſeris punctum faciet illud quod proponebatur. Huic ſimile ſcribit *Apollonius* in *Loco Reſoluto* ſubnexo.

Δύο δοθέντων σημείων ἐν ἐπιπέδῳ, καὶ λόγου δοθέντος ἀνίσων εὐθειῶν δυνατόν ἐστιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ γράψαι κύκλον, ὥστε τὰς ἀπὸ τῶν δοθέντων σημείων ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου κλωμένας εὐθείας λόγον ἔχειν τὸν αὐτὸν τῷ δοθέντι.

Datis duobus punctis in plano, & data ratione inæqualium rectarum: poteſt in plano circulus deſcribi, ita ut rectæ à datis punctis ad circumferentiam circuli inclinatæ habeant rationem eandem datæ rationi.

Ἔστω τὰ μὲν δοθέντα σημεῖα τὰ Α, Β, λόγος δὲ ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ, μείζονος ὄντος Γ· δεῖ δὴ ποιῆσαι τὸ ἐπιταχθέν.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ πρὸς τὸ Β μέρη, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Δ πρὸς τὴν Γ ἡ Γ πρὸς ἄλλην τινὰ, μείζονα δηλονότι τῆς Δ, καὶ ἔστω εἰ τύχοι πρὸς τὴν ΕΔ. καὶ πάλιν γεγονέτω ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν ΑΒ ἡ Δ πρὸς τὴν ΒΖ, καὶ ἡ Γ πρὸς τὴν Η. φανερὸν δὲ καὶ ὅτι ἥτε Γ μέση ἀνάλογόν ἐστι τῆς ΕΔ καὶ τῆς Δ, καὶ ἡ Η τῶν ΑΖ, ΖΒ. καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῇ Η κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΘ, φανερὸν δὴ ὅτι τέμνει ἡ ΚΘ περιφέρεια τὴν ΑΒ εὐθεῖαν, ἡ γὰρ Η εὐθεῖα μέση ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΑΖ, ΖΒ. εἰλήφθω δὴ ἐπὶ τῆς περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΑ, ΘΒ, ΘΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΖ τῇ Η, καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΘ ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΒ. καὶ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΘΖΒ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖΘ τῷ ΘΖΒ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΘΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΑΒ. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Β τῇ ΑΘ παράλληλος ἡ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΘ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΒ, καὶ ὡς ἄρα πρώτη ἡ ΑΖ πρὸς τρίτην τὴν ΖΒ τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΖ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΒ ἡ ΑΘ πρὸς ΒΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ ἡ ΑΘ πρὸς ΒΛ. πάλιν ἐπεὶ ἴση



Sint data puncta A, B; ratio autem data, quam habet Γ ad Δ, ſitque Γ major: & oporteat facere illud quod propoſitum eſt.

Jungatur A B, & ad partes B producatur, & fiat ut Δ ad Γ ita Γ ad aliam majorem quam Δ; ſit *ex. gr.* E, Δ ſimul. rurſus fiat ut E ad A B ita Δ ad B Z, & Γ ad H. patet igitur Γ mediam proportionalem eſſe inter B Δ & Δ; itemque H mediam proportionalem inter A Z, Z B *. quare ſi centro Z & intervallo H circulus K Θ deſcribatur, circumferentia K Θ rectam A B ſecabit; nam recta H eſt media proportionalis inter A Z, Z B. Sumatur in circumferentia quodvis punctum Θ, & jungantur Θ A, Θ B, Θ Z; erit igitur Θ Z ipſi H æqualis, & propterea ut A Z ad Z Θ ita Θ Z ad Z B. ſunt autem circa eundem angulum Θ Z B latera proportionalia: ergo [per 6. 6.] triangulum A Z Θ ſimile eſt triangulo Θ Z B, & angulus Z Θ B angulo Θ A B æqualis. ducatur per B ipſi A Θ parallela B Λ. & quoniam ut A Z ad Z Θ ita eſt Θ Z ad Z B; erit [per cor. 20. 6.] prima A Z ad tertiam Z B ut quadratum ex A Z ad quadratum ex Θ Z. ſed [per 4. 6.] ut A Z ad Z B ita A Θ ad B Λ: ergo ut quadratum ex A Z ad quadratum ex Z Θ ita A Θ ad B Λ. rurſus quoniam angulus

* Quoniam [per conſtr.] E eſt ad A B ut Δ ad B Z; erit [per 12. 5.] B Δ ad A Z ut Δ ad B Z. Sed Δ eſt ad B Z [per conſtr.] ut Γ ad H: & ideo B Δ eſt ad A Z ut Γ ad H; unde [per 4. & 16. 5.] Γ eſt ad B Δ ut H ad A Z. Rurſus [per conſtr.] Γ eſt ad B Δ, ut Δ ad Γ, ut B Z ad H: ergo B Z eſt ad H ut H ad A Z.

B Θ Z æqualis eſt angulo Θ A B; & angulus A Θ B [per 29. 1.] angulo Θ B A æqualis, alterni enim ſunt: & reliquus reliquo æqualis erit, & triangulum A Θ B ſimile triangulo Θ B A. quare [per 4. 6.] latera quæ circum æquales angulos proportionalia ſunt; videlicet ut A Θ ad Θ B ita Θ B ad B A, & ut quadratum ex A Θ ad quadratum ex Θ B ita A Θ ad B A. erat autem ut A Θ ad B A ita quadratum ex A Z ad quadratum ex Z Θ: ut igitur quadratum ex A Z ad quadratum ex Z Θ ita [per 11. 5.] quadratum ex A Θ ad quadratum ex Θ B, & idcirco ut A Z ad Z Θ ita A Θ ad Θ B. Sed [ex ſupra oſtenſis] ut A Z ad Z Θ ita E Δ ad Γ, & Γ ad Δ: ergo ut Γ ad Δ ita A Θ ad Θ B. Similiter oſtendetur omnes alias rectas, quæ à punctis A, B ad circumferentiam circuli inclinantur, eandem rationem habere quam habet Γ ad Δ.

Dico porro ſi à punctis A, B ducantur rectæ ad punctum quod non ſit in circumferentia circuli, ipſarum non eandem eſſe rationem quæ eſt Γ ad Δ. nam ſi eſſe poteſt, factum ſit jam illud ad punctum M, quod extra circumferentiam ſumatur (eo enim intra ſumpto, idem abſurdum ſequetur) & junctis M A, M B, M Z, ut eſt Γ ad Δ ita ſupponatur eſſe A M ad M B. ergo [per cor. 20. 6.] ut E Δ ad Δ ita quadratum ex E Δ ad quadratum ex Γ, & quadratum ex A M ad quadratum ex M B *. ut autem E Δ ad Δ ita poſita eſt A Z ad Z B: quare ut A Z ad Z B ita quadratum ex A M ad quadratum ex M B. &, ex iis quæ ſunt ſuperius dicta, ſi à puncto B ducatur recta ipſi A M parallela; ut A Z ad Z B ita demonſtrabitur quadratum ex A Z ad quadratum ex Z M. Sed modo demonſtratum eſt ut A Z ad Z B ita quadratum ex A Z ad quadratum ex Z Θ: ergo Z Θ ipſi Z M eſt æqualis. quod eſt impoſſibile.

Loci igitur plani ejuſmodi ſunt. *Solidi* vero *Loci* appellantur ex eo quod lineæ, per quas ipſorum problemata conſtruuntur, à ſolidorum ſectione generationem habent, quales ſunt coni ſectiones, & compiures aliæ. Sunt & alii *Loci ad Superficiem* dicti, quibus ex eorum proprietate nomen impoſitum eſt. Invehitur deinde *Apollonius* in *Euclidem*, non, ut *Pappus* & alii nonnulli arbitrantur, quod duas medias proportionales non invenerit: ſiquidem *Euclides* recte invenit unam mediam proportionalem, & non infeliciter, ut ipſe inquit; duas vero proportionales medias neque omnino in elementis inveſtigare aggreſſus eſt, & *Apollonius* de duabus mediis proportionalibus in tertio libro nihil inquirere videtur: ſed, ut veriſimile eſt, *Euclidem* in alio libro de *Locis* conſcripto, qui ad nos non pervenerit, reprehendit. Quæ vero deinceps ſubjungit de quarto libro perſpicua ſunt. Quintus, inquit, liber de minimis & maximis magna ex parte agit. Quemadmodum enim in elementis [ad 7. & 8. 3.] didicimus, ſi ab aliquo puncto in circulum rectæ ducantur, earum quidem quæ ad concavam ipſius circumferentiam pertingunt, maximam eſſe quæ per centrum tranſit; earum vero quæ ad convexam, minimam eſſe quæ inter dictum punctum & diametrum interjicitur: ita & de coni ſectionibus in quinto libro inquirit. Sexti, ſeptimi, & octavi libri propoſitum manifeſte ab ipſo *Apollonio* explicatur. Et hæc de epiſtola dicta ſunto.

ἴση ἡ ὑπὸ Β Θ Ζ τῇ ὑπὸ Θ Α Β, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ Α Θ Β τῇ ὑπὸ Θ Β Α ἴση, ἐναλλὰξ γάρ· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἴση ἐστίν, καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α Θ Β τῷ Θ Β Α. καὶ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ὡς ἡ Α Θ πρὸς Θ Β ἡ Θ Β πρὸς Β Α, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ Α Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Θ Β ἡ Α Θ πρὸς Β Α. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ Α Θ πρὸς Β Α τὸ ἀπὸ Α Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Θ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Α Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Θ τὸ ἀπὸ Α Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Θ Β, καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Θ ἡ Α Θ πρὸς Θ Β. ἀλλ' ὡς ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Θ ἡ Ε Δ πρὸς Γ, καὶ ἡ Γ πρὸς Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς Δ ἡ Α Θ πρὸς Θ Β. ὁμοίως δὲ δειχθήσονται πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῶν Α, Β σημείων ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου κλώμεναι τὸν αὐτὸν ἔχουσαι λόγον τῆς Γ, Δ.

Λέγω δὴ ὅτι πρὸς ἄλλῳ σημείῳ μὴ ὄντι ἐπὶ τῆς περιφερείας οὐ γίνεται λόγος τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β σημείων ἐπ' αὐτὸ ἐπιζευγνυμένων εὐθειῶν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς Γ πρὸς Δ. εἰ γὰρ δυνατόν, γεγονέτω πρὸς τῷ Μ ἐκτὸς τῆς περιφερείας, καὶ γὰρ εἰ ἐντὸς ληφθείη τὸ αὐτὸ ἄτοπον συμβήσεται καθ' ἑτέραν τῶν ὑποθέσεων, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Μ Α, Μ Β, Μ Ζ, καὶ ὑποκείσθω ὡς ἡ Γ πρὸς Δ οὕτως ἡ Α Μ πρὸς Μ Β. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε Δ πρὸς Δ οὕτως τὸ ἀπὸ Ε Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ, καὶ τὸ ἀπὸ Α Μ πρὸς τὸ ἀπὸ Μ Β. ἀλλ' ὡς ἡ Ε Δ πρὸς Δ οὕτως ὑπόκειται ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Β τὸ ἀπὸ Α Μ πρὸς τὸ ἀπὸ Μ Β. καὶ διὰ τὰ προδειχθέντα, ἐὰν ἀπὸ τοῦ Β τῇ Α Μ παράλληλον ἀγάγωμεν, δειχθήσεται ὡς ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Β τὸ ἀπὸ Α Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Μ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Β τὸ ἀπὸ Α Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Θ· ἴση ἄρα ἡ Ζ Θ τῇ Ζ Μ. ὅπερ ἀδύνατον.

Τόποι δὲ ἐπίπεδοι λέγονται τὰ τοιαῦτα. Οἱ δὲ λεγόμενοι στερεοὶ τόποι, τὴν προσωνυμίαν ἐσχήκασιν, ἀπὸ τοῦ τὰς γραμμὰς δι' ὧν γράφονται τὰ κατ' αὐτοὺς προβλήματα ἐκ τῆς τομῆς τῶν στερεῶν τὴν γένεσιν ἔχειν, οἷαί εἰσιν αἱ τοῦ κώνου τομαὶ καὶ ἕτεραι πλείους. εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλοι τόποι πρὸς ἐπιφάνειαν λεγόμενοι, οἳ τὴν ἐπωνυμίαν ἔχουσιν ἀπὸ τῆς περὶ αὐτοὺς ἰδιότητος. Μέμφεται δὲ ἑξῆς τῷ Εὐκλείδῃ, οὐχ ὡς οἴεται Πάππος καὶ ἕτεροί τινες, διὰ τὸ μὴ εὑρηκέναι δύο μέσας ἀνάλογον· ὅ τε γὰρ Εὐκλείδης ὑγιῶς εὗρε τὴν μίαν μέσην ἀνάλογον, ἀλλ' οὐχ, ὡς αὐτός φησιν, οὐκ εὐτυχῶς, περὶ τῶν δύο μέσων οὐδ' ὅλως ἐπεχείρησε ζητῆσαι ἐν τῇ στοιχειώσει, αὐτός τε Ἀπολλώνιος οὐδὲν περὶ τῶν δύο μέσων ἀνάλογον φαίνεται ζητήσας ἐν τῷ τρίτῳ βιβλίῳ· ἀλλ' ὡς ἔοικεν ἑτέρῳ βιβλίῳ περὶ τόπων γεγραμμένῳ τῷ Εὐκλείδῃ ἐπισκήπτει, ὅπερ εἰς ἡμᾶς οὐ φέρεται. τὰ δὲ ἑξῆς περὶ τοῦ τετάρτου βιβλίου λεγόμενα σαφῆ ἐστι. τὸ δὲ πέμπτον φησὶ περιέχειν τὰ περὶ τῶν ἐλαχίστων καὶ μεγίστων. ὥσπερ γὰρ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἐμάθομεν ἐν τῇ στοιχειώσει, ὅτι ἐστί τι σημεῖον ἀφ' οὗ τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν μεγίστη ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν ἐλαχίστη ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· οὕτως καὶ ἐπὶ τῶν τοῦ κώνου τομῶν ζητεῖ ἐν τῷ πέμπτῳ βιβλίῳ. τοῦ δὲ ἕκτου καὶ ἑβδόμου καὶ ὀγδόου βιβλίου σαφὴς ἡ πρόθεσις ὑπ' αὐτοῦ εἴρηται. καὶ ταῦτα μὲν περὶ τῆς ἐπιστολῆς.

* Ex hypotheſi enim eſt A M ad M B ut Γ ad Δ; & ideo quadratum ex A M ad quadratum ex M B eſt ut quadratum ex Γ ad quadratum ex Δ, hoc eſt (ut ſupra oſtenſum) ut B Δ ad Δ.

*

DE-

ΟΡΟΙ ΠΡΩΤΟΙ.

α'. Ἐὰν ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν, ὃς οὐκ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ σημείῳ, εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐφ' ἑκάτερα προσεκβληθῇ, καὶ μένοντος τοῦ σημείου ἡ εὐθεῖα περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν περιενεχθεῖσα εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι· τὴν γραφεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας ἐπιφάνειαν, ἣ σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις κειμένων, ὧν ἑκατέρα εἰς ἄπειρον αὔξεται, τῆς γραφούσης εὐθείας εἰς ἄπειρον προσεκβαλλομένης, καλῶ κωνικὴν ἐπιφάνειαν.

β'. Κορυφὴν δὲ αὐτῆς, τὸ μεμενηκὸς σημεῖον.

γ'. Ἄξονα δὲ, τὴν διὰ τοῦ σημείου καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν.

δ'. Κῶνον δὲ, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ κύκλου καὶ τῆς μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας κωνικῆς ἐπιφανείας.

ε'. Κορυφὴν δὲ τοῦ κώνου, τὸ σημεῖον ὃ καὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ κορυφή.

ϛ'. Ἄξονα δὲ, τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν.

ζ'. Βάσιν δὲ, τὸν κύκλον.

η'. Ὀρθοὺς μὲν καλῶ, τοὺς πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας.

θ'. Σκαληνοὺς δὲ, τοὺς μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας.

ι'. [b] Πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἥτις ἐστὶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, διάμετρον μὲν καλῶ εὐθεῖαν, ἥτις ἠγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείας, εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους, δίχα διαιρεῖ.

ια'. Κορυφὴν δὲ τῆς καμπύλης γραμμῆς, τὸ πέρας τῆς εὐθείας τὸ πρὸς τῇ γραμμῇ.

ιβ'. Τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.

ιγ'. [c] Ὁμοίως δὲ καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ κειμένων, διάμετρον καλῶ πλαγίαν μὲν, ἥτις εὐθεῖα, τέμνουσα τὰς δύο γραμμὰς, πάσας τὰς ἀγομένας ἐν ἑκατέρᾳ τῶν γραμμῶν παρά τινα εὐθεῖαν δίχα τέμνει.

ιδ'. Κορυφὰς δὲ τῶν γραμμῶν, τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῆς διαμέτρου.

ιε'. Ὀρθίαν δὲ διάμετρον, εὐθεῖαν, ἥτις κει-

DEFINITIONES PRIMÆ.

1. SI [a] ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui nou eſt in eodem plano in quo punctum, juncta recta linea in utramque partem producatur, & manente puncto convertatur circa circuli circumferentiam, quouſque ad eum locum redeat à quo cœpit moveri; ſuperficiem à recta deſcriptam, conſtantemque ex duabus ſuperficiebus ad verticem inter ſeſe aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, (nimirum rectâ quæ eam deſcribit in infinitum productâ) voco conicam ſuperficiem.

2. Verticem vero ejus, manens punctum.

3. Axem autem, rectam lineam quæ per puuctum & centrum circuli ducitur.

4. Couum vero voco, figuram contentam circulo & conica ſuperficie, quæ inter verticem & circuli circumferentiam interjicitur.

5. Verticem autem coni, punctum quod & ſuperficiei conicæ vertex eſt.

6. Axem vero, rectam lineam quæ à vertice ad circuli centrum ducitur.

7. Baſim autem, circulum ipſum.

8. Rectos quidem conos voco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus.

9. Scalenos vero, qui axes nou ad rectos angulos ipſis baſibus habent.

10. [b] Omnis curvæ lineæ, in uno plano exiſtentis, diametrum voco rectam lineam, quæ quidem ducta à linea curva omnes rectas in ipſa ductas, cuidam rectæ parallelas, biſariam dividit.

11. Verticem autem curvæ lineæ, terminum rectæ qui eſt in ipſa linea.

12. Ordinatim vero ad diametrum applicari unamquamque rectarum parallelarum.

13. [c] Similiter & duarum curvarum linearum, in uno plano exiſtentium, diametrum quidem tranſverſam voco, rectam lineam; quæ, utramque lineam ſecans, rectas omnes in ipſis ductas, rectæ cuidam parallelas, biſariam dividit.

14. Vertices autem linearum, diametri terminos qui ſunt in ipſis lineis.

15. Rectam vero diametrum, illam,

lam, quæ inter duas lineas poſita rectas omnes ductas, rectæ cuidam parallelas & inter ipſas curvas interjectas, bifariam ſecat.

μένων μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν πάσας τὰς ἀγομένας εὐθείας, εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους, καὶ ἀπολαμβανομένας μεταξὺ τῶν γραμμῶν, δίχα τέμνει.

16. Ordinatim autem ad diametrum applicari unamquamque rectarum parallelarum.

ιϛʹ. Τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.

17. Conjugatas diametros voco curvæ lineæ & duarum curvarum, rectas lineas; quarum utraque diameter eſt, & rectas alteri parallelas bifariam dividit.

ιζʹ. Συζυγεῖς καλῶ διαμέτρους καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, εὐθείας αἳ ἑκατέρα, διάμετρος οὖσα, τὰς τῇ ἑτέρᾳ παραλλήλους δίχα τέμνει.

18. Axem vero curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectam lineam quæ, cum ſit diameter curvæ lineæ vel duarum curvarum, rectas parallelas ad rectos angulos ſecat.

ιηʹ. Ἄξονα δὲ καλῶ καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, εὐθεῖαν ἥτις διάμετρος οὖσα τῆς γραμμῆς, ἢ τῶν γραμμῶν, πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὰς παραλλήλους.

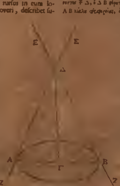
19. Axes conjugatos voco curvæ lineæ & duarum curvarum, rectas lineas; quæ, cum ſint diametri conjugatæ, ſibi invicem parallelas ad rectos angulos ſecant.

ιθʹ. Συζυγεῖς καλῶ ἄξονας καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, εὐθείας αἵτινες, διάμετροι οὖσαι συζυγεῖς, πρὸς ὀρθὰς τέμνουσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλους.

EUTOCIUS.

Exorſus a definitionibus [*Apollonius*] tradit generationem conicæ ſuperficiei, non autem definitionem quæ quid res ſit declarat: quanquam licebit utique iis, qui volent, & ex generatione ipſa definitionem colligere. At vero nos iis, quæ ab *Apollonio* dicuntur, ex figuris lucem afferemus.

Si ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, *&c.*] Sit circulus AB, cujus centrum Γ, & punctum aliquod ſublime Δ, junctaque ΔB in infinitum ex utraque parte producatur ad E, Z. Si igitur manente Δ, ΔB feratur in circuli AB circumferentia, donec punctum B rurſus in eum locum reſtituatur, à quo cœpit moveri, deſcribet ſuperficiem quandam, quæ quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus ad Δ punctum inter ſe connexis. eam voco conicam ſuperficiem dicit quod & augetur in infinitum, cum recta EB ipſam deſcribens in infinitum producitur. verticem ſuperficiei dicit punctum Δ; axem rectam ΔΓ, conum vero appellat figuram contentam circulo AB & ea ſuperficie quam ΔB ſola deſcribit: coni verticem punctum Δ; axem ΔΓ; baſim vero AB circulum. Et ſi ΔΓ ad circulum AB fuerit perpendicularis, rectum vocat conum, ſin minus, ſcalenum. Deſcribitur autem conus ſcalenus, quando à centro circuli recta erigitur quæ non eſt perpendicularis ad circuli planum, ab erectæ vero puncto, quod eſt in ſublimi, ad circumferentiam recta ducitur, & manente puncto, circa ipſam convertitur: comprehenſa etenim figura conus erit ſcalenus. conſtat igitur rectam circumductam in converſione quandoque majorem, quandoque minorem, & quandoque æqualem fieri, ad aliud atque aliud circuli punctum: quod tamen nos hoc modo demonſtrabimus.



Ἀρχόμενος δὲ τῶν ὅρων, γένεσιν ὑπογράφει κωνικῆς ἐπιφανείας, ἀλλ' οὐ τὸν τί ἐστιν ὁρισμὸν παραδίδωσιν· ἔξεστι δὲ τοῖς βουλομένοις ἐκ τῆς γενέσεως αὐτῆς τὸν ὅρον λαμβάνειν. τὰ δὲ λεγόμενα ὑπ' αὐτοῦ διὰ καταγραφῆς σαφῆ ποιήσομεν.

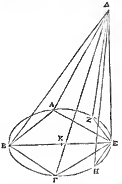
Ἐὰν ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν, καὶ τὰ ἑξῆς.] Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒ, οὗ κέντρον τὸ Γ, καὶ σημεῖόν τι μετέωρον τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΒ ἐκβεβλήσθω εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα μέρη, ὡς ἐπὶ τὰ Ε, Ζ. ἐὰν δή, μένοντος τοῦ Δ, ἡ ΔΒ φέρηται ἕως ἂν τὸ Β ἐνεχθῇ κατὰ τῆς τοῦ ΑΒ κύκλου περιφερείας, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, γεννήσει ἐπιφάνειάν τινα, ἥτις σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν ἁπτομένων ἀλλήλων κατὰ τὸ Δ· ἣν καὶ καλεῖ κωνικὴν ἐπιφάνειαν. φησὶ δὲ ὅτι καὶ εἰς ἄπειρον αὔξεται διὰ τὸ καὶ τὴν γράφουσαν αὐτὴν εὐθεῖαν, οἷον τὴν ΕΒ, εἰς ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι. κορυφὴν δὲ τῆς ἐπιφανείας λέγει τὸ Δ· ἄξονα δὲ τὴν ΔΓ· κῶνον δὲ λέγει τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ ΑΒ κύκλου καὶ τῆς ἐπιφανείας, ἣν μόνη γράφει ἡ ΔΒ εὐθεῖα· κορυφὴν δὲ τοῦ κώνου τὸ Δ, ἄξονα δὲ τὴν ΔΓ, βάσιν δὲ τὸν ΑΒ κύκλον. καὶ ἐὰν μὲν ἡ ΔΓ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῷ ΑΒ κύκλῳ, ὀρθὸν καλεῖ τὸν κῶνον, ἐὰν δὲ μὴ πρὸς ὀρθὰς, σκαληνόν. γεννᾶται δὲ ὁ σκαληνὸς κῶνος, ὅταν λαβόντες κύκλον ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτοῦ ἀνιστῶμεν εὐθεῖαν, μὴ πρὸς ὀρθὰς τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ μετεώρου σημείου τῆς ἀνεσταμένης εὐθείας ἐπὶ τὸν κύκλον ἐπιζευγνύωμεν εὐθεῖαν, καὶ περιάγωμεν τὴν ἐπιζευχθεῖσαν εὐθεῖαν περὶ τὸν κύκλον, τοῦ πρὸς τῷ μετεώρῳ σημείου τῆς ἀνεσταμένης μένοντος· τὸ γὰρ περιληφθὲν σχῆμα κῶνος ἔσται σκαληνός. δῆλον δὴ ὅτι ἡ περιαγομένη εὐθεῖα ἐν τῇ περιαγωγῇ μείζων καὶ ἐλάττων γίνεται, κατὰ δέ τινας θέσεις καὶ ἴση, πρὸς ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τοῦ κύκλου. ἀποδείκνυται δὲ τοῦτο οὕτως.

Ἐὰν

Ἐὰν κώνου σκαληνοῦ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι· πασῶν τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθεισῶν εὐθειῶν μία μέν ἐστιν ἐλαχίστη, μία δὲ μεγίστη, δύο δὲ μόναι ἴσαι παρ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης καὶ τῆς μεγίστης, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάσσων.

Si à vertice coni ſcaleni ad baſis circumferentiam rectæ ducantur: omnium rectarum à vertice ad baſim ductarum una quidem minima, & una maxima erit; duæ vero tantum, ex utraque parte minimæ & maximæ, inter ſe æquales; at quæ propinquior eſt minimæ ſemper minor erit remotiore.

Ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ σκαληνοῦ κώνου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη, ἤτοι ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ ΑΒΓ κύκλου πεσεῖται, ἢ ἐκτός, ἢ ἐντός· ἐμπιπτέτω πρότερον ἐπὶ τῆς περιφερείας, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Κ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ εἰλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι παρ' ἑκάτερα τοῦ Ε, αἱ ΖΕ, ΕΗ, καὶ παρ' ἑκάτερα τοῦ Β αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΕΗ, ΔΖ, ΔΗ, ΕΑ, ΕΓ, ΑΒ, ΒΓ, ΔΑ, ΔΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΖ εὐθεῖα τῇ ΕΗ εὐθείᾳ, ἴσας γὰρ περιφερείας ὑποτείνουσι, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση, καὶ διάμετρος ἡ ΒΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΖΕ τῇ ΕΗΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ· κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ καὶ πᾶσαι δειχθήσονται, ἴσον ἀπέχουσαι τῆς ΔΕ ἢ τῆς ΔΒ, ἴσαι. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΕΖ ὀρθή ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΔΕΖ, μείζων ἐστὶν ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ. καὶ πάλιν μείζων ἐστὶν ἡ ΕΑ εὐθεῖα τῆς ΕΖ, ἐπεὶ καὶ περιφέρεια ἡ ΕΖΑ τῆς ΕΖ περιφερείας, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ· ἡ ΔΖ ἄρα τῆς ΔΑ ἐλάσσων ἐστί. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ΔΑ τῆς ΔΒ ἐλάσσων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΕ τῆς ΔΖ ἐλάσσων ἐδείχθη, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΑ, ἡ δὲ ΔΑ τῆς ΔΒ· ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ ΔΕ, μεγίστη δὲ ἡ ΔΒ, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΕ τῆς ἀπώτερον ἐλάσσων ἐστίν.

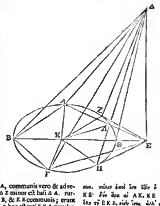


Ἀλλὰ δὴ ἡ κάθετος πιπτέτω ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς ἡ ΔΕ· καὶ εἰλήφθω πάλιν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΘ. καὶ εἰλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι παρ' ἑκάτερα τοῦ Θ, αἱ ΘΖ, ΘΗ, καὶ παρ' ἑκάτερα τοῦ Β, αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ, ΗΚ, ΔΖ, ΔΗ, ΑΒ, ΒΓ, ΚΑ, ΚΓ, ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΘΖ περιφέρεια τῇ ΘΗ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΚΖ τῇ ὑπὸ ΘΚΗ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΚ εὐθεῖα τῇ ΚΗ ἐστὶν ἴση, ἐκ κέντρου γάρ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ· βάσις ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΕ εὐθεῖα τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ περιφέρεια τῇ ΒΓ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ τῇ ὑπὸ ΓΚΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ λοιπὴ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ ΑΚΕ λοιπῇ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῇ ὑπὸ ΓΚΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ εὐθεῖα τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση, ἐκ κέντρου γάρ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, δύο δυσὶν ἴσαι,

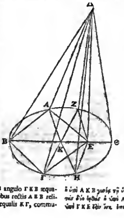
Sit conus ſcalenus, cujus baſis ΑΒΓ circulus, vertex autem punctum Δ. & quoniam recta, quæ à vertice coni ſcaleni ad ſubjectum planum perpendicularis ducitur, vel in circumferentiam circuli ΑΒΓ cadet, vel extra, vel intra: cadat primum in ipſam circumferentiam, ut in prima figura ipſa ΔΕ; ſumptoque circuli centro Κ, ab ipſo Ε ad Κ ducatur ΕΚ, & producatur ad Β: jungatur autem ΒΔ, & ex utraque parte puncti Ε ſumantur circumferentiæ duæ æquales ΖΕ, ΕΗ; itemque ex utraque parte Β ſumantur aliæ duæ æquales ΑΒ, ΒΓ; & jungantur ΖΕ, ΕΗ, ΔΖ, ΔΗ, ΕΑ, ΕΓ, ΑΒ, ΒΓ, ΔΑ, ΔΓ. quoniam igitur recta ΕΖ [per 29. 3.] æqualis eſt ipſi ΕΗ, æquales enim circumferentias ſubtendunt; communis autem & ad rectos angulos ΔΕ: erit [per 4. 1.] baſis ΔΖ baſi ΔΗ æqualis. rurſus quoniam circumferentia ΑΒ æqualis eſt ipſi ΒΓ circumferentiæ, & eſt ΒΕ diameter circuli; reliqua ΑΖΕ reliquæ ΕΗΓ æqualis erit: quare & recta ΑΕ ipſi ΕΓ. ſed ΔΕ communis eſt utrique, & ad rectos angulos: baſis igitur ΔΑ æqualis eſt baſi ΔΓ. Similiter etiam demonſtrabuntur inter ſe æquales quæcunque ab ipſa ΔΕ vel ΔΒ æqualiter diſtant. rurſus quoniam trianguli ΔΕΖ angulus ΔΕΖ rectus eſt, recta ΔΖ [per 18. 1.] major erit quam ΔΕ. & rurſus recta ΕΑ major eſt quam ΕΖ, quoniam circumferentia ΕΖΑ major eſt quam ipſa ΕΖ circumferentia; communis vero & ad rectos angulos ΔΕ: baſis ΔΖ minor erit quam ΔΑ. eadem quoque ratione & ΔΑ minor quam ΔΒ. quoniam igitur oſtenſa eſt ΔΕ minor quam ΔΖ, itemque ΔΖ minor quam ΔΑ, & ΔΑ minor quam ΔΒ: ipſa quidem ΔΕ minima eſt, ΔΒ vero maxima, & ipſi ΔΕ propinquior remotiori ſemper eſt minor.

Sed cadat perpendicularis extra circulum ΑΒΓ, ut in ſecunda figura ΔΕ; & rurſus ſumatur circuli centrum Κ, junctaque ΕΚ producatur ad Β, & jungantur ΔΒ, ΔΘ. Sumantur præterea duæ circumferentiæ æquales ex utraque parte puncti Θ, quæ ſint ΘΖ, ΘΗ, & ex utraque parte ipſius Β aliæ duæ ſumantur ΑΒ, ΒΓ, & jungantur ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ, ΗΚ, ΔΖ, ΔΗ, ΑΒ, ΒΓ, ΚΑ, ΚΓ, ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ. itaque quoniam æqualis eſt circumferentia ΘΖ ipſi ΘΗ, & angulus ΘΚΖ angulo ΘΚΗ [per 27. 3.] æqualis erit. Quoniam igitur recta ΖΚ rectæ ΚΗ eſt æqualis, (ex centro enim ſunt,) & ΚΕ communis: ergo baſis ΖΕ æqualis baſi ΗΕ. quoniam igitur recta ΖΕ eſt æqualis ΗΕ, communis vero & ad rectos angulos ΕΔ: baſis ΔΖ baſi ΔΗ eſt æqualis. rurſus quoniam circumferentia ΒΑ æqualis eſt ΒΓ, & angulus ΑΚΒ ipſi ΓΚΒ; & reliquus ex duobus rectis ΑΚΕ reliquo ΓΚΕ æqualis erit. quoniam igitur ΑΚ, ΓΚ inter ſe æquales ſunt, (ex centro enim ſunt,) communis vero ΚΕ, duæ duabus

duabus æquales, & angulus A K E æqualis Γ K E; ergo & A E baſis æqualis Γ E. quoniam igitur A E æqualis eſt Γ E, communis vero & ad rectos angulos E Δ, & baſis Δ A erit baſi Δ Γ æqualis. ſimiliter & aliæ omnes ad invicem æquales demonſtrabuntur, quæ ab ipſa Δ B vel Δ Θ æqualiter diſtant. & quoniam [per 8. 3.] E Θ minor eſt quam E Z, communis vero & ad rectos angulos E Δ: erit baſis Δ Θ baſi Δ Z minor. rurſus quoniam recta quæ à puncto E ducta contingit circulum major eſt omnibus quæ ab eodem puncto in convexam circumferentiam cadunt; & rectangulum ſub A E, E Λ æquale eſt quadrato ipſius E Z, quando E Z circulum contingit, ut oſtenſum eſt in tertio libro elementorum [propoſ. 36.]: erit [per 16. 6.] ut A E ad E Z ita E Z ad E Λ. eſt autem E Z major quam E Λ, ſemper enim propinquior minimæ minor eſt remotiori: quare & A E major quam E Z. quoniam igitur E Z minor eſt quam E A, communis vero & ad rectos eſt E Δ: baſis igitur Δ Z minor eſt baſi Δ A. rurſus, quia eſt A K æqualis K B, & K E communis; erunt duæ A K, K E duabus E K, K B, hoc eſt toti E K B, æquales. ſed duæ A K, K E majores ſunt quam A E; ergo & B E major quam A E. Rurſus quoniam A E minor eſt quam E B, communis autem & ad rectos angulos E Δ; baſis Δ A minor eſt baſi Δ B. itaque cum Δ Θ minor ſit quam Δ Z, & Δ Z minor quam Δ A, & Δ A quam Δ B: minima quidem erit Δ Θ, Δ B vero maxima, & ipſi Δ Θ propinquior, &c.



Poſtremo cadat perpendicularis Δ E intra circulum A B Γ H Z, ut in tertia figura, ſumptoque circuli centro K, & juncta E K producatur in utramque partem ad puncta B, Θ, & jungantur Δ Θ, Δ B. ſumantur autem ex utraque parte puncti Θ circumferentiæ æquales Θ Z, Θ H, & ex utraque parte puncti B æquales A B, B Γ, & jungantur E Z, E H, Z K, K H, Δ Z, Δ H, K A, K Γ, E A, E Γ, Δ A, Δ B, Δ Γ, A B, B Γ. Quoniam igitur Θ Z circumferentia æqualis eſt circumferentiæ Θ H; angulus igitur Θ K Z [per 27. 3] angulo Θ K H eſt æqualis. & quoniam K Z æqualis ipſi K H, & K E communis, & angulus Z K E æqualis angulo H K E; ergo & Z E baſis baſi H E æqualis erit. Quoniam igitur Z E æqualis H E, & Δ E communis, & angulus Z E Δ æqualis H E Δ; baſis igitur Δ Z baſi Δ H æqualis eſt. rurſus quia circumferentia A B æqualis eſt circumferentiæ B Γ; angulus A K B angulo Γ K B æqualis erit: ergo & reliquus ex duobus rectis A K E reliquo Γ K E. quoniam igitur A K æqualis K Γ, commu-



καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΚΕ τῇ ὑπὸ ΓΚΕ· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΑΕ οὖσα τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ καὶ πρὸς ὀρθὰς, βάσις ἄρα ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ ἴση. ὁμοίως δὲ καὶ πᾶσαι δειχθήσονται, αἱ ἴσον ἀπέχουσαι τῆς ΔΒ ἢ τῆς ΔΘ, ἴσαι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΘ τῆς ΕΖ ἐστὶν ἐλάσσων, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΘ βάσεως τῆς ΔΖ ἐστὶν ἐλάσσων. πάλιν ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου πασῶν τῶν πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν μείζων ἐστὶν, ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ τρίτῳ τῆς στοιχειώσεως, τὸ ὑπὸ ΑΕ, ΕΛ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ὅταν ἡ ΕΖ ἐφάπτηται· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ ἡ ΕΖ πρὸς ΕΛ. μείζων δὲ ἐστὶν ἡ ΕΖ τῆς ΕΛ, ἀεὶ γὰρ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερον ἐστὶν ἐλάσσων· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΖ τῆς ΕΑ ἐστὶν ἐλάσσων, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ τῆς ΔΑ ἐστὶν ἐλάσσων. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ· δύο ἄρα αἱ ΑΚ, ΚΕ ταῖς ΕΚ, ΚΒ, τουτέστιν ὅλῃ τῇ ΕΚΒ, εἰσὶν ἴσαι. ἀλλ' αἱ ΑΚ, ΚΕ τῆς ΑΕ μείζονές εἰσιν· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῆς ΑΕ μείζων ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΒΕ ἐλάσσων ἐστὶ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ τῆς ΔΒ ἐστὶν ἐλάσσων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΘ τῆς ΔΖ ἐστὶν ἐλάσσων, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΑ, ἡ δὲ ΔΑ τῆς ΔΒ· ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΔΘ, μεγίστη δὲ ἡ ΔΒ, καὶ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΘ, καὶ τὰ ἑξῆς.

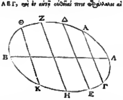
Ἀλλὰ δὴ ἡ κάθετος ΔΕ πιπτέτω ἐντὸς τοῦ ΑΒΓΗΖ κύκλου, ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΕΚ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Β, Θ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΔΘ, ΔΒ. καὶ εἰλήφθωσαν δύο ἴσαι περιφέρειαι παρ' ἑκάτερα τοῦ Θ, αἱ ΘΖ, ΘΗ, καὶ παρ' ἑκάτερα τοῦ Β αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ, ΖΚ, ΚΗ, ΔΖ, ΔΗ, ΚΑ, ΚΓ, ΕΑ, ΕΓ, ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, ΑΒ, ΒΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΘΖ περιφέρεια τῇ ΘΗ, καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΚΗ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΖ τῇ ΚΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΚΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΚΕ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΕ τῇ ΗΕ ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΕΔ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΒΓ, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΚΒ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ λοιπὴ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς ἡ ὑπὸ ΑΚΕ λοιπῇ εἰς τὰς δύο ὀρθὰς τῇ ὑπὸ ΓΚΕ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ τῇ ΚΓ ἐστὶν ἴση, κοινὴ

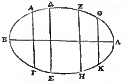
δὲ

Digitized by Google

δὴ ἡ ΒΚ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΚΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΚΒ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῇ ὑπὸ ΓΕΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ καὶ πᾶσαι δειχθήσονται αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἢ τῆς ΔΒ ἢ τῆς ΔΘ ἴσαι. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς διαμέτρου εἴληπται σημεῖον τὸ Ε, μὴ ὂν κέντρον τοῦ κύκλου· μεγίστη μὲν ἡ ΒΕ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΒΘ, ἀεὶ δὲ ἡ ἔγγιον τῇ ΒΘ τῆς ἀπώτερον ἐστὶν ἐλάσσων· ὥστε ἡ ΕΘ τῆς ΕΖ ἐστὶν ἐλάσσων. καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΕ τῆς ΖΒ ἐλάσσων ἐστὶ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐταῖς ἡ ΕΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΘ βάσεως τῆς ΔΖ ἐλάσσων ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἡ μὲν ΕΖ ἔγγιόν ἐστι τῇ ΕΘ, ἡ δὲ ΕΑ πορρώτερον, ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΒΖ τῆς ΕΑ. ἐπεὶ οὖν ἐλάσσων ἡ ΒΖ τῆς ΒΑ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν αὐταῖς ἡ ΒΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΔΑ ἐλάσσων ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΒΚ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΕ· δύο αἱ ΑΒ, ΒΕ δυσὶ ταῖς ΒΒ, ΒΕ, τουτέστιν ὅλῃ τῇ ΒΒΕ, εἰσὶν ἴσαι. ἀλλ' αἱ ΑΒ, ΚΒ τῆς ΑΕ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ΕΒ ἄρα τῆς ΕΑ μείζων ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΕΑ τῆς ΒΒ ἐλάσσων ἐστὶ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐταῖς ἡ ΒΔ· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ βάσεως τῆς ΔΒ ἐστὶν ἐλάσσων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΘ τῆς ΔΖ ἐλάσσων, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΑ, ἡ δὲ ΔΑ τῆς ΔΒ· ἐλαχίστη μέν ἐστιν ἡ ΔΘ, καὶ τὰ ἑξῆς.

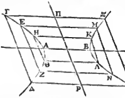
[b] Πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἥτις ἐστὶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, διάμετρον καλῶ, καὶ τὰ ἑξῆς.] Τὸ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ εἶπε, διὰ τὴν ἕλικα τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς σφαίρας· αὗται γὰρ οὐκ εἰσὶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. ὃ δὲ λέγει τοιοῦτόν ἐστιν· ἔστω καμπύλη γραμμὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῇ εὐθεῖαί τινες παράλληλοι αἱ

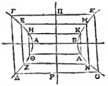




ΑΓ, ΔΕ, ΖΗ, ΘΒ, καὶ διήχθω ἀπὸ τοῦ Β εὐθεῖα ἡ ΒΛ δίχα αὐτὰς τέμνουσα· φησὶν οὖν ἐπὶ τῆς ΑΒΓ γραμμῆς διάμετρον μὲν καλῶ τὴν ΒΛ· κορυφὴν δὲ τὸ Β· τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν ΒΛ κατῆχθαι ἑκάστην τῶν ΑΓ, ΔΕ, ΖΗ, ΘΚ. εἰ δὲ ἡ ΒΛ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὰς παραλλήλους, ἄξων καλεῖται.

[c] Ὁμοίως δὲ καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν, καὶ τὰ ἑξῆς.] Ἐὰν νοήσωμεν τὰς Α, Β γραμμὰς, καὶ ἐν αὐταῖς τὰς ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΒΛ, ΜΝ, ΞΟ παραλλήλους, καὶ τὴν ΑΒ ἐκβεβλημένην ἐφ' ἑκάτερα, καὶ τέμνουσαν τὰς παραλλήλους δίχα·





καὶ τὴν μὲν ΑΒ καλῶ πλαγίαν διάμετρον· κορυφὰς δὲ τῶν γραμμῶν τὰ Α, Β σημεῖα· τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν ΑΒ τὰς ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΒΛ, ΜΝ, ΞΟ. εἰ δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὰς τέμνει, ἄξων καλεῖται. ἐὰν δὲ διαχθῇ τις εὐθεῖα, ὡς ἡ ΠΡ, τὰς

nis vero EK, & angulus AKB angulo ΓKE æqualis: baſis igitur AE baſi ΓE eſt æqualis. quoniam igitur AE eſt æqualis ΓE, & EΔ communis, & angulus AEΔ æqualis ΓEΔ; erit & baſis ΔA baſi ΔΓ æqualis. eodem modo & omnes quæ æqualiter diſtant ab ipſa ΔE vel ΔΘ inter ſe æquales demonſtrabuntur. & quoniam in circuli ABΓ diametro ſumitur punctum E, quod non eſt centrum circuli: erit BE maxima, EΘ vero minima, & ſemper ipſi EΘ propinquior minor remotiore fuerit; adeoque EΘ minor quam EZ. & quoniam ΘE minor eſt quam ZE, & EΔ communis & ipſis ad rectos angulos; baſis igitur ΔΘ minor baſi ΔZ. rurſus cum EZ propinquior ſit ipſi EΘ, EA vero remotior; erit EZ minor quam EA. quoniam igitur EZ minor eſt quam EA, communis vero & illis ad rectos angulos EΔ; baſis ΔZ baſi ΔA minor erit. rurſus quoniam AK æqualis EK, KE vero communis; duæ AK, KE duabus BK, KE, hoc eſt toti BKE, æquales ſunt. ſed AK, KB majores ſunt quam AB: quare EB major eſt quam EA. rurſus quoniam EA minor eſt quam EB, communis vero & ipſis ad angulos rectos EΔ; baſis igitur ΔA minor eſt baſi ΔB. quoniam igitur minor eſt ΔΘ quam ΔZ, & ΔZ quam ΔA, & ΔA quam ΔB: minima erit ΔΘ, &c.

[b] Omnis curvæ lineæ, in uno plano exiſtentis, diametrum voco, &c.] In uno plano dixit, propter helicen cylindri & ſphæræ; hæ enim non ſunt in uno plano. quod autem dicit ejuſmodi eſt: ſit curva linea AEΓ, & in ea parallelæ quædam rectæ AΓ, ΔE, ZH, ΘK; à puncto autem B ducatur BΛ recta, quæ ipſas parallelas bifariam ſecet: lineæ igitur ABΓ diametrum, inquit, voco rectam BΛ; & verticem punctum B; ordinatim vero ad ipſam BΛ applicari dicitur unaquæque rectarum AΓ, ΔE, ZH, ΘK. ſi vero BΛ ipſas parallelas bifariam & ad rectos angulos ſecet, axis appellatur.

[c] Similiter & duarum curvarum linearum, &c.] Si enim intellexerimus lineas A, B, & in ipſis parallelas ΓΔ, EZ, HΘ, KΛ, MN, ΞO, & rectam AB ex utraque parte productam, quæ bifariam parallelas dividat: ipſam quidem AB voco diametrum tranſverſam; vertices linearum puncta A, B; ordinatim vero ad AB applicari dicuntur ΓΔ, EZ, HΘ, KΛ, MN, ΞO. at ſi ipſas bifariam & ad rectos angulos dividat, tranſverſus axis appellatur. ſi vero recta ducatur, ut ΠP, rectas

ΓΔ,

ΓΞ, ΕΜ, ΗΚ, ΘΛ, ΖΝ, ΔΟ ipſi ΑΒ parallelas bifariam ſecans, recta diameter dicitur. ordinatim ad diametrum ΠΡ applicetur unaquæque rectarum ΓΞ, ΕΜ, ΗΚ, ΘΛ, ΖΝ, ΔΟ. ſi bifariam & ad rectos angulos ipſam ſecet, rectus axis dicitur. at ſi rectæ ΑΒ, ΠΡ ſibi invicem parallelas bifariam ſecuerint, conjugatæ diametri dicuntur. quod ſi bifariam & ad rectos angulos, conjugati axes vocantur.

ΓΞ, ΒΜ, ΗΚ, ΘΛ, ΖΝ, ΔΟ παραλλήλους τῇ ΑΒ δίχα τέμνουσα, ὀρθία μὲν διάμετρος καλεῖται. τεταγμένως δὲ κατῆχθαι ἐπὶ τὴν ΠΡ διάμετρον ἑκάστη τῶν ΓΞ, ΒΜ, ΗΚ, ΘΛ, ΖΝ, ΔΟ. εἰ δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὰς τέμνει, ἄξων ὀρθιος. ἐὰν δὲ αἱ ΑΒ, ΠΡ δίχα τέμνωσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλους, λέγονται συζυγεῖς διάμετροι. ἐὰν δὲ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς, συζυγεῖς ἄξονες ὀνομάζονται.

PROP. I. *Theor.*

Rectæ lineæ, quæ à vertice ſuperficiei conicæ, ad puncta quæ in ſuperficie ſunt, ducuntur, in ipſa ſuperficie erunt.

SIT ſuperficies conica, cujus vertex Α, & ſumpto in ſuperficie conica aliquo puncto Β, jungatur recta ΑΓΒ; recta ΑΓΒ in ſuperficie erit.

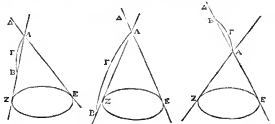
Si enim fieri poteſt, non ſit in ſuperficie, & recta, quæ ſuperficiem deſcribit, ſit ΔΕ; circulus autem, in quo ipſa ΔΕ fertur, ſit ΕΖ. itaque, ſi manente Α, feratur ΔΕ in circuli ΕΖ circumferentia; per Β punctum tranſibit, atque erunt duarum rectarum iidem termini: quod eſt abſurdum. non igitur à puncto Α ad Β ducta recta extra ſuperficiem eſt: ergo in ipſa ſuperficie erit. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α′.

Αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ σημεῖα, ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εἰσίν.

ΕΣΤΩ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἧς κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΓΒ· εὐθεῖα ἡ ΑΓΒ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστίν.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, μὴ ἔστω, καὶ ἔστω ἡ γεγραφυῖα τὴν ἐπιφάνειαν εὐθεῖα ἡ ΔΕ· ὁ δὲ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ ΔΕ, ὁ ΕΖ. ἐὰν δὴ μένοντος τοῦ Α σημείου, ἡ ΔΕ εὐθεῖα φέρηται κατὰ τῆς τοῦ ΕΖ κύκλου περιφερείας, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β σημείου, καὶ ἔσονται δύο εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα οὐκ ἔστιν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ· ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἄρα ἐστί.



Corollarium.

Et conſtat, ſi à vertice ad aliquod punctum eorum, quæ intra ſuperficiem ſunt, recta ducatur, illam intra ſuperficiem conicam; & ſi ad aliquod eorum quæ ſunt extra, extra ſuperficiem cadere.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ὅτι ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπί τι σημεῖον τῶν ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, ἐντὸς πεσεῖται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας· καὶ ἐὰν ἐπί τι τῶν ἐκτὸς ἐπιζευχθῇ, ἐκτὸς ἔσται τῆς ἐπιφανείας.

EUTOCIUS.

De figuris diverſis vel caſibus theorematum illud ſcire oportet, caſum eſſe, quando ea quæ in propoſitione dantur poſitione data ſunt: ipſorum enim differens tranſmutatio, eadem concluſione manente, caſum facit. ſimiliter etiam & à conſtructione tranſpoſita fit caſus. cum igitur theoremata plures caſus habeant, una eademque demonſtratio omnibus congruit & iiſdem elementis, præterquam in paucis quibuſdam, ut deinceps explicabimus. ſtatim nam-

Περὶ τῶν διαφόρων καταγραφῶν, ἤτοι πτώσεων τῶν θεωρημάτων, τοῦτο ἰστέον, ὅτι πτῶσις μέν ἐστιν, ὅταν τὰ ἐν τῇ προτάσει δεδομένα τῇ θέσει ᾖ δεδομένα· ἡ γὰρ διάφορος αὐτῶν μετάληψις, τοῦ αὐτοῦ συμπεράσματος ὄντος, ποιεῖ τὴν πτῶσιν. ὁμοίως δὲ καὶ ἀπὸ τῆς κατασκευῆς μετατιθεμένης γίνεται πτῶσις. πολλὰς δὲ πτώσεις ἐχόντων τῶν θεωρημάτων, ὅμως ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἁρμόζει καὶ ἐπὶ τῶν αὐτῶν στοιχείων, πλὴν βραχέων, ὡς ἑξῆς εἰσόμεθα. εὐ-

θὺς

ὅτι γὰρ τὸ πρῶτον θεώρημα τρεῖς πτώσεις ἔχει, διὰ τὸ λαμβανόμενον σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, τουτέστι τὸ Β, ποτὲ μὲν εἰς τὴν κατωτέραν ἐπιφάνειαν εἶναι, καὶ τοῦτο διχῶς, ἢ ἀνωτέρω τοῦ κύκλου, ἢ κατωτέρω· ποτὲ δὲ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς ἐπικειμένης. τοῦτο δὲ τὸ θεώρημα προέθετο ζητῆσαι, ὅτι οὐκ ἐπὶ πάντα δύο σημεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας λαμβανόμενα ἐπιζευγνυμένη ἡ εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἔσται, ἀλλὰ αὐτὴ μόνον ἡ ἐπὶ τὴν κορυφὴν νεύουσα· διὰ τὸ καὶ ὑπ᾽ εὐθείας τὸ πέρας ἐχούσης μένον πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς ἐπιφανείας γεγενῆσθαι τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν. ὅτι δὲ τοῦτο ἀληθές, τὸ δεύτερον θεώρημα δηλοῖ.

que primum theorema tres habet caſus, propterea quod punctum B in ſuperficie ſumptum interdum quidem in ſuperficie inferiori ſumitur, & hoc duobus modis, vel ſupra circulum, vel infra; interdum vero in ea quæ eſt ad verticem. Hoc igitur theorema oſtendere proponit, non quælibet duo puncta conjungentem rectam in ſuperficie eſſe, ſed tantum rectam quæ ad verticem ipſum vergit: cujus cauſa eſt, quod conica ſuperficies efficitur a recta quæ manentem terminum ad verticem habet. illud vero plane ita eſſe, in ſecundo theoremate demonſtratur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β΄.

Ἐὰν ἐφ᾽ ὁποτέρας οὖν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν δύο σημεῖα ληφθῇ, ἡ δὲ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα μὴ νεύῃ ἐπὶ τὴν κορυφήν, ἐντὸς πεσεῖται τῆς ἐπιφανείας· ἡ δὲ ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ, ἐκτός.

Prop. II. *Theor.*

Si in alterutra ſuperficierum, quæ ſunt ad verticem, duo puncta ſumantur, & quæ puncta conjungit recta ad verticem non vergat; intra ſuperficiem cadet; quæ vero eſt in directum ipſi, cadet extra.

Ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἧς κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, ὁ δὲ κύκλος, καθ᾽ οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ὁ Β Γ, καὶ εἰλήφθω ἐφ᾽ ὁποτέρας τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν δύο σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Δ Ε μὴ νευέτω ἐπὶ τὸ Α σημεῖον· λέγω ὅτι ἡ Δ Ε ἐντὸς ἔσται τῆς ἐπιφανείας, καὶ ἡ ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ, ἐκτός.

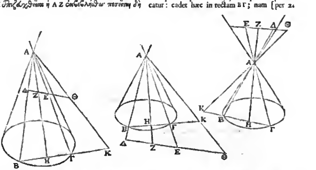
Ἐπεζεύχθωσαν αἱ Α Ε, Α Δ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. πιπτέτωσαν κατὰ τὰ Β, Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Β Γ· ἔσται ἄρα ἡ Β Γ ἐντὸς τοῦ κύκλου, ὥστε καὶ ἐντὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. εἰλήφθω δὴ ἐπὶ τῆς Δ Ε τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Α Ζ ἐκβεβλήσθω· πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν Β Γ εὐθεῖαν· τὸ γὰρ Β Γ Α τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. πιπτέτω κατὰ τὸ Η. ἐπεὶ οὖν τὸ Η ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἡ Α Η ἄρα ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ὥστε καὶ τὸ Ζ ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ πάντα τὰ ἐπὶ τῆς Δ Ε σημεῖα ἐντός ἐστι τῆς ἐπιφανείας.

Ἐκβεβλήσθω δὴ ἡ Δ Ε ἐπὶ τὸ Θ· λέγω δὴ ὅτι ἐκτὸς πεσεῖται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

Sit conica ſuperficies, cujus vertex quidem punctum A, circulus autem, in quo fertur recta ſuperficiem deſcribens, ſit B Γ; & in alterutra ſuperficierum quæ ſunt ad verticem, ſumptis duobus punctis Δ, E, recta Δ E ducatur, quæ ad punctum A non vergat: dico ipſam Δ B intra ſuperficiem cadere, & quæ eſt in directum ipſi, cadere extra.

Jungantur A E, A Δ, & producantur. cadent utique [per 1. 1. hujus] in circuli circumferentiam. cadant in puncta B, Γ; & jungatur B Γ: erit igitur [per 2. 3.] B Γ intra circulum; quare & intra conicam ſuperficiem. ſumatur in ipſa Δ E quodvis punctum Z; junctaque A Z producatur: cadet hæc in rectam B Γ; nam [per 2. 11.] triangulum B Γ A eſt in uno plano. cadat in H. quoniam igitur punctum H eſt intra conicam ſuperficiem; & ipſa A H [per cor. 1. 1. huj.] intra conicam ſuperficiem erit; adeoque & punctum Z. ſimiliter demonſtrabuntur & omnia puncta rectæ Δ E eſſe intra conicam ſuperficiem.

Producatur Δ B ad Θ; dico E Θ extra conicam ſuperficiem cadere.



Si

Si enim fieri poteſt, aliquod ipſius E Θ punctum, nempe Θ, non ſit extra, & juncta A Θ producatur; cadet hæc vel in ipſam circuli circumferentiam, vel intra; quod fieri non poteſt: cadit enim in B Γ protractam, ut in K. quare E Θ extra conicam ſuperficiem erit.

Recta igitur Δ E cadet intra conicam ſuperficiem, & quæ eſt in directum ipſi, extra cadet. quod erat demonſtrandum.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι αὐτῆς ΕΘ μὴ ἐκτὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΘ ἐκβεβλήσθω· πεσεῖται δὴ ἢ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ἢ ἐντός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· πίπτει γὰρ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἐκβαλλομένην, ὡς κατὰ τὸ Κ. ἡ ΕΘ ἄρα ἐκτός ἐστι τῆς ἐπιφανείας.

Η ἄρα ΔΕ ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἡ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἐκτός. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

EUTOCIUS.

Secundum theorema tres habet caſus, propterea quod ſumpta puncta Δ, E ſunt vel in ſuperficie ad verticem, vel in inferiori; & id dupliciter, vel intra circulum, vel extra. ſciendum autem eſt in quibuſdam exemplaribus totum hoc theorema per argumentationem, quæ deducit ad abſurdum, demonſtrari.

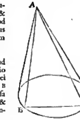
Τὸ δεύτερον θεώρημα τρεῖς ἔχει πτώσεις, διὰ τὸ τὰ λαμβανόμενα σημεῖα τὰ Δ, Ε ἢ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν εἶναι ἐπιφανείας, ἢ ἐπὶ τῆς κάτω· καὶ τοῦτο διχῶς, ἢ ἐσωτέρω τοῦ κύκλου, ἢ ἐξωτέρω. δεῖ δὲ ἐγνωκέναι ὅτι τοῦτο τὸ θεώρημα οὕτως ἔχει, ἐν τισιν ἀντιγράφοις, ὅλον διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς ἀποδεδειγμένον.

Prop. III. *Theor.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Si conus plano per verticem ſecetur, ſectio triangulum erit.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, ἡ τομὴ τρίγωνόν ἐστιν.



SIT conus, cujus vertex A, baſis autem circulus B Γ, & per A ſecetur plano aliquo quod ſectiones faciat in ſuperficie lineas quidem A B, A Γ, & in baſi rectam B Γ: dico A B Γ triangulum eſſe.

Quoniam enim à puncto A ad B ducta linea communis ſectio eſt plani ſecantis, & ſuperficiei conicæ; erit [per 1. 1. huj.] A B recta linea. eadem ratione & ipſa A Γ. eſt autem [per 3. 11.] & B Γ recta: quare A B Γ eſt triangulum.

Si igitur conus plano ſecetur per verticem, ſectio triangulum erit. quod erat demonſtrandum.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ Α σημείου, καὶ ποιείτω τομὰς ἐπὶ μὲν τῆς ἐπιφανείας τὰς ΑΒ, ΑΓ γραμμάς, ἐν δὲ τῇ βάσει τὴν ΒΓ εὐθεῖαν· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη κοινὴ τομή ἐστι τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΑΓ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ εὐθεῖα· τρίγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ.

Ἐὰν ἄρα κῶνος ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, ἡ τομὴ τρίγωνόν ἐστι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

EUTOCIUS.

Tertium theorema caſum non habet. oportet autem ſcire lineam A B rectam eſſe, cum ſit communis ſectio plani ſecantis, & ſuperficiei conicæ, quæ à recta manentem terminum ad verticem habente deſcribitur. neque enim omnis ſuperficies ſecta plano facit ſectionem rectam lineam; neque ipſe conus, niſi planum ſecans per verticem tranſeat.

Τὸ τρίτον θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει. δεῖ δὲ ἐν αὐτῷ ἐπιστῆσαι ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖά ἐστι, διὰ τὸ κοινὸν τμῆμα εἶναι τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ὅτι ὑπὸ εὐθείας ἐγράφη τὸ πέρας ἰσχούσης μένον πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς ἐπιφανείας. οὐ γὰρ πᾶσα ἐπιφάνεια, ὑπὸ ἐπιπέδου τεμνομένη, τὴν τομὴν ποιεῖ εὐθεῖαν· οὐδὲ αὐτὸς ὁ κῶνος, εἰ μὴ διὰ τῆς κορυφῆς ἔλθοι τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

Prop. IV. *Theor.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Si alterutra ſuperficierum, quæ ſunt ad verticem, plano ſecetur æquidiſtante circulo, per quem fertur recta ſuperficiem deſcribens: planum, quod ſuperficie concluditur, circulus erit centrum in axe habens; figura vero contenta circulo, & ea parte ſuperficiei conicæ quæ inter ſecans planum & verticem interjicitur, conus erit.

Ἐὰν ὁποτεραοῦν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ παραλλήλῳ τῷ κύκλῳ, καθ' οὗ φέρεται ἡ γράφουσα ἐπιφάνειαν εὐθεῖα· τὸ ἀπολαμβανόμενον ἐπίπεδον μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας κύκλος ἔσται, τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος· τὸ δὲ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ κύκλου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου κωνικῆς ἐπιφανείας πρὸς τῇ κορυφῇ, κῶνος ἔσται.

SIT conica ſuperficies, cujus vertex A, circulus autem, in quo fertur recta ſuperficiem

ΕΣΤΩ κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἧς κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, ὁ δὲ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπι-

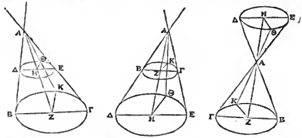
φάνειαν

φάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ἡ ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ παραλλήλῳ τῷ ΒΓ κύκλῳ, καὶ ποιείτω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὴν τὴν ΔΕ γραμμήν· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ γραμμὴ κύκλος ἐστὶν, ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἔχων τὸ κέντρον.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΒΓ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· ἄξων ἄρα ἐστὶ, καὶ συμβάλλει τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ. συμβαλλέτω κατὰ τὸ Η, καὶ ἐκβαλλέσθω τι διὰ τῆς ΑΖ ἐπίπεδον· ἔσται δὴ ἡ τομὴ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ. καὶ ἐπεὶ τὰ Δ, Η, Ε σημεῖα ἐν τῷ τέμνοντί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ ἐπιπέδῳ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗΕ. εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔΕ γραμμῆς, τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΘ ἐκβεβλήσθω· συμβαλεῖ δὴ τῇ ΒΓ περιφερείᾳ. συμβαλλέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΘ, ΖΚ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα, τὰ ΔΕ, ΒΓ, ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνεται τοῦ ΑΒΓ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΖΚ παράλληλος· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἥ τε ΖΒ πρὸς ΗΔ, καὶ ἡ ΖΓ πρὸς ΗΕ, καὶ ἡ ΖΚ πρὸς ΗΘ. καί εἰσιν αἱ τρεῖς ΒΖ, ΚΖ, ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΗ, ΗΘ, ΗΕ ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ Η σημείου πρὸς τὴν ΔΕ γραμμὴν προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ γραμμὴ, κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

deſcribens, ſit ΒΓ, & ſecetur plano quovis ipſi circulo ΒΓ æquidiſtante, atque ſectionem faciat in ſuperficie lineam ΔΕ: dico lineam ΔΕ eſſe circulum qui centrum in axe habet.

Sumatur enim centrum circuli ΒΓ, quod ſit Ζ, & ΑΖ jungatur: axis igitur [per 3. def. huj.] eſt ΑΖ, & occurrit plano ſecanti. occurrat in Η, & per rectam ΑΖ planum aliquod ducatur: erit igitur [per 3. 1. huj.] ſectio triangulum ΑΒΓ. & quoniam puncta Δ, Η, Ε ſunt & in plano ſecante, & in ipſo ΑΒΓ plano: ΔΗΕ erit [per 3. 11.] linea recta. ſumatur autem in ipſa ΔΕ linea punctum aliquod Θ, & juncta ΑΘ producatur: occurret igitur circumferentiæ ΑΒΓ. occurrat in Κ, junganturque ΗΘ, ΖΚ. & quoniam duo plana æquidiſtantia ΔΕ, ΒΓ plano ΑΒΓ ſecantur; communes ipſorum ſectiones [per 16. 11.] parallelæ erunt: parallela eſt igitur ΔΕ ipſi ΒΓ. & eadem ratione ΗΘ eſt parallela ipſi ΖΚ: quare [per 4. 6.] ut ΑΖ ad ΑΗ, ita ΖΒ ad ΗΔ, ΖΓ ad ΗΕ, & ΖΚ ad ΗΘ. ſuntque tres rectæ ΒΖ, ΚΖ, ΖΓ æquales inter ſeſe: ergo [per 14. 5.] & ipſæ tres ΔΗ, ΗΘ, ΗΕ inter ſeſe æquales erunt. ſimiliter quoque oſtendentur æquales quæcunque à puncto Η ad lineam ΔΕ ducuntur. linea igitur ΔΕ eſt circulus, centrum in axe habens.



Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ὅτι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ ΔΕ κύκλου, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτοῦ πρὸς τῷ Α σημείῳ κωνικῆς ἐπιφανείας, κῶνός ἐστι. καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου διάμετρός ἐστι τοῦ κύκλου.

Corollarium.

Conſtat [per 4. def. huj.] figuram contentam circulo ΔΕ, & ea parte ſuperficiei conicæ quæ inter dictum circulum & punctum Α interjicitur, conum eſſe. ſimulque demonſtratum eſt, communem ſectionem plani ſecantis & trianguli per axem, diametrum eſſe ipſius circuli.

EUTOCIUS.

Πτώσεις τοῦδε τοῦ θεωρήματος τρεῖς εἰσιν, ὥσπερ αὐτοῦ πρώτου καὶ δευτέρου.

Caſus hujus theorematis tres ſunt, quemadmodum & primi & ſecundi.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ

PROP. V. *Theor.*

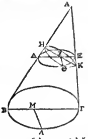
Si conus ſcalenus plano per axem ſecetur ad rectos angulos ipſi baſi, ſece-

turque altero plano ad triangulum per axem recto, quod ex verticis parte triangulum abſcindat ſimile ei quod per axem; ſubcontrarie vero poſitum: ſectio circulus erit. vocetur autem hujuſmodi ſectio SUBCONTRARIA.

ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ἀφαιροῦντι δὲ πρὸς τῇ κορυφῇ τρίγωνον ὅμοιον μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον· ἡ τομὴ κύκλος ἐστί. καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ΥΠΕΝΑΝΤΙΑ.

SIT conus ſcalenus, cujus vertex A punctum, baſis circulus BΓ, & [a] ſecetur plano per axem ad circulum BΓ recto, atque faciat ſectionem triangulum ABΓ; [b] ſecetur autem & altero plano ad rectos angulos ipſi ABΓ, quod ex parte A triangulum abſcindat AHK triangulo ABΓ ſimile, ſubcontrarie vero poſitum; ut videlicet angulus AKH æqualis ſit ABΓ angulo, & faciat ſectionem in ſuperficie lineam HKΘ: dico ipſam HΘK circulum eſſe.

Sumantur enim in lineis HΘK, BΓ puncta quæpiam Θ, Λ, à quibus ad planum trianguli ABΓ, perpendiculares ducantur: cadent hæ [per 38.11.] in communes planorum ſectiones. cadant ut ΘZ, ΛM. parallela eſt igitur [per 6.11.] ΘZ ipſi ΛM. ducatur autem per Z ipſi BΓ parallela ΔZE. eſt vero & ZΘ ipſi ΛM parallela: ergo [per 15. 11.] planum quod per ZΘ, ΔE tranſit, æquidiſtans eſt baſi ipſius coni: & idcirco [per 4.1. huj.] ſectio ΔΘE circulus erit, cujus diameter ΔE: æquale eſt igitur rectangulum ſub ΔZ, ZE quadrato ex ZΘ. & quoniam parallela eſt EΔ ipſi BΓ: angulus AΔE [per 29.1.] æqualis eſt angulo ABΓ. & ponitur angulus AKH angulo ABΓ æqualis: ergo & AKH ipſi AΔE æqualis erit. ſunt autem [per 15. 1.] & qui ad Z anguli æquales; ſunt enim ad verticem: igitur [per 4. 6.] ΔZH triangulum ſimile eſt triangulo KZE. igitur ut EZ ad ZK ita HZ ad ZΔ: [c] rectangulum igitur EZΔ æquale eſt [per 16. 6.] rectangulo KZH. ſed rectangulum EZΔ (hoc eſt ſub ΔZ, ZE) demonſtratum eſt æquale quadrato ex ZΘ: ergo & rectangulum ſub KZ, ZH eidem æquale erit. Similiter demonſtrabuntur & omnes, quæ à linea HΘK ad ipſam HK perpendiculares ducuntur, poſſe æquale ei quod ſub ſegmentis ipſius HK continetur. [d] ſectio igitur circulus eſt, cujus diameter [per 2. lem.] eſt HK.



ΕΣΤΩ κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ BΓ κύκλος, καὶ [a] τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ πρὸς τὸν BΓ κύκλον, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ABΓ τρίγωνον, [b] τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὄντι τῷ ABΓ τριγώνῳ, ἀφαιροῦντι δὲ τρίγωνον πρὸς τῷ A σημείῳ τὸ AHK ὅμοιον μὲν τῷ ABΓ τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον, τουτέστιν, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ AKH γωνίαν τῇ ὑπὸ ABΓ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν HKΘ γραμμήν· λέγω ὅτι κύκλος ἐστὶν ἡ HΘK γραμμή.

Εἰλήφθω γάρ τινα σημεῖα ἐπὶ τῶν HΘK, BΓ γραμμῶν, τὰ Θ, Λ, καὶ ἀπὸ τῶν Θ, Λ σημείων ἐπὶ τὸ διὰ τοῦ ABΓ τριγώνου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων. πιπτέτωσαν ὡς αἱ ΘZ, ΛM. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΘZ τῇ ΛM. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Z τῇ BΓ παράλληλος ἡ ΔZE. ἔστι δὴ καὶ ἡ ZΘ τῇ ΛM παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ZΘ, ΔE ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῇ βάσει τοῦ κώνου· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομή, οὗ διάμετρος ἡ ΔE· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΔZ, ZE τῷ ἀπὸ τῆς ZΘ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ EΔ τῇ BΓ· ἡ ὑπὸ AΔE γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ABΓ. ἡ δὲ ὑπὸ AKH τῇ ὑπὸ ABΓ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ AKH ἄρα τῇ ὑπὸ AΔE ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Z σημείῳ ἴσαι, κατὰ κορυφὴν γάρ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔZH τρίγωνον τῷ KZE τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ EZ πρὸς τὴν ZK οὕτως ἡ HZ πρὸς ZΔ· [c] τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν EZΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν KZH. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν EZΔ (τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔZ, ZE) ἴσον ἐδείχθη τῷ ἀπὸ τῆς ZΘ· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν KZ, ZH ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZΘ. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῆς HΘK γραμμῆς ἐπὶ τὴν HK ἀγόμεναι κάθετοι ἴσον δυνάμεναι τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς HK. [d] κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομή, οὗ διάμετρος ἡ HK.

EUTOCIUS.

Quintum theorema caſum non habet. Exordiens autem *Apollonius* expoſitionem, [a] Secetur, *inquit*, conus per axem plano ad baſim recto. Sed quoniam in cono ſcaleno, juxta unicam ſolummodo poſitionem triangulum per axem ad baſim rectum eſt, hoc ita faciemus. Sumentes namque baſis centrum, ab eo erigemus rectam ad rectos angulos ipſi pla-

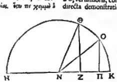
Τὸ πέμπτον θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει. ἀρχόμενος δὲ τῆς ἐκθέσεως, φησί, [a] Τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ πρὸς τὴν βάσιν. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ σκαληνῷ κώνῳ, κατὰ μίαν μόνον θέσιν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὴν βάσιν, τοῦτο ποιήσομεν οὕτως. λαβόντες τὸ κέντρον τῆς βάσεως, ἀναστήσομεν ἀπ' αὐτοῦ τῷ ἐπιπέδῳ τῆς βάσεως πρὸς

πρὸς ὀρθάς, καὶ δι' αὐτῆς καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβάλλοντες ἐπίπεδον ἕξομεν τὸ ζητούμενον. δέδεικται γὰρ ἐν τῷ ἑνδεκάτῳ τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως, ὅτι ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. τὸν δὲ κῶνον σκαληνὸν ὑπέθετο, ἐπειδὴ ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ τὸ παράλληλον τῇ βάσει ἐπίπεδον τῷ ὑπεναντίως κειμένῳ τὸ αὐτό ἐστιν.

Ἐπὶ φησί, b Τετμήσθω δὲ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ἀφαιροῦντι δὲ πρὸς τῇ κορυφῇ τρίγωνον ὅμοιον μὲν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον. τοῦτο δὲ γίνεται οὕτως. ἔστω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΗ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η, τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΗΚ· τὸ ΑΗΚ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΓ ὅμοιον μέν ἐστιν, ὑπεναντίως δὲ κείμενον. εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς ΗΚ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῷ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΖΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΗΚ, ΘΖ ἐπίπεδον· τοῦτο δὴ ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, διὰ τὴν ΖΘ, καὶ ποιεῖ τὸ προκείμενον.

Ἐν τῷ συμπεράσματί φησιν, ὅτι διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΔΖΗ, ΕΖΚ τριγώνων, c ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΖΔ τῷ ὑπὸ ΚΖΗ. δυνατὸν δέ ἐστι τοῦτο δεῖξαι καὶ δίχα τῆς τῶν τριγώνων ὁμοιότητος λέγοντας, ὅτι ἐπειδὴ ἑκατέρα τῶν ΑΚΗ, ΑΔΚ γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Β· ἐν τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τοῦ περιλαμβάνοντος κύκλου τὰ Δ, Ε, Η, Κ σημεῖα, καὶ ἐπειδὴ ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΗΚ τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ζ· τὸ ὑπὸ ΔΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΗΖΚ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι καὶ πᾶσαι ἀπὸ τῆς ΗΘΚ γραμμῆς ἐπὶ τὴν ΚΗ κάθετοι ἀγόμεναι ἴσον δύνανται τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων.

d Κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομή, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΗΚ.] καὶ δυνατὸν μέν ἐστιν ἐπιλογίσασθαι τοῦτο διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς. εἰ γὰρ ὁ περὶ τὴν ΚΗ γραφόμενος κύκλος οὐχ ἥξει διὰ τοῦ Θ σημείου, ἔσται τὸ ὑπὸ τῶν ΚΖ, ΖΗ ἴσον, ἤτοι τῷ ἀπὸ μείζονος τῆς ΖΘ, ἢ τῷ ἀπὸ ἐλάσσονος, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. δείξομεν δὲ αὐτὸ καὶ ἐπ' εὐθείας. ἔστω τις γραμμὴ ἡ ΗΘΚ, καὶ ὑποτεινέτω αὐτὴν ἡ ΚΗ, εἰλήφθω δὲ καὶ ἐπὶ τῆς γραμμῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Θ, Ο, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὴν ΗΚ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΘΖ, ΟΠ, καὶ ἔστω τὸ μὲν ἀπὸ ΖΘ ἴσον τῷ ὑπὸ ΗΖΚ, τὸ δὲ ἀπὸ ΟΠ τῷ ὑπὸ ΗΠΚ ἴσον· λέγω ὅτι κύκλος ἐστὶν ἡ ΗΘΟΚ γραμμή. τετμήσθω γὰρ ἡ ΗΚ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΘ, ΝΟ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΗΚ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ν, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ· τὸ ὑπὸ ΗΖΚ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ. τὸ δὲ ὑπὸ ΗΖΚ ἴσον ὑπόκειται τῷ ἀπὸ ΖΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΘΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ. ἴσα δέ ἐστι τὰ ἀπὸ ΘΖ, ΖΝ τῷ ἀπὸ ΝΘ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Ζ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΝΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ ΝΟ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΝΚ· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘΚ γραμμή, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΗΚ.



Δυνατὸν δέ ἐστιν, τὰς ΔΕ, ΗΚ διαμέτρους ποτὲ μὲν ἴσας, ποτὲ δὲ ἀνίσους εἶναι, οὐδέποτε μέντοι δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΝΚ. ἐπεὶ οὖν μείζων ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΝΑ τῆς ΑΚ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΑΚ τῆς ΑΗ, διὰ τὴν ὑπεναντίαν τομήν· ὥστε τῇ ΑΚ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἴση λαμβανομένη μεταξὺ πίπτει τῶν σημείων Η, Ν. πιπτέτω ὡς ἡ ΑΞ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Ξ τῇ ΒΓ παράλληλος ἀγομένη τέμνει τὴν ΗΚ. τεμνέτω ὡς ἡ ΞΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν

no baſis, perque ipſam & axem planum ducentes id quod propoſitum fuerat aſſequemur oſtenſum etenim eſt in undecimo libro [prop.18.] elementorum *Euclidis*, ſi recta plano alicui ad rectos angulos fuerit, & omnia quæ per ipſum ducuntur plana eidem ad rectos angulos eſſe. conum vero ſcalenum ſuppoſuit, quoniam in æquicruri planum baſi æquidiſtans idem eſt quod ſubcontrarie poſitum.

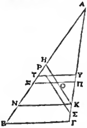
Præterea b Secetur, *inquit*, & altero plano ad rectos angulos ipſi triangulo per axem, quod abſcindat ex verticis parte triangulum ſimile ipſi ABΓ, ſubcontrarie vero poſitum. illud ita fiet. Sit triangulum per axem ABΓ, ſumaturque in AB quodvis punctum H, & ad rectam AH, & punctum in ea H, [per 23. 1.] conſtituatur angulus AHK ipſi AΓB æqualis: ergo triangulum AHK triangulo ABΓ ſimile erit, at ſubcontrarie poſitum. ſumatur autem in recta HK quodlibet punctum Z, & à Z erigatur ZΘ ad rectos angulos plano trianguli ABΓ, & per HK, ZΘ planum ducatur: erit illud [per 18. 11.] ad triangulum ABΓ rectum, quia per rectam ZΘ tranſit, & faciet id quod erat faciendum.

In concluſione *dicit*, propter ſimilitudinem triangulorum ΔZH, EZK, c æquale eſſe rectangulum EZΔ rectangulo KZH. quod quidem & abſque triangulorum ſimilitudine demonſtrari poteſt hoc pacto; quoniam enim uterque angulorum AKH, AΔE æqualis eſt angulo qui ad B: erunt hi [per 21. 3.] in eadem portione circuli per puncta Δ, Z, H, K tranſeuntis. & quoniam in circulo duæ rectæ ΔE, HK ſeſe ſecant in Z: rectangulum ΔZE [per 35. 3.] æquale eſt rectangulo HZK. Similiter demonſtrabuntur & omnes rectæ à linea HΘK ductæ perpendiculares ad KH rectam, poſſe æquale ei quod ſub ejus ſegmentis continetur.

d Sectio igitur eſt circulus, cujus diameter HK.] poſſumus autem hoc demonſtrare per deductionem ad abſurdum. Si enim circulus, qui circa HK deſcribitur, non tranſit per Θ punctum; erit rectangulum ſub KZ, ZH æquale quadrato, vel rectæ majoris ipſa ZΘ, vel minoris, contra hypotheſin. Sed & illud idem directa demonſtratione oſtendemus. ſit linea quædam HΘK, cui ſubtendatur recta HK, ſumantur autem in linea duo quævis puncta Θ, O, à quibus ad ipſam HK perpendiculares ducantur ΘZ, OΠ; ſitque quadratum ex ZΘ æquale rectangulo HZK, & quadratum ex OΠ æquale ipſi HΠK rectangulo: dico lineam HΘOK circulum eſſe. ſecetur enim HK bifariam in puncto N, & jungantur NΘ, NO. Quoniam igitur recta linea HK ſecatur in partes æquales in N, & in partes inæquales in Z: rectangulum HZK una cum quadrato ex NZ æquale erit [per 5. 2.] quadrato ex NK. ſed rectangulum HZK poſitum eſt æquale quadrato ex ZΘ: quadratum igitur ex ΘZ una cum quadrato ex NZ æquale eſt quadrato ex NK. æqualia autem ſunt [per 47 1.] ex ΘZ, ZN quadrata ipſi quadrato ex NΘ, angulus enim ad Z eſt rectus. ergo quadratum ex NΘ quadrato ex NK æquale erit. ſimiliter oſtendemus quadratum ex NO æquale eſſe quadrato ex NK: linea igitur HΘK circulus eſt, & ejus diameter HK.

Fieri autem poteſt ut diametri ΔE, HK quandoque æquales ſint, quandoque inæquales; nunquam tamen ſeſe bifariam ſecabunt. ducatur enim per K ipſi BΓ parallela NK. quoniam igitur major eſt BA quam AΓ: & ipſa NA quam AK major erit. eadem ratione & AK major eſt quam AH, propter ſubcontrariam ſectionem: quare ſi à recta AN abſciſſa fuerit æqualis ipſi AK, inter puncta H, N cadet. cadat ut AΞ: ergo per Ξ ducta parallela ipſi BΓ ſecabit HK. ſecet ut ΞOΠ. itaque quoniam

quoniam æqualis eſt A Ξ ipſi A K, ut vero Ξ A ad A Π ita K A ad A H; ob ſimilitudinem triangulorum H K A, Ξ A Π: erit A H ipſi A Π æqualis, & reliqua H Ξ ipſi Π K. & quoniam anguli ad puncta Ξ, K inter ſe æquales ſunt, uterque enim ipſorum æqualis eſt angulo ad B; ſunt autem & qui ad O æquales, quia ad verticem: erit triangulum Ξ H O ſimile triangulo Π O K. & æqualis eſt H Ξ ipſi Π K: quare & Ξ O ipſi O K, & H O ipſi O Π, & tota H K toti Ξ Π eſt æqualis. ex quibus conſtat, ſi inter H, Ξ ſumatur punctum, ut P, & per P ducatur P Σ parallela H K; ipſam P Σ majorem eſſe quam H K, & propterea majorem quam Ξ Π. ſi vero inter puncta P, Ξ ſumatur punctum, ut T, & per ipſum ducatur T Υ parallela Ξ Π: minor erit T Υ quam Ξ Π; & ob id minor quam H K. & quoniam angulus Ξ Π K major eſt [per 16. 1.] angulo A Ξ Π; æqualis autem O Π K ipſi O H Ξ: erit O H Ξ angulus major angulo H Ξ O: ergo [per 19 1.] Ξ O major ipſa O H, & idcirco Ξ O major O Π. quod ſi quandoque contingat, ut altera ipſarum bifariam ſecetur, tunc altera in partes inæquales ſecabitur.



ἡ ΑΞ τῇ ΑΚ, ὡς δὲ ἡ ΞΑ πρὸς ΑΠ ἡ ΚΑ πρὸς ΑΗ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΗΚΑ, ΞΑΠ τριγώνων· ἡ ΑΗ ἄρα τῇ ΑΠ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ λοιπὴ ΗΞ τῇ ΠΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς ταῖς Ξ, Κ γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ Β, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Ο ἴσαι, κατὰ κορυφὴν γάρ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΞΗΟ τρίγωνον τῷ ΠΟΚ τριγώνῳ. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΞ τῇ ΠΚ· ὥστε καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΟΚ, καὶ ἡ ΗΟ τῇ ΟΠ, καὶ ὅλη ἡ ΗΚ τῇ ὅλῃ ΞΠ. καὶ φανερὸν ὅτι ἐὰν μεταξὺ τῶν Η, Ξ ληφθῇ τι σημεῖον, ὡς τὸ Ρ, καὶ διὰ τοῦ Ρ τῇ ΗΚ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΡΣ, μείζων ἔσται τῆς ΗΚ, καὶ διὰ τοῦτο καὶ τῆς ΞΠ. ἐὰν δὲ μεταξὺ τῶν Ρ, Ξ ληφθῇ τι σημεῖον ὡς τὸ Τ, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ ΞΠ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΤΥ, ἐλάττων ἔσται τῆς ΞΠ, καὶ τῆς ΗΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΞΠΚ γωνία μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΞΠ, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΟΠΚ τῇ ὑπὸ ΟΗΞ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΟΗΞ τῆς ὑπὸ ΗΞΟ· ἡ ΞΟ ἄρα τῆς ΟΗ μείζων, καὶ διὰ τοῦτο καὶ ἡ ΞΟ τῆς ΟΠ. ἐὰν δέ ποτε ἡ ἑτέρα αὐτῶν δίχα διαιρεθῇ, ἡ λοιπὴ εἰς ἄνισα τμηθήσεται.

Prop. VI. *Theor.*

Si conus plano per axem ſecetur; ſumatur autem aliquod punctum in ſuperficie coni, quod non ſit in latere trianguli per axem, & ab ipſo ducatur recta parallela cuidam rectæ, quæ perpendicularis eſt à circumferentia circuli ad trianguli baſim: triangulo per axem occurret, & ulterius producta, uſque ad alteram ſuperficiei partem, bifariam ab ipſo triangulo ſecabitur.

SIT conus, cujus vertex A punctum, baſis autem circulus B Γ, ſeceturque conus plano per axem, atque communem ſectionem faciat triangulum A B Γ, & ab aliquo puncto eorum quæ ſunt in B Γ circumferentia, ut ab M, ducatur M N perpendicularis ad ipſam B Γ; ſumatur vero in ſuperficie coni punctum Δ, quod non ſit in latere trianguli per axem, & per Δ ipſi M N parallela ducatur Δ E: dico Δ E productam occurrere plano trianguli A B Γ; & ulterius productam ad alteram partem coni, quouſque ejus ſuperficiei occurrat, à trianguli A B Γ plano bifariam ſecari.

Jungatur A Δ, & producatur; occurret [per 1. 1. huj.] circumferentiæ circuli B Γ. occurrat in K, & à puncto K ad B Γ perpendicularis ducatur K Θ Λ: parallela eſt igitur [per 28. 1.] K Θ ipſi M N; quare [per 9. 11.] & ipſi Δ E. ducatur ab A puncto ad Θ recta A Θ. itaque quoniam in triangulo A Θ K, ipſi Θ K parallela eſt Δ E: conveniet Δ E producta cum A Θ. eſt autem A Θ in plano trianguli A B Γ: ergo Δ E trianguli A B Γ plano occurret; ipſique A Θ rectæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ παράλληλος εὐθεῖά τινι, ἥ ἐστι κάθετος ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου· συμβαλεῖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου.

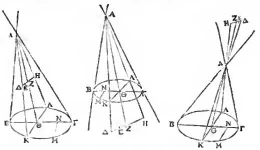
ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω κοινὴν τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς ΒΓ περιφερείας, τοῦ Μ, κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ΜΝ, εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου σημεῖόν τι τὸ Δ, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ δι' ἄξονος τριγώνου, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΜΝ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι ἡ ΔΕ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ προσεκβαλλομένη ἐπὶ τὸ ἕτερον μέρος τοῦ κώνου, ἄχρις ἂν συμπέσῃ τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται ἄρα τῇ περιφερείᾳ τοῦ ΒΓ κύκλου. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΚΘΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΜΝ, καὶ τῇ ΔΕ ἄρα. ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Θ ἡ ΑΘ. ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΘΚ, τῇ ΘΚ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ· ἡ ΔΕ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΘ. ἡ δὲ ΑΘ ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΔΕ τῷ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπιπέδῳ, καὶ τῇ ΑΘ εὐθείᾳ.

συμπιπτέτω

συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΖ ἐπ' εὐθείας ἄχρις ἂν συμπέσῃ τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Η· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ. ἐπεὶ γὰρ τὰ Α, Η, Λ σημεῖα ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐστὶν ἐπιφανείᾳ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΑΘ, ΑΚ, ΔΗ, ΚΛ ἐκβαλλομένῳ, ὅπερ διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τρίγωνόν ἐστι· τὰ Α, Η, Λ ἄρα σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐστι τομῆς τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας καὶ τοῦ τριγώνου· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Α, Η, Λ. ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΑΛΚ τῇ ΚΘΛ βάσει παράλληλος ἦκται ἡ ΔΗ, καὶ διῆκταί τις ἀπὸ τοῦ Α, ἡ ΑΖΘ· ἔστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΛ ἡ ΔΖ πρὸς ΖΗ. ἴση δὲ ἡ ΚΘ τῇ ΘΛ, ἐπείπερ ἐν κύκλῳ τῷ ΒΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν διάμετρον ἡ ΚΛ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ.

occurrat in Z, & producatur Δ Z in directum, quouſque ſuperficiei coni occurrat; occurrat in H: dico Δ Z ipſi Z H æqualem eſſe. quoniam enim puncta A, H, Λ ſunt & in ſuperficie coni, & in plano per A Θ, A K, Δ H, K Λ ducto, quod quidem [per 3. hujus] triangulum eſt, cum conum per verticem ſecet: erunt A, H, Λ in communi ſectione ſuperficiei coni & ipſius trianguli; ergo recta eſt quæ per A, H, Λ puncta tranſit. at cum in triangulo A Λ K, ipſi K Θ Λ baſi parallela ducta ſit Δ H, & à puncto A ducatur A Z Θ: erit * ut K Θ ad Θ Λ ita Δ Z ad Z H. æqualis autem eſt [per 3. 3.] K Θ ipſi Θ Λ, quia in circulo B Γ perpendicularis ad diametrum ducitur K Λ; ergo & Δ Z ipſi Z H æqualis erit.



EUTOCIUS.

Περιέχειν χρὴ, ὅτι οὐ μάτην πρόσκειται ἐν τῇ προτάσει, τὸ δεῖν ἀγομένην εὐθεῖαν ἀπὸ τοῦ τῆς ἐπιφανείας σημείου παράλληλον μιᾷ τινι τῶν ἐν τῇ βάσει εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς οὔσῃ πάντως τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἄγεσθαι. τούτου γὰρ μὴ ὄντος, οὐ δυνατόν ἐστιν αὐτὴν δίχα τέμνεσθαι ὑπὸ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ὅπερ ἐστὶ φανερὸν ἐκ τῆς ἐν τῷ ῥητῷ καταγραφῆς. εἰ γὰρ ἡ ΜΝ, ᾗ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖΗ, μὴ πρὸς ὀρθὰς εἴη τῇ ΒΓ, δῆλον ὅτι οὐδὲ δίχα τέμνεται ἡ ΚΛ. καὶ διὰ τῶν αὐτῶν λόγων συνάγεται ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΛ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΗ· καὶ ἡ ΔΗ ἄρα εἰς ἄνισα τμηθήσεται κατὰ τὸ Ζ. δυνατὸν δὲ κατωτέρω τοῦ κύκλου, καὶ ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν ἐπιφανείας τὰ αὐτὰ δείκνυσθαι.

Animadvertendum eſt, non fruſtra apponi in propoſitione, oportere rectam ductam à puncto ſuperficiei, parallelam eſſe cuivis rectæ quæ à circuli circumferentia perpendicularis eſt ad baſim trianguli per axem. niſi enim hoc ita ſit, fieri non poteſt ut recta à triangulo bifariam ſecetur; quod quidem ex deſcripta figura manifeſte apparet. nam ſi M N, cui parallela eſt Δ Z H, ad ipſam B Γ non ſit perpendicularis: neque K Λ bifariam ſecabitur. eadem enim ratione colligimus, ut K Θ ad Θ Λ ita eſſe Δ Z ad Z H: ergo & Δ H in partes inæquales ſecabitur ad punctum Z. poteſt autem illud idem, tum infra circulum, tum in ſuperficie, quæ eſt ad verticem, ſimiliter demonſtrari.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστιν ἡ βάσις τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν, ἤτοι τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ· αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆς γενηθείσης τομῆς ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ, ἣν ἐποίησε τὸ τέμνον ἐπίπεδον, παράλληλοι τῇ

Prop. VII. *Theor.*

Si conus plano per axem ſecetur, ſecetur autem & altero plano ſecante planum baſis coni ſecundum rectam lineam quæ ſit perpendicularis, vel ad baſim trianguli per axem, vel ad eam quæ in directum ipſi conſtituitur: rectæ quæ à ſectione in ſuperficie coni à plano facta ducuntur, paral-

* Nam (per 4.6.) K Θ eſt ad Δ Z ut A Θ ad A Z; & Θ Λ eſt ad Z H etiam ut A Θ ad A Z: quare (per 11.5.) K Θ eſt ad Δ Z ut Θ Λ ad Z H; unde (per 16.5.) K Θ eſt ad Θ Λ ut Δ Z ad Z H.

Digitized by Google

lelæ ei quæ eſt perpendicularis ad trianguli baſim, in communem ſectionem plani ſecantis & trianguli per axem cadent; & ulterins prodnductæ ad alteram ſectionis partem ab ea bifariam ſecabuntur. & ſiquidem rectus ſit conus; recta quæ eſt in baſi perpendicularis erit ad communem ſectionem plani ſecantis & trianguli per axem: ſi vero ſcalenus; non ſemper, niſi cum planum, quod per axem ducitur, ad baſim coni rectum fuerit.

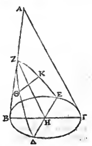
πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ τριγώνου εὐθείᾳ, ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν πεσοῦνται τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ προσεκβαλλόμεναι ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσονται ὑπ' αὐτῆς. καὶ ἐὰν μὲν ὀρθὸς ᾖ ὁ κῶνος, ἡ ἐν τῇ βάσει εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου· ἐὰν δὲ σκαληνὸς, οὐκ ἀεὶ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, ἀλλ' ὅταν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ κώνου.

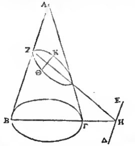
SIT conus, cujus vertex punctum A, baſis B Γ circulus, & ſecetur plano per axem, atque ſectionem faciat triangulum A B Γ, ſecetur autem & altero plano ſecante planum in quo eſt circulus B Γ ſecundum rectam Δ E, vel perpendicularem ad B Γ, vel ad eam quæ in directum ipſi conſtituitur, & faciat ſectionem in ſuperficie coni, lineam Δ Z E; communis autem ſectio plani ſecantis & trianguli A B Γ ſit Z H, & ſumatur in ſectione Δ Z E punctum quodvis Θ, à quo Θ K ipſi Δ E parallela ducatur: dico Θ K ipſi Z H occurrere, & ulterius productam ad alteram partem ſectionis Δ Z E, à recta Z H bifariam ſecari.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ B Γ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ A B Γ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ὁ B Γ κύκλος κατ' εὐθεῖαν τὴν Δ E, ἤτοι πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ B Γ, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ. καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν Δ Z E, κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ A B Γ τριγώνου ἡ Z H. καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Δ Z E τομῆς τὸ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ τῇ Δ E παράλληλος ἡ Θ K· λέγω ὅτι ἡ Θ K συμβαλεῖ τῇ Z H, καὶ ἐκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς Δ Z E τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς Z H εὐθείας.

Quoniam enim conus, cujus vertex A punctum, & baſis circulus B Γ, plano per axem ſecatur, atque ſectionem facit A B Γ triangulum; ſumitur autem in ſuperficie punctum Θ quod non eſt in latere trianguli A B Γ, eſtque Δ H ad B Γ perpendicularis: ducta ergo per Θ recta Θ K ipſi Δ H parallela, triangulo A B Γ [per 6. huj.]

Ἐπεὶ γὰρ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ B Γ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸ A B Γ τρίγωνον, εἴληπται δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ πλευρᾶς τοῦ A B Γ τριγώνου, τὸ Θ, καὶ ἔστι κάθετος ἡ Δ H ἐπὶ τὴν B Γ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Θ τῇ Δ H παράλληλος ἀγομένη, τουτέστιν ἡ Θ K, συμβαλεῖ τῷ A B Γ τριγώνῳ,





occurret; & ulterius producta ad alteram partem ſuperficiei, à triangulo bifariam ſecabitur. quoniam igitur, quæ per Θ ducitur parallela ipſi Δ E, occurrit triangulo A B Γ; atque eſt in plano ſectionis Δ Z E: in communem ſectionem plani ſecantis & trianguli A B Γ cadet. ſed Z H eſt communis ſectio plano-

καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν ἡ διὰ τοῦ Θ τῇ Δ E παράλληλος ἀγομένη συμβάλλει τῷ A B Γ τριγώνῳ, καὶ ἔστιν ἐν τῷ διὰ τῆς Δ Z E τομῆς ἐπιπέδῳ· ἐπὶ τὴν κοινὴν ἄρα τομὴν πεσεῖται τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ A B Γ τριγώνου. κοινὴ δὲ τομή ἐστι τῶν ἐπιπέδων

πέδου ἡ ΖΗ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΕ παράλληλος ἀγομένη πεσεῖται ἐπὶ τὴν ΖΗ, καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ΔΖΕ τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΖΗ εὐθείας.

Ἤτοι δὴ ὁ κῶνος ὀρθός ἐστιν, ἢ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον, ἢ οὐδέτερον.

Ἔστω πρότερον ὁ κῶνος ὀρθός· εἴη ἂν οὖν καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὀρθὸν πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον. καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδον τὸ ΑΒΓ πρὸς ἐπίπεδον τὸ ΒΓ ὀρθόν ἐστι, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΒΓ ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΔΕ· ἡ ΔΕ ἄρα τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ὀρθή ἐστιν· ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΖΗ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς.

Μὴ ἔστω δὴ ὁ κῶνος ὀρθός. εἰ μὲν οὖν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον, ὁμοίως δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς.

Μὴ ἔστω δὴ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀρθὸν πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον· λέγω ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. ἔστι δὴ καὶ τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθάς· ἡ ἄρα ΔΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΒΓ, ΖΗ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΖΗ ἐπιπέδῳ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι. τὸ δὲ διὰ τῶν ΒΓ, ΗΖ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ΑΒΓ· καὶ ἡ ΔΕ ἄρα τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· καὶ πάντα ἄρα τὰ δι᾽ αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἓν δέ τι τῶν διὰ τῆς ΔΕ ἐπιπέδων ἐστὶν ὁ ΒΓ κύκλος· ὁ ΒΓ ἄρα κύκλος πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὀρθὸν ἔσται πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι τῆς ΔΖΕ τομῆς διάμετρός ἐστιν ἡ ΖΗ, ἐπείπερ τὰς ἀγομένας παραλλήλους εὐθείας τινὶ τῇ ΔΕ δίχα τέμνει· καὶ ὅτι δυνατόν ἐστιν ὑπὸ τῆς διαμέτρου τῆς ΖΗ παραλλήλους τινὰς δίχα τέμνεσθαι, καὶ μὴ πρὸς ὀρθάς.

rum: ergo per Θ ducta ipſi ΔE parallela cadit in ZH; & ulterius producta ad alteram ſectionis ΔZE partem, ab ipſa ZH bifariam ſecabitur.

Itaque vel conus eſt rectus, vel triangulum ABΓ, quod per axem tranſit, rectum eſt ad BΓ circulum, vel neutrum horum contingit.

Sit primum conus rectus: tunc & ABΓ triangulum [per 18. 11.] ad circulum BΓ rectum erit. & quoniam planum ABΓ rectum eſt ad planum BΓ, & ad communem ipſorum ſectionem, videlicet ad rectam BΓ, in ipſo BΓ plano perpendicularis ducta eſt ΔE: erit [per conv. 38. 11.] ΔE & ad triangulum ABΓ perpendicularis; & [per 3. def. 11.] ad omnes rectas, quæ in triangulo ABΓ exiſtentes ipſam contingunt: quare & ad ipſam ZH.

Sed non ſit conus rectus. ſi igitur triangulum per axem rectum eſt ad circulum BΓ; ſimiliter oſtendemus ΔE ad ZH perpendicularem eſſe.

Quod ſi triangulum per axem ABΓ non ſit rectum ad circulum BΓ: dico non eſſe ΔE ad ZH perpendicularem. ſit enim, ſi fieri poteſt. eſt autem & perpendicularis ad BΓ; ergo ΔE ad utramque rectam BΓ, ZH perpendicularis erit: & idcirco [per 4. 11.] ad planum, quod per ipſas BΓ, ZH ducitur. ſed planum per BΓ, ZH eſt ABΓ triangulum: recta igitur ΔE ad triangulum ABΓ eſt perpendicularis. quare [per 18. 11.] & omnia, quæ per ipſam tranſeunt, plana ad ABΓ triangulum recta ſunt. planum vero, in quo eſt circulus BΓ, eſt unum ex iis quæ per ΔE tranſeunt: ergo circulus BΓ rectus eſt ad triangulum ABΓ; ac propterea triangulum ABΓ ad BΓ circulum rectum erit, contra hypotheſin. non eſt igitur ΔE ad ZH normalis.

Corollarium.

Hinc vero conſtat [per 10. def. huj.] rectam ZH diametrum eſſe ſectionis ΔZE; cum rectas omnes, quæ in ipſa ducuntur, uni cuidam parallelas bifariam ſecet. conſtat præterea fieri poſſe, ut rectæ parallelæ à diametro ZH bifariam quidem, non autem ad rectos angulos ſecentur.

EUTOCIUS.

Τὸ ἕβδομον θεώρημα πτώσεις ἔχει τέσσαρας· ἢ γὰρ οὐ συμβάλλει ἡ ΖΗ τῇ ΑΓ, ἢ συμβάλλει τριχῶς, ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἢ ἐντός, ἢ ἐπὶ τοῦ Γ σημείου.

Septimum theorema quatuor caſus habet: vel enim ZH non occurrit AΓ; vel tribus modis occurrit, aut extra circulum, aut intra, aut in ipſo Γ puncto.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾽ εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἡ δὲ διάμετρος τῆς γινομένης ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομῆς ἤτοι παράλληλος ᾖ μιᾷ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν, ἢ συμπίπτῃ αὐτῇ ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, προσεκβάλληται δὲ ἥτε τοῦ κώνου

Prop. VIII. *Theor.*

Si conus plano ſecetur per axem, & ſecetur altero plano ſecante baſim coni ſecundum rectam lineam quæ ad baſim trianguli per axem ſit perpendicularis; diameter autem ſectionis factæ in ſuperficie, vel ſit parallela uni laterum trianguli, vel cum ipſo extra coni verticem conveniat, & producantur in infinitum tum ſuperficies

perficies coni, tum planum ſecans: ſectio quoque ipſa in infinitum augebitur; & ex diametro ſectionis ad verticem cuilibet rectæ datæ æqualem abſcindet recta, quæ quidem à coni ſectione ei quæ eſt in baſi parallela ducta fuerit.

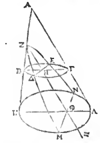
ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἰς ἄπειρον, καὶ ἡ τομὴ εἰς ἄπειρον αὐξηθήσεται, καὶ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τῇ κορυφῇ πάσῃ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην ἀπολήψεταί τις εὐθεῖα ἀγομένη ἀπὸ τῆς τοῦ κώνου τομῆς παρὰ τὴν ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου εὐθεῖαν.

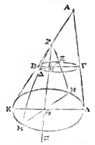
SIT conus, cujus vertex Α punctum, baſis circulus ΒΓ, & ſecetur plano per axem, atque ſectionem faciat triangulum ΑΒΓ; ſecetur etiam & altero plano ſecante ΒΓ circulum ſecundum rectam ΔΕ perpendicularem ad ipſam ΒΓ, & faciat ſectionem in ſuperficie lineam ΔΖΕ; diameter autem ſectionis ΔΖΕ ſit ΖΗ, quæ vel ipſi ΑΓ parallela ſit, vel producta extra punctum Α cum ipſa conveniat: dico ſectionem ΔΖΕ augeri in infinitum, ſi & coni ſuperficies & ſecans planum in infinitum producantur.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸν ΒΓ κύκλον κατ' εὐθεῖαν τὴν ΔΕ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΖΕ γραμμήν. ἡ δὲ διάμετρος τῆς ΔΖΕ τομῆς ἡ ΖΗ, ἤτοι παράλληλος ἔστω τῇ ΑΓ, ἢ ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω αὐτῇ ἐκτὸς τοῦ Α σημείου· λέγω ὅτι καὶ ἐὰν ἥτε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐκβάλληται εἰς ἄπειρον, καὶ ἡ ΔΖΕ τομὴ εἰς ἄπειρον αὐξηθήσεται.

Producatur enim tam ſuperficies conica quam ſecans planum; patet quod ſimul producentur & rectæ ΑΒ, ΑΓ, ΖΗ. & quoniam ΖΗ vel parallela eſt ipſi ΑΓ, vel producta, extra punctum Α cum ipſa convenit; lineæ ΖΗ, ΑΓ ad partes Η, Γ productæ nunquam convenient inter ſeſe. producantur ergo, ſumaturque in ΖΗ quodlibet punctum Θ, & per Θ ducatur ΚΘΛ ipſi ΒΓ parallela, ipſi vero ΔΕ parallela

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἥτε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον· φανερὸν δὴ ὅτι καὶ αἱ ΑΒ, ΑΓ, ΖΗ συνεκβληθήσονται. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ τῇ ΑΓ ἤτοι παράλληλός ἐστιν, ἢ ἐκβαλλομένη συμπίπτει αὐτῇ ἐκτὸς τοῦ Α σημείου· αἱ ΖΗ, ΑΓ ἄρα ἐκβαλλόμεναι ὡς ἐπὶ τὰ Γ,Η μέρη οὐδέποτε συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν οὖν, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΖΗ τυχὸν, τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ μὲν ΒΓ παράλληλος ἤχθω





ducatur ΜΘΝ: quare [per 15. 11.] planum, quod per ΚΛ, ΜΝ tranſit, parallelum eſt plano per ΒΓ, ΔΕ: & idcirco [per 4. huj.] ΚΛΜΝ planum circulus eſt. & quoniam puncta Δ, Ε, Μ, Ν ſunt & in plano ſecante, & in ſuperficie coni: ergo & in ipſa communi ſectione erunt: ſectio igitur ΔΖΕ aucta eſt uſque ad puncta Μ, Ν. igitur ſi tum coni ſuperficies, tum ſecans planum producantur ad ΚΛΜΝ circulum; & ſectio ipſa ΔΖΕ uſque ad Μ, Ν puncta augebitur. Eadem ratione demonſtrabitur ſectionem ΜΔΖΕΝ augeri in infinitum, ſi & ſuperficies coni & planum ſecans in infinitum producantur. per-

ἡ ΚΘΛ, τῇ δὲ ΔΕ παράλληλος ἡ ΜΘΝ· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ· κύκλος ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛΜΝ ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ τὰ Δ,Ε,Μ,Ν σημεῖα ἐν τῷ τέμνοντί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου· ἐπὶ τῆς κοινῆς ἄρα τομῆς ἐστιν· ηὔξηται ἄρα ἡ ΔΖΕ μέχρι τῶν Μ,Ν σημείων. αὐξηθείσης ἄρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου μέχρι τοῦ ΚΛΜΝ κύκλου, ηὔξηται καὶ ἡ ΔΖΕ τομὴ μέχρι τῶν Μ, Ν σημείων. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἐὰν εἰς ἄπειρον ἐκβάλληται ἥτε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια, καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, καὶ ἡ ΜΔΖΕΝ τομὴ εἰς ἄπειρον αὐξηθήσεται. καὶ

φανερὸν

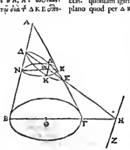
φανερὸν ὅτι πάσῃ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην ἀπολήψεταί τις τῇ ΜΝ παράλληλος ἀπὸ τῆς ΖΘ εὐθείας πρὸς τῷ Ζ σημείῳ. ἐὰν γὰρ τῇ δοθείσῃ ἴσην θέντες τὴν ΖΞ, καὶ διὰ τοῦ Ξ τῇ ΔΕ παράλληλον ἀγάγωμεν, συμπεσεῖται τῇ τομῇ, ὥσπερ καὶ ἡ διὰ τοῦ Θ ἀπεδείχθη συμπίπτουσα τῇ τομῇ κατὰ τὰ Μ, Ν σημεῖα· ὥστε ἄγεταί τις εὐθεῖα συμπίπτουσα τῇ τομῇ, παράλληλος οὖσα τῇ ΜΝ, ἀπολαμβάνουσα ἀπὸ τῆς ΖΗ εὐθείας ἴσην τῇ δοθείσῃ πρὸς τῷ Ζ σημείῳ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ, συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παρὰ τὴν βάσιν ἠγμένῳ, μήτε ὑπεναντίως· ἡ τομὴ οὐκ ἔσται κύκλος.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ, μήτε παραλλήλῳ ὄντι τῇ βάσει, μήτε ὑπεναντίως, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΚΕ γραμμήν· λέγω ὅτι ἡ ΔΚΕ γραμμὴ οὐκ ἔσται κύκλος.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω, καὶ συμπιπτέτω τὸ τέμνον ἐπίπεδον τῇ βάσει, καὶ ἔστω τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ ἡ ΖΗ, τὸ δὲ κέντρον τοῦ ΒΓ κύκλου ἔστω τὸ Θ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν ΖΗ ἡ ΘΗ, καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῆς ΗΘ καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον, καὶ ποιείτω τομὰς ἐν τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τὰς ΒΑ, ΑΓ εὐθείας. ἐπεὶ οὖν τὰ Δ, Ε, Η σημεῖα ἔν τε τῷ διὰ τῆς ΔΚΕ ἐπιπέδῳ ἐστὶν, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ διὰ τῶν Α, Β, Γ· τὰ ἄρα Δ, Ε, Η σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ἐστίν· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΕΔ. εἰλήφθω δή τι ἐπὶ τῆς ΔΚΕ γραμμῆς σημεῖον τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΖΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΜΛ. ἴση δὴ ἔσται ἡ ΚΜ τῇ ΜΛ· ἡ ἄρα ΔΕ διάμετρός ἐστι τοῦ ΔΚΕΛ κύκλου. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Μ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΝΜΞ. ἔστι δὴ καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΖΗ παράλληλος· ὥστε τὸ διὰ τῶν Ν, Ξ, Κ, Μ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΖΗ, τουτέστι τῇ βάσει, καὶ ἔσται ἡ τομὴ κύκλος. ἔστω ΝΚΞΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ τῇ ΒΗ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΝΞ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΝΜΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΜ. ἔστι δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΜΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΜ, κύκλος γὰρ ὑπόκειται ἡ ΔΚΕΛ γραμμὴ, καὶ διάμετρος αὐτῆς ἡ ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΝΜΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΜΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΝΜ πρὸς ΜΔ οὕτως ἡ ΕΜ πρὸς ΜΞ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΜΝ τρίγωνον τῷ ΞΜΕ τριγώνῳ, καὶ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ γωνία ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ ΜΕΞ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση, παράλληλος γὰρ ἡ ΝΞ τῇ ΒΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα



ſpicuum igitur eſt cuilibet datæ rectæ æqualem abſcindere rectam ipſi MN parallelam ex ipſa ZΘ ad punctum Z. ſi enim datæ rectæ æqualem ponamus ZΞ, & per Ξ ipſi ΔE parallelam ducamus; conveniet ea cum ſectione, quemadmodum & quæ per Θ demonſtrata eſt cum eadem ad puncta M, N convenire: quare poterit recta quædam duci parallela ipſi MN, quæ cum ſectione conveniat, & ex ipſa ZH ad punctum Z rectæ datæ æqualem abſcindat.

Prop. IX. *Theor.*

Si conus plano ſecetur conveniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque baſi æquidiſtet, neque ſubcontrarie ponatur; ſectio circulus non erit.

SIT conus, cujus vertex A punctum, baſis circulus BΓ, & ſecetur plano aliquo, neque baſi æquidiſtante, neque ſubcontrarie poſito, atque ſectionem faciat in ſuperficie lineam ΔKE: dico ΔKE non eſſe circulum.

Sit enim, ſi fieri poteſt, occurratque planum ſecans ipſi baſi, & communis planorum ſectio ſit recta ZH, centrum autem circuli BΓ ſit Θ, & ab ipſo ad ZH perpendicularis ducatur ΘH, deinde per ΘH & axem producatur planum, atque in conica ſuperficie ſectiones faciat BA, AΓ rectas. quoniam igitur puncta Δ, E, H ſunt & in plano quod per ΔKE tranſit, & in eo quod per A,B,Γ; puncta igitur Δ,E,H in communi planorum ſectione erunt: quare [per 3. 11.] HEΔ recta eſt. ſumatur in linea ΔKE punctum aliquod K, & per K rectæ ZH parallela ducatur KMΛ. eſtque [per 6. huj.] KM ipſi MΛ æqualis: quare [per conv. 3. 3.] ΔE diameter eſt circuli ΔKEΛ. ducatur deinde per M recta NMΞ ipſi BΓ parallela, eſt autem & KΛ parallela ZH: ergo [per 15. 11.] planum quod per N, Ξ, K, M ducitur, æquidiſtans eſt plano per BΓ, ZH, hoc eſt ipſi baſi; adeoque [per 4. huj.] ſectio circulus eſt. ſit NKΞΛ. & quoniam ZH perpendicularis eſt ad BΓH; ſequitur [per 10. 11.] & KM ad NΞ perpendicularem eſſe: quare [per 35. 3.] rectangulum NMΞ æquale eſt quadrato ex KM. ſed & rectangulum ΔME æquale eſt quadrato ex KM; nam linea ΔKEΛ circulus ponitur cujus diameter ΔE: rectangulum igitur NMΞ æquale eſt rectangulo ΔME: & idcirco [per 16. 6.] ut NM ad MΔ ita EM ad MΞ: quare [per 6. 6.] ΔMN triangulum ſimile eſt triangulo ΞME; & angulus ΔNM æqualis MEΞ angulo. ſed angulus ΔNM angulo ABΓ eſt æqualis; parallela enim eſt NΞ ipſi BΓ: ergo & angulus ABΓ

æqualis

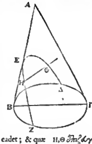
æqualis erit angulo ΜΕΞ: ſectio igitur eſt ſubcontraria [per def. in 5. huj.]; contra hypotheſin. igitur linea ΔΚΕ non eſt circulus.

ἴση ἔσται τῇ ὑπὸ ΜΕΞ· ὑπεναντία ἄρα ἐστὶν ἡ τομή, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα κύκλος ἐστὶν ἡ ΔΚΕ γραμμή.

Prop. X. *Theor.*

Si in coni ſectione duo puncta ſumantur: recta linea, quæ ejuſmodi puncta conjungit, intra ſectionem cadet; & quæ in directum ipſi conſtituitur, cadet extra.

SIT conus, cujus vertex punctum Α, baſis ΒΓ circulus, ſeceturque plano per axem, & faciat ſectionem triangulum ΑΒΓ, ſecetur autem & altero plano, atque in ſuperficie coni ſectionem faciat ΔΕΖ lineam, & in ipſa ΔΕΖ duo puncta ſumantur, quæ ſint Η, Θ: dico rectam quæ Η, Θ puncta conjungit, intra ſectionem ΔΕΖ cadere; & quæ in directum ipſi conſtituitur, extra.



Quoniam enim conus, cujus vertex Α punctum, & baſis circulus ΒΓ, plano ſecatur per axem, & in ipſius ſuperficie puncta quædam ſumuntur Η, Θ, quæ non ſunt in latere trianguli per axem: recta, quæ à puncto Η ad Θ ducitur, non tendet ad Α: ergo [per 2. huj.] recta conjungens puncta Η, Θ intra conum, adeoque intra coni ſectionem ΔΖΕ cadet; & quæ in directum ipſi conſtituitur, cadet extra.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Ἐὰν ἐπὶ κώνου τομῆς ληφθῇ δύο σημεῖα· ἡ μὲν ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς, ἡ δὲ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἐκτός.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΕΖ γραμμήν, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΔΕΖ δύο σημεῖα τὰ Η, Θ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ἐπὶ τὰ Η, Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς ΔΕΖ γραμμῆς, ἡ δὲ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἐκτός.

Ἐπεὶ γὰρ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, εἴληπται δή τινα σημεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τὰ Η, Θ, ἃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα μὴ νεύει ἐπὶ τὸ Α· ἡ ἄρα ἐπὶ τὰ Η, Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κώνου, καὶ ἡ ἐπ' εὐθείας, ἐκτός, ὥστε καὶ τῆς ΔΖΕ τομῆς.

EUTOCIUS.

Animadvertendum eſt decem hæc theoremata aptiſſime cohærentia inter ſeſe & continuata eſſe. primum autem oſtendit rectas lineas, quæ in ſuperficie coni ad verticem tendunt, in eadem permanere. ſecundum converſum oſtendit. tertium explicat coni ſectionem quæ per verticem efficitur. quartum ſectionem baſi æquidiſtantem. quintum vero ſubcontrariam. ſextum eſt tanquam lemma ad ſeptimum, in illo oſtenditur oportere communem ſectionem plani ſecantis, & circuli qui eſt baſis coni, ad ejus diametrum perpendicularem eſſe; atque, hoc ita habente, rectas omnes, quæ ipſi parallelæ ducuntur, à triangulo biſariam ſecari. ſeptimum tres alias ſectiones earumque diametrum oſtendit, & rectas quæ ad ipſam diametrum ordinatim applicantur, ei quæ in baſi parallelas eſſe. in octavo demonſtrat quod nos in principio diximus, videlicet parabolen & hyperbolen ex eorum numero eſſe quæ in infinitum augentur. in nono oſtendit ellipſim, quæ in ſeipſam vergit ut circulus, quia planum ſecans cum utroque latere trianguli convenit, circulum non eſſe; ſubcontraria etenim aut parallela ſectio circulum facit. ſed & illud ſcire oportet, diametrum ſectionis in parabola quidem unum duntaxat trianguli latus ſecare & ipſam baſim: in hyperbola, ſecare & latus & rectam, quæ reliquo lateri ad partes verticis producto in rectum conſtituitur: in ellipſi vero, & utrumque latus & baſim ſecare. poſſet fortaſſe quiſpiam arbitrari decimum theorema idem eſſe quod ſecundum. ſed res non ita ſe habet: illic enim in tota ſuperficie duo quævis puncta ſumi aſſerit; hic in ea tantum linea quæ à ſecante plano efficitur. at in tribus quæ deinceps ſequuntur theorematibus unamquamque ſectionem diligentius expendit, & principes earum proprietates declarat.

Χρὴ ἐπιστῆσαι, ὅτι τὰ δέκα ταῦτα θεωρήματα ἀλλήλων ἔχεται. ἀλλὰ τὸ πρῶτον ἔχει ὅτι αἱ εὐθεῖαι ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ νεύουσαι ἐπὶ τὴν κορυφὴν ἐν ταύτῃ μένουσι. τὸ δὲ δεύτερον τὸ ἀνάπαλιν. τὸ δὲ τρίτον ἔχει τὴν διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τομήν. τὸ δὲ τέταρτον τὴν παράλληλον τῇ βάσει. τὸ πέμπτον τὴν ὑπεναντίαν. τὸ ἕκτον ὥσπερ προλαμβάνεται τοῦ ἑβδόμου, δεικνύον ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς ὀφείλει πάντως εἶναι τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου ἡ κοινὴ τομὴ αὐτοῦ καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ ὅτι τούτου οὕτως ἔχοντος, αἱ παράλληλοι αὐτῇ δίχα τέμνονται ὑπὸ τοῦ τριγώνου. τὸ δὲ ἕβδομον τὰς ἄλλας τρεῖς τομὰς ἔδειξε, καὶ τὴν διάμετρον, καὶ τὰς ἐπ' αὐτὴν καταγομένας παραλλήλους τῇ ἐν τῇ βάσει εὐθείᾳ. ἐν δὲ τῷ ὀγδόῳ δείκνυσιν, ὅπερ ἐν τοῖς προλεγομένοις εἴπομεν, ὅτι ἡ παραβολὴ καὶ ἡ ὑπερβολὴ τῶν εἰς ἄπειρόν εἰσιν αὐξομένων. ἐν δὲ τῷ ἐνάτῳ, ὅτι ἡ ἔλλειψις, συννεύουσα εἰς ἑαυτὴν ὁμοίως τῷ κύκλῳ, διὰ τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμπίπτειν ἀμφοτέραις ταῖς πλευραῖς τοῦ τριγώνου, οὐκ ἔστι κύκλος· κύκλον γὰρ ἐποίει ἥ τε ὑπεναντία τομὴ καὶ ἡ παράλληλος. καὶ δεῖ ἐπιστῆσαι ὅτι ἡ διάμετρος τῆς τομῆς, ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς, τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου τέμνει καὶ τὴν βάσιν· ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς, τήν τε πλευρὰν καὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ λοιπῇ πλευρᾷ ἐκβαλλομένην πρὸς τῇ κορυφῇ· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως, καὶ ἑκατέραν τῶν πλευρῶν καὶ τὴν βάσιν. τὸ δὲ δέκατον ἁπλούστερον μέν τις ἐπιβάλλων ἴσως ἂν οἰηθείη ταὐτὸν εἶναι τῷ δευτέρῳ. τοῦτο δὲ οὐχ ὡς ἔχει· ἐκεῖ μὲν γὰρ ἐπὶ πάσης τῆς ἐπιφανείας ἔλεγε λαμβάνεσθαι τὰ δύο σημεῖα, ἐνταῦθα δὲ ἐπὶ τῆς γενομένης γραμμῆς. ἐν δὲ τοῖς ἑξῆς τρισὶν ἀκριβέστερον ἑκάστην τῶν τομῶν τούτων διακρίνει, μετὰ τοῦ λέγειν καὶ τὰ ἰδιώματα αὐτῶν τὰ ἀρχικά.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιαʹ.

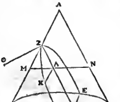
Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾽ εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἔτι δὲ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς παράλληλος ᾖ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου, μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, καὶ ἄλλης τινὸς εὐθείας ἣ λόγον ἔχει πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τοῦ κώνου γωνίας καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν. καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ΠΑΡΑΒΟΛΗ.

Prop. XI. *Theor.*

Si conus plano per axem ſecetur, ſecetur autem & altero plano ſecante baſin coni ſecundum rectam lineam, quæ ad baſim trianguli per axem eſt perpendicularis, & ſit diameter ſectionis uni laterum trianguli per axem parallela: recta linea, quæ à ſectione coni ducitur parallela communi ſectioni plani ſecantis & baſis coni, uſque ad ſectionis diametrum, poterit ſpatium æquale contento ſub ea, quæ ex diametro abſciſſa inter ipſam & verticem ſectionis interjicitur, & alia quadam, quæ ad rectam, inter coni angulum & verticem ſectionis interjectam, habet eam rationem, quam quadratum baſis trianguli per axem ad id quod ſub reliquis duobus trianguli lateribus continetur. dicatur autem hujuſmodi ſectio PARABOLA.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ τὸ Α σημεῖον κορυφή, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΔΕ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΖΕ, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΖΗ παράλληλος ἔστω μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου τῇ ΑΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΖΗ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΘ, [a] καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΑ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΛ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Λ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΜΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΔΕ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον κύκλος ἐστίν, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ. καί ἐστι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΝ ἡ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὴν ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΜΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, [b] τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ, καὶ ἡ ΒΓ πρὸς ΒΑ· ὁ ἄρα τῆς ΘΖ



SIT conus, cujus vertex punctum Α, baſis ΒΓ circulus, ſeceturque plano per axem, atque ſectionem faciat triangulum ΑΒΓ, & ſecetur altero plano ſecante baſim coni ſecundum rectam lineam ΔΕ, quæ ad ΒΓ eſt perpendicularis, & faciat ſectionem in ſuperficie coni ΔΖΕ lineam; diameter autem ſectionis ΖΗ parallela ſit uni laterum trianguli per axem, videlicet ipſi ΑΓ, atque à puncto Ζ rectæ ΖΗ ad rectos angulos ducatur ΖΘ, [a] & fiat ut quadratum ex ΒΓ ad rectangulum ΒΑΓ ita ΖΘ ad ΖΑ, ſumatur præterea in ſectione quodlibet punctum Κ, & per Κ ducatur ΚΛ ipſi ΔΕ parallela, uſque ad ſectionis diametrum: dico quadratum ex ΚΛ rectangulo ΘΖΛ æquale eſſe.

Ducatur enim per Λ ipſi ΒΓ parallela ΜΝ. eſt vero ΚΛ parallela ipſi ΔΕ: ergo [per 15.11.] planum, quod tranſit per ΚΛ, ΜΝ, plano per ΒΓ, ΔΕ, hoc eſt ipſi baſi coni, æquidiſtat: ideoque [per 4.huj.] planum per ΚΛ, ΜΝ eſt circulus, cujus diameter ΜΝ. eſt autem [per 10. 11.] ΚΛ ad ΜΝ perpendicularis, quia & ΔΕ ad ΒΓ: rectangulum igitur ΜΛΝ [per 35. 3.] æquale eſt quadrato ex ΚΛ. & quoniam [ex hyp.] ΘΖ ad ΖΑ eſt ut quadratum ex ΒΓ ad rectangulum ΒΑΓ; [b] quadratum autem ex ΒΓ ad ΒΑΓ rectangulum [per 23.6.] rationem habet compoſitam ex ratione quam ΒΓ habet ad ΓΑ, & ex ea quam ΒΓ habet ad ΒΑ: ratio igitur ΘΖ ad

ad ZΛ componitur ex rationibus BΓ ad ΓΛ, & ΓB ad BA. ut autem BΓ ad ΓΛ ita [per 4. 6.] MN ad NΛ, hoc eſt MΛ ad ΛZ; & ut BΓ ad BA ita MN ad MΛ, hoc eſt ΛM ad MZ, & [per 19. 5.] reliqua NΛ ad ZΛ: ratio igitur ΘZ ad ZΛ componitur ex rationibus MΛ ad ΛZ, & NΛ ad ZΛ. ſed ratio compoſita ex rationibus MΛ ad ΛZ, & ΛN ad ZΛ eſt [per 23. 6.] ea quam habet MΛN rectangulum ad rectangulum ΛZΛ: ergo ut ΘZ ad ZΛ ita rectangulum MΛN ad ΛZΛ rectangulum. ut autem ΘZ ad ZΛ (ſumptâ ZΛ communi altitudine) ita [per 1. 6.] ΘZΛ rectangulum ad rectangulum ΛZΛ: ut igitur rectangulum MΛN ad ipſum ΛZΛ ita rectangulum ΘZΛ ad idem ΛZΛ: & idcirco [per 9. 5.] æquale eſt rectangulum MΛN rectangulo ΘZΛ. ſed [ex modo oſtenſis] rectangulum MΛN æquale eſt quadrato ex KΛ: ergo quadratum ex KΛ rectangulo ΘZΛ æquale eſt.

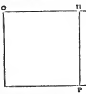
Vocetur autem hujuſmodi ſectio *Parabola*: & recta ΘZ, *Ea juxta quam poſſunt quæ ad ZH diametrum ordinatim applicantur*: hæc etiam *Latus Rectum* appelletur.

πρὸς ΖΛ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΓ πρὸς ΓΛ, καὶ τοῦ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΛ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΝΛ, τουτέστιν ἡ ΜΛ πρὸς ΛΖ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΜΛ, τουτέστιν ἡ ΛΜ πρὸς ΜΖ, καὶ λοιπὴ ἡ ΝΛ πρὸς ΖΛ· ὁ ἄρα τῆς ΘΖ πρὸς ΖΛ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΜΛ πρὸς ΛΖ, καὶ τοῦ τῆς ΝΛ πρὸς ΖΛ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἐκ τε τοῦ τῆς ΜΛ πρὸς ΛΖ, καὶ τοῦ τῆς ΛΝ πρὸς ΖΛ, ὁ τοῦ ὑπὸ ΜΛΝ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΛ· ὡς ἄρα ἡ ΘΖ πρὸς ΖΛ οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΛ. ὡς δὲ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΛ (τῆς ΖΛ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης) οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΛ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΛ οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΖΛ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸ ὑπὸ ΛΖΛ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΜΛΝ τῷ ὑπὸ ΘΖΛ. τὸ δὲ ὑπὸ ΜΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΛ.

Καλείσθω μὲν ἡ τοιαύτη τομὴ Παραβολή· ἡ δὲ ΘΖ, ἡ παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΖΗ διάμετρον· καλείσθω δὲ καὶ ἡ αὐτὴ Ὀρθία*.

EUTOCIUS.

[a] Et fiat ut quadratum ex BΓ ad rectangulum BΛΓ ita ZΘ ad ZΛ.] Certum quidem eſt quod dicitur. ſed, ſiquis hoc plenius adhuc declarare velit, ſit rectangulo BΛΓ æquale rectangulum OΠP; quadrato autem ex BΓ æquale id quod ad ΠP adjacens latitudinem habet ΠΣ, & fiat ut OΠ ad ΠΣ ita ΛZ ad ΘZ: ergo factum jam erit quod quærebamus. quoniam enim ut OΠ ad ΠΣ ita ΛZ ad ZΘ: erit & invertendo ut ΣΠ ad ΠO ita ΘZ ad ZΛ. ut autem ΣΠ ad ΠO ita rectangulum ΣP ad ipſum PO, hoc eſt [per conſtr.] quadratum ex BΓ ad rectangulum BΛΓ. huc autem & ad ſequentia theoremata utile erit.



[b] Quadratum autem ex BΓ ad BΛΓ rectangulum rationem habet compoſitam &c.] Oſtenſum enim eſt in ſexto libro elementorum, theoremate vigeſimo tertio, æquiangula parallelogramma inter ſe rationem habere ex laterum rationibus compoſitam. ſed, quoniam interpretes inductione magis quam neceſſaria argumentatione utuntur, viſum eſt nobis illud ipſum inveſtigare; quod tametſi ſcriptum eſt in commentariis noſtris in quartum theorema ſecundi libri *Archimedis* de Sphæra & Cylindro, & in [*Theonis*] ſcholiis in primum librum Magnæ Conſtructionis *Ptolemæi*, nihilominus tamen & hoc loco non inepte repetetur; propterea quod fortaſſe non omnes, qui hæc legent, in illos libros inciderunt, tum etiam, quod univerſa fere conicorum tractatio eum argumentandi modum uſurpat. *Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum* componentium *quantitates inter ſe multiplicatæ quantitatem* compoſitæ *faciunt* [per 5. def. 6.]: per quantitatem intelligendo numerum, à quo ratio ipſa denominatur. in multiplicibus quidem quantitas erit numerus integer: in reliquis vero habitudinibus neceſſe eſt quantitatem numerum eſſe, & partem ſeu partes; niſi forte quiſpiam velit etiam ineffabiles eſſe habitudines, quales ſunt magnitudinum incom-

[a] ΚΑΙ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΛΓ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΛ.] Σαφὲς μὲν ἐστι τὸ λεγόμενον. πλὴν, εἴ τις καὶ ἐπιμελέστερον βούλοιτο, ἔστω τὸ ὑπὸ ΒΛΓ ἴσον τὸ ὑπὸ ΟΠΡ, τὸ δὲ ἀπὸ ΒΓ ἴσον τὸ παρὰ τὴν ΠΡ παραβαλλόμενον πλάτος ποιοῦν τὴν ΠΣ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΟΠ πρὸς ΠΣ ἡ ΛΖ πρὸς ΘΖ· γέγονεν ἄρα τὸ ζητούμενον. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΟΠ πρὸς ΠΣ ἡ ΛΖ πρὸς ΖΘ· ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΣΠ πρὸς ΠΟ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΛ. ὡς δὲ ἡ ΣΠ πρὸς ΠΟ τὸ ΣΡ πρὸς ΡΟ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΛΓ. τοῦτο χρήσιμον καὶ εἰς τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

[b] Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΒΛΓ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΛ.] Δέδεικται μὲν ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ τῆς στοιχειώσεως, ἐν τῷ εἰκοστῷ τρίτῳ θεωρήματι, ὅτι τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. ἐπεὶ δὲ ἐπακτικώτερον μᾶλλον καὶ οὐ κατὰ τὸ ἀναγκαῖον τρόπον ὑπὸ τῶν ὑπομνηματιστῶν λέγεται, ἐζητήσαμεν αὐτό, καὶ γέγραπται ἐν τοῖς ἐκδεδομένοις ἡμῖν εἰς τὸ τέταρτον θεώρημα τοῦ δευτέρου βιβλίου τοῦ Ἀρχιμήδους περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου, καὶ ἐν τοῖς σχολίοις τοῦ πρώτου βιβλίου τῆς Πτολεμαίου συντάξεως, οὐκ ἄτοπον δὲ καὶ ἐνταῦθα τοῦτο γραφῆναι· διὰ τὸ μὴ πάντας τοὺς ἀναγινώσκοντας ἐκείνοις ἐντυγχάνειν, καὶ ὅτι σχεδὸν τὸ ὅλον σύνταγμα τῶν κωνικῶν κέχρηται αὐτῷ. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα, πηλικότητος δηλονότι λεγομένης τοῦ ἀριθμοῦ οὗ παρώνυμός ἐστιν ὁ λόγος. ἐπὶ μὲν ἐν τῶν πολλαπλασίων δυνατόν ἐστιν ἀριθμὸν ὁλόκληρον εἶναι τὴν πηλικότητα· ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν σχέσεων, ἀνάγκη τὴν πηλικότητα ἀριθμὸν εἶναι καὶ μόριον ἢ μόρια, εἰ μὴ ἄρα τις ἐθέλοι καὶ ἀρρήτους εἶναι σχέσεις, οἷαί εἰσιν αἱ κατὰ τὰ ἄλογα μεγέ-

* Scribitur etiam ſæpius ὀρθὴ in MS. qualem vocem Græca lingua non agnoſcit: nos igitur ὀρθία ubique uſurpabimus.

Sv.

δε. ἀλλὰ μᾶλλον δὲ τῶν χρόνων δῆλον ὅτι αὕτη ἡ πηλικότης πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ λόγου ποιεῖ τὸν ἡγούμενον. ἔστω τοίνυν λόγος ὁ τῆς Α πρὸς τὸ Β, καὶ εἰλήφθω τις αὐτῶν μέσος ὡς ἔτυχεν, ὁ Γ, καὶ ἔστω τοῦ ΑΓ λόγου πηλικότης ὁ Δ, τοῦ δὲ ΓΒ ὁ Ε. καὶ ὁ Δ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι τοῦ λόγου τοῦ ΑΒ πηλικότης ἐστὶν ὁ Ζ, τουτέστιν ὅτι ὁ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α ποιεῖ. ὁ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν μὲν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ ὁ Ζ πρὸς τὸν Α. πάλιν ἐπεὶ ὁ Β τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ ὁ Γ πρὸς τὸν Η, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἦν δὲ ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Γ ὁ Ζ πρὸς τὸν Α· ἴσος ἄρα ὁ Η τῷ Α, ὥστε ὁ Ζ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· τοῦ λόγου ἄρα τοῦ ΑΒ πηλικότης ἐστὶν ὁ Ζ. μὴ ταραττέτω δὲ τοὺς ἐντυγχάνοντας τὸ διὰ τῶν ἀριθμητικῶν δεδεῖχθαι τοῦτο· οἵ τε γὰρ παλαιοὶ κέχρηνται ταῖς τοιαύταις ἀποδείξεσι, μαθηματικαῖς μᾶλλον οὔσαις ἢ ἀριθμητικαῖς, διὰ τὰς ἀναλογίας, καὶ ὅτι τὸ ζητούμενον ἀριθμητικόν ἐστι. λόγοι γὰρ, καὶ πηλικότητες λόγων, καὶ πολλαπλασιασμοὶ τοῖς ἀριθμοῖς πρώτως ὑπάρχουσι, καὶ δι' αὐτῶν τοῖς μεγέθεσι, κατὰ τὸν εἰπόντα, Ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι εἶναι ἀδελφά.



menſurabilium. & patet quod in omnibus habitudinibus ipſa rationis quantitas multiplicata in conſequentem terminum, producit antecedentem. Sit igitur ratio A ad B, & ſumpto termino quolibet intermedio Γ, ſit rationis A ad Γ quantitas Δ, rationis autem Γ ad B quantitas ſit E. & Δ multiplicans E producat Z: dico Z rationis A ad B quantitatem eſſe; hoc eſt ſi Z multiplicet B produci ipſum A. itaque multiplicet Z ipſum B, & producat H. quoniam igitur Δ ipſum quidem E multiplicans producit Z, multiplicans autem Γ ipſum A producit: erit [per 17. 7.] ut E ad Γ ita Z ad A. rurſus cum B multiplicans E faciat Γ, & multiplicans Z faciat H: erit ut E ad Z ita Γ ad H; & permutando ut E ad Γ ita Z ad H. ſed ut E ad Γ ita erat Z ad A. ergo [per 9. 5.] H ipſi A eſt æqualis; & idcirco Z multiplicans B producit A: rationis igitur A ad B quantitas neceſſario erit Z. non perturbentur autem qui in hæc inciderint, quod illud ex arithmeticis demonſtretur: antiqui enim hujuſmodi demonſtrationibus ſæpe uti conſueverunt; quæ tamen mathematicæ potius ſunt quam arithmeticæ; propter analogias, & quia quæſitum arithmeticum eſt. nam rationes, rationum quantitates, & multiplicationes primo numeris, ſecundo loco per numeros & magnitudinibus inſunt, ex illius ſententia, qui ita ſcripſit. *Hæ enim mathematicæ diſciplinæ germanæ eſſe videntur.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϐʹ.

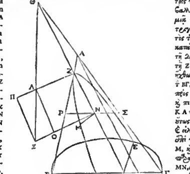
Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς ἐκβαλλομένη συμπίπτῃ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς τοῦ κώνου κορυφῆς· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἕως τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεταί τι χωρίον παρακείμενον παρά τινα εὐθεῖαν, πρὸς ἣν λόγον ἔχει ἡ ἐπ' εὐθείας μὲν οὖσα τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, ὑποτείνουσα δὲ τὴν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνίαν, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς ἕως τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων ὧν ποιεῖ ἡ ἀχθεῖσα, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ὑποτεινούσης τὴν ἐκτὸς γωνίαν τοῦ τριγώνου, καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι. καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ΥΠΕΡΒΟΛΗ.

Prop. XII. *Theor.*

Si conus plano per axem ſecetur, ſecetur autem & altero plano ſecante baſim coni ſecundum rectam lineam, quæ ad baſim trianguli per axem ſit perpendicularis, & ſectionis diameter producta cum uno latere trianguli per axem extra verticem coni conveniat: recta linea, quæ à ſectione ducitur parallela communi ſectioni plani ſecantis & baſis coni uſque ad ſectionis diametrum, poterit ſpatium adjacens rectæ, ad quam ea, quæ in directum conſtituitur diametro ſectionis, ſubtenditurque angulo extra triangulum, eandem rationem habet quam quadratum rectæ, quæ diametro parallela à vertice ſectionis uſque ad baſim trianguli ducitur, ad rectangulum ſub baſis partibus quæ ab ea fiunt contentum, latitudinem habens rectam, quæ ex diametro abſcinditur inter ipſam & verticem ſectionis interjectam; excedenſque figura ſimili & ſimiliter poſita ei, quæ continetur ſub recta angulo extra triangulum ſubtenſa, & ea juxta quam poſſunt quæ ad diametrum applicantur. vocetur autem hujuſmodi ſectio HYPERBOLA.

SIT conus, cujus vertex A punctum, baſis circulus BΓ, & ſecetur plano per axem, atque ſectionem faciat triangulum ABΓ; ſecetur autem & altero plano ſecante baſim coni ſecundum rectam ΔE ad BΓ baſim trianguli ABΓ perpendicularem, faciatque ſectionem in ſuperficie coni lineam ΔZE, & ſectionis diameter ZH producta cum ipſo AΓ latere trianguli ABΓ extra coni verticem conveniat in puncto Θ, & per A ducatur recta AK diametro ZH parallela quæ ſecet BΓ, & à Z ducatur ZΛ ad rectos angulos ipſi ZH, fiatque ut quadratum ex KA ad rectangulum BKΓ ita ΘZ ad ZΛ; ſumatur autem in ſectione quodlibet punctum M, & per M ducatur MN parallela ΔE, per N vero ipſi ZΛ parallela ducatur NOΞ, & juncta ΘΛ, & ad Ξ producta, per puncta Λ, Ξ ipſi ZN parallelæ ducantur ΛO, ΞΠ: dico MN poſſe ſpatium ZΞ, quod quidem adjacet ipſi ZΛ, latitudinem habens ZN, excedenſque figura ΛΞ, ſimili ſimiliterque poſitæ ei, quæ ſub ΘZ, ZΛ continetur.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΔΕ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΖΕ γραμμήν, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΖΗ ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω μιᾷ πλευρᾷ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, τῇ ΑΓ, ἐκτὸς τῆς τοῦ κώνου κορυφῆς κατὰ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς τῇ ΖΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ, καὶ τεμνέτω τὴν ΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΛ, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΛ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν τὸ Μ, καὶ διὰ τοῦ Μ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΝ, διὰ δὴ τοῦ Ν τῇ ΖΛ παράλληλος ἡ ΝΟΞ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΛ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῶν Λ, Ξ τῇ ΖΝ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΛΟ, ΞΠ· λέγω ὅτι ἡ ΜΝ δύναται τὸ ΖΞ, ὃ παράκειται παρὰ ΖΛ, πλάτος ἔχον τὴν ΖΝ, ὑπερβάλλον εἴδει τῷ ΛΞ, ὁμοίῳ ὄντι καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖ, ΖΛ.



Ducatur enim per N recta PNΣ parallela BΓ; eſt autem & MN ipſi ΔE parallela: ergo [per 15. 11.] planum quod tranſit per MN, PΣ æquidiſtat plano per BΓ, ΔE, hoc eſt baſi coni. ſi igitur planum per MN, PΣ producatur, ſectio circulus erit [per 4. huj.] cujus diameter PNΣ; atque eſt ad ipſam perpendicularis MN: ergo [per 35. 3.] rectangulum PNΣ æquale eſt quadrato ex MN. ac quoniam [ex hyp.] ut quadratum ex AK ad rectangulum BKΓ ita eſt ZΘ ad ZΛ; ratio autem quadrati ex AK ad rectangulum BKΓ [per 23. 6.] componitur ex ratione quam habet AK ad KΓ, & ex ea quam AK habet ad KB: ratio igitur ΘZ ad ZΛ compoſita erit ex ratione AK ad KΓ, & ratione AK ad KB. ſed [per 4. 6.] ut AK ad KΓ ita ΘH ad HΓ, hoc eſt ΘN ad NΣ; & ut AK ad KB ita ZH ad HB, hoc eſt ZN ad NP: ratio igitur ΘZ ad ZΛ componitur ex ratione ΘN ad NΣ, & ZN ad NP. at [per 23. 6.] ratio compoſita ex ratione ΘN ad NΣ, & ZN ad NP, eſt ea quam ΘNZ rectangulum habet ad rectangulum ΣNP: ergo ut rectangulum ΘNZ ad ΣNP ita ΘZ ad ZΛ,

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ν τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΡΝΣ, ἔστι δὴ καὶ ἡ ΜΝ τῇ ΔΕ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΜΝ, ΡΣ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. ἐὰν ἄρα ἐκβληθῇ τὸ διὰ τῶν ΜΝ, ΡΣ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται, οὗ διάμετρος ἡ ΡΝΣ, καί ἐστιν ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἡ ΜΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΡΝΣ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΛ, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ, καὶ ΑΚ πρὸς ΚΒ· καὶ ὁ τῆς ΖΘ ἄρα πρὸς τὴν ΖΛ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ, καὶ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς ΗΓ, τουτέστιν ἡ ΘΝ πρὸς ΝΣ, ὡς δὲ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ, τουτέστιν ἡ ΖΝ πρὸς ΝΡ· ὁ ἄρα τῆς ΘΖ πρὸς ΖΛ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΘΝ πρὸς ΝΣ, καὶ τοῦ τῆς ΖΝ πρὸς ΝΡ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΘΝ πρὸς ΝΣ, καὶ τῆς ΖΝ πρὸς ΝΡ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣΝΡ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣΝΡ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΛ, τουτέστιν

τουτέστιν ἡ ΘΝ πρὸς ΝΞ. ἀλλ' ὡς ἡ ΘΝ πρὸς ΝΞ (τῆς ΖΝ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης) οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΝΞ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΞΝΖ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΘΝΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣΝΡ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΣΝΡ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΞΝΖ. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΣΝΡ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΞΝΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΞΝΖ ἐστὶ τὸ ΞΖ παραλληλόγραμμον· ἡ ἄρα ΜΝ δύναται τὸ ΞΖ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΖΛ, πλάτος ἔχον τὸ ΖΝ, ὑπερβάλλον τῷ ΛΞ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῆς ΘΖΛ.

Καλείσθω μὲν ἡ τοιαύτη τομὴ Ὑπερβολή· ἡ δὲ ΛΖ, ἡ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΖΗ καταγόμεναι τεταγμένως· καλείσθω δὲ ἡ αὐτὴ καὶ Ὀρθία, Πλαγία δὲ ἡ ΘΖ.

hoc eſt ΘΝ ad ΝΞ. ut autem recta ΘΝ ad ΝΞ (ſumpta ΖΝ communi altitudine,) ita ΘΝΖ rectangulum ad rectangulum ΖΝΞ: quare ut rectangulum ΘΝΖ ad rectangulum ΞΝΖ ita rectangulum ΘΝΖ ad ipſum ΣΝΡ: rectangulum igitur ΣΝΡ [per 9. 5.] æquale eſt rectangulo ΞΝΖ. ſed quadratum ex ΜΝ oſtenſum eſt æquale rectangulo ΣΝΡ: ergo quadratum ex ΜΝ rectangulo ΞΝΖ æquale erit. rectangulum autem ΞΝΖ eſt parallelogrammum ΞΖ: recta igitur ΜΝ poteſt ſpatium ΞΖ, quod rectæ ΖΛ adjacet, latitudinem habens ΖΝ, excedenſque figura ΛΞ ſimili ei quæ ſub ΘΖΛ continetur.

Dicatur autem hujuſmodi ſectio *Hyperbola*: & recta ΛΖ, *Ea juxta quam poſſunt quæ ad* ΖΗ *ordinatim applicantur*: hæc etiam *Latus Rectum* appelletur, ΘΖ vero *Tranſverſum**.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παρὰ τὴν βάσιν τοῦ κώνου ἠγμένῳ, μήτε ὑπεναντίως, τὸ δὲ ἐπίπεδον ἐν ᾧ ἐστιν ἡ βάσις τοῦ κώνου, καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμπίπτῃ κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν ἤτοι τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τοῦ κώνου τομῆς παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ἕως τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεταί τι χωρίον παρακείμενον παρά τινα εὐθεῖαν, πρὸς ἣν λόγον ἔχει ἡ διάμετρος τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς ἕως τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῆς πρὸς ταῖς τοῦ τριγώνου εὐθείαις, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται. καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ΕΛΛΕΙΨΙΣ.

Prop. XIII. *Theor.*

Si conus plano per axem ſecetur, & ſecetur altero plano conveniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque baſi coni æquidiſtet, neque ſubcontrarie ponatur; planum autem, in quo eſt baſis coni, & ſecans planum conveniant ſecundum rectam lineam quæ ſit perpendicularis vel ad baſim trianguli per axem, vel ad eam quæ in directum ipſi conſtituitur: recta linea, quæ à ſectione coni ducitur parallela communi ſectioni planorum uſque ad diametrum ſectionis, poterit ſpatium adjacens rectæ, ad quam ſectionis diameter eam rationem habeat quam quadratum rectæ diametro parallelæ, à vertice coni uſque ad trianguli baſim ductæ, habet ad rectangulum contentum ſub baſis partibus quæ inter ipſam & rectas trianguli lineas interjiciuntur, latitudinem habens rectam quæ ex diametro ab ipſa abſcinditur ad verticem ſectionis, deficienſque figura ſimili & ſimiliter poſita ei, quæ ſub diametro, & recta juxta quam poſſunt, continetur. dicatur autem hujuſmodi ſectio Ellipsis.

Ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παραλλήλῳ τῇ βάσει τοῦ κώνου, μήτε ὑπεναντίως ἠγμένῳ,

SIT conus, cujus vertex A punctum, baſis circulus ΒΓ, & ſecetur plano per axem, atque ſectionem faciat triangulum ΑΒΓ, ſecetur autem & altero plano conveniente cum utroque latere trianguli per axem, neque baſi coni æquidiſtante, neque ſubcontrarie poſito,

* Latus tranſverſum & rectum (ſive potius erectum) ſic videtur dici, quod in delineanda Parabola, Hyperbola, vel Ellipſi, illud tranſverſum ſive à dextra ad ſiniſtram eſt ducendum, hoc vero ſuper latus tranſverſum erigendum; eodem ſc. ſenſu quo dicitur πλαγία φάλαγξ, ὀρθία φάλαγξ, quod de diametro tranſverſa & recta ſimiliter intelligendum. Conſuetudini tamen & commodo ſitui conſulentes ſchemata aliter aliquando delineamus.

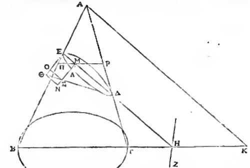
atque

atque faciat ſectionem in ſuperficie coni lineam ΔΕ; communis vero ſectio plani ſecantis, atque ejus in quo eſt baſis coni, ſit ΖΗ perpendicularis ad ΒΓ, diameter autem ſectionis ΕΔ, & ab Ε ducatur ΕΘ ad ΕΔ perpendicularis, perque Α ducatur ΑΚ ipſi ΕΔ parallela, & fiat ut quadratum ex ΑΚ ad rectangulum ΒΚΓ ita ΔΕ ad ΕΘ, ſumaturque quodvis in ſectione punctum Λ, & per Λ ipſi ΖΗ parallela ducatur ΛΜ: dico ΛΜ poſſe ſpatium, quod ipſi ΕΘ adjacet, latitudinem habens ΕΜ, deficienſque figura ſimili ei quæ ſub ΔΕΘ continetur.

Jungatur enim ΔΘ, perque Μ ducatur ΜΞΝ parallela ipſi ΕΘ, & per Θ, Ξ puncta ipſi ΕΜ parallelæ ducantur ΘΝ, ΞΟ, & per punctum Μ ducatur ΠΜΡ parallela ΒΓ. itaque quoniam ΠΡ eſt parallela ΒΓ, & ΛΜ ipſi ΖΗ: erit [per 15. 11.] planum ductum per ΛΜ, ΠΡ æquidiſtans plano per ΖΗ, ΒΓ ducto, hoc eſt baſi coni. ſi igitur planum per ΛΜ, ΠΡ du-

καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔΕ γραμμήν, κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, καὶ τοῦ ἐν ᾧ ἐστιν ἡ βάσις τοῦ κώνου, ἔστω ἡ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς οὖσα τῇ ΒΓ, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἔστω ἡ ΕΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΘ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς, τὸ Λ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΖΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΜ· λέγω ὅτι ἡ ΛΜ δύναταί τι χωρίον, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΕΘ, πλάτος ἔχον τὴν ΕΜ, ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τῆς ΔΕΘ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΘ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Μ τῇ ΕΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΞΝ, διὰ δὲ τῶν Θ, Ξ τῇ ΕΜ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΘΝ, ΞΟ, καὶ διὰ τοῦ Μ τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ΠΜΡ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΠΡ τῇ ΒΓ παράλληλός ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΜ τῇ ΖΗ παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΛΜ, ΠΡ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΖΗ, ΒΓ ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῇ



catur, fiet [per 4. huj.] ſectio circulus, cujus diameter ΠΡ; & eſt ΛΜ ad ipſam perpendicularis: ergo [per 35. 3.] rectangulum ΠΜΡ æquale eſt quadrato ex ΛΜ. Et quoniam eſt [ex hyp.] ut quadratum ex ΑΚ ad rectangulum ΒΚΓ ita ΔΕ ad ΕΘ, & ratio quadrati ex ΑΚ ad rectangulum ΒΚΓ [per 23. 6.] componitur ex ratione quam habet ΑΚ ad ΚΒ, & ex ea quam ΑΚ habet ad ΚΓ. ut autem ΑΚ ad ΚΒ ita [per 4. 6.] ΕΗ ad ΗΒ, hoc eſt ΕΜ ad ΜΠ; & ut ΑΚ ad ΚΓ ita ΔΗ ad ΗΓ, hoc eſt ΔΜ ad ΜΡ: erit igitur ratio ΔΕ ad ΕΘ compoſita ex ratione ΕΜ ad ΜΠ, & ratione ΔΜ ad ΜΡ. ſed ratio compoſita ex rationibus ΕΜ ad ΜΠ, & ΔΜ ad ΜΡ, eſt ea quam ΕΜΔ rectangulum habet ad rectangulum ΠΜΡ: igitur ut rectangulum ΕΜΔ ad ipſum rectangulum ΠΜΡ ita ΔΕ ad ΕΘ, ſive ΔΜ ad ΜΞ. ut autem ΔΜ ad ΜΞ (ſumpta ΜΕ com-

βάσει τοῦ κώνου. ἐὰν ἄρα ἐκβληθῇ διὰ τῶν ΛΜ, ΠΡ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ, καὶ ἔστι κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΛΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΠΜΡ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, λόγος δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΓ σύγκειται ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, καὶ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ, τουτέστιν ἡ ΕΜ πρὸς ΜΠ, ὡς δὲ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς ΗΓ, τουτέστιν ἡ ΔΜ πρὸς ΜΡ· ὁ ἄρα τῆς ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΕΜ πρὸς ΜΠ, καὶ τοῦ τῆς ΔΜ πρὸς ΜΡ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΠ, καὶ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΡ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΜΔ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΜΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΜΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΜΡ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, τουτέστιν ἡ ΔΜ πρὸς τὴν ΜΞ. ὡς δὲ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΞ, τῆς ΜΕ κοι-

[illegible] οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΜ[illegible], καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ [illegible]Μ[illegible], οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΜ[illegible] ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ [illegible] ΠΜΡ τῷ [illegible] ΞΜΕ. τὸ δὲ [illegible] ΠΜΡ ἴσον ἐδείχθη τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ· καὶ τὸ ὑπὸ [illegible]Μ[illegible] ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς [illegible]Μ· ἡ ΛΜ ἄρα δύναται τ[illegible] ΜΟ, [illegible] παρὰ τὴν [illegible], πλάτος ἔχον τὴν [illegible]Μ, ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΟΝ [illegible] ὑπὸ τῶν [illegible] ΔΕΘ.

Καλείσθω μὲν ἡ τοιαύτη τομὴ Ἔλλειψις, ἡ δὲ ΕΘ, παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΔΕ τεταγ[illegible]ως, ἡ δὲ αὐτὴ καὶ Ὀρθία· Πλαγία δὲ ἡ ΕΔ.

munis altitudine [illegible] [per 1. 6.] rectangulum ΔΜΕ ad rectangulum ΞΜΕ. ergo ut ΔΜΕ rectangulum ad [illegible] P ita erit ΔΜΡ rectangulum [illegible] æquale igitur eſt [illegible] 5.] rectangulum [illegible] rectangulo ΞΜΕ. [illegible] demonſtratum eſt æquale quadrato [illegible] & [illegible] rectangulum [illegible] M [illegible] recta igitur ΛΜ poteſt [illegible] M [illegible] quidem rectæ [illegible] cet [illegible] ΕΜ, deficienſque figura [illegible] continetur.

Vocetur autem hujuſmodi ſectio *Ellipſis* & recta ΕΘ, *Ea juxta quam* [illegible] *qua ad diametrum* ΔΕ *ordinatim applicantur*, quæ & *Latus Rectum* vocetur; ΕΔ vero *Tranſverſum*.

EUTOCIUS.

Δεῖ σημειώσασθαι ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει [illegible] [illegible] ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως· ἡ γὰρ ΔΕ [illegible] Γ σημείου τῆς ΑΓ [illegible] ἐκβαλλομένῃ [illegible] ΑΓ συμπίπτει.

Notari oportet hoc theorema tres habere [illegible] caſiones, ut ſæpius dictum eſt in ellipſi. vel enim ΔΕ concurrit cum latere ΑΓ ſupra Γ punctum, vel in ipſo Γ, vel infra cum ΑΓ producta convenict.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

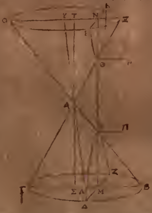
Ἐὰν αἱ κατὰ κορυφὴν ἐπιφάνειαι ἐπιπέδῳ τμηθῶσι μὴ διὰ τῆς κορυφῆς· ἔσται ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἐπιφανειῶν τομὴ ἡ καλουμένη Ὑπερβολή, καὶ τῶν δύο τομῶν ἥ τε διάμετρος αὐτὴ ἔσται, καὶ παρ' ἃς δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν διάμετρον καταγόμεναι παράλληλοι τῇ ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου εὐθείᾳ ἴσαι, καὶ τοῦ εἴδους ἡ πλαγία πλευρὰ κοινὴ ἡ μεταξὺ τῶν κορυφῶν τῶν τομῶν. καλείσθωσαν δὲ αἱ τοιαῦται τομαὶ Ἀντικείμεναι.

Prop. XIV. *Theor.*

Si ſuperficies conicæ quæ ad verticem plano non per verticem ſecentur; erit in utraque ſuperficie ſectio quæ vocatur Hyperbola, & duarum ſectionum eadem erit diameter; rectæ vero, juxta quas poſſunt applicatæ ad diametrum parallelæ ei quæ eſt in baſi coni, inter ſe æquales erunt; & figuræ tranſverſum latus utriſque commune, quod ſcilicet inter ſectionum vertices interjicitur. vocentur autem hujuſmodi Sectiones Oppositæ.

Ἔστωσαν αἱ κατὰ κορυφὴν ἐπιφάνειαι, ὧν κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, καὶ τετμήσθωσαν ἐπιπέδῳ μὴ διὰ τῆς κορυφῆς, καὶ ποιείτωσαν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὰς τὰς ΔΕΖ, ΗΘΚ· λέγω ὅτι ἑκατέρα τῶν ΔΕΖ, ΗΘΚ τομῶν ἐστιν ἡ καλουμένη ὑπερβολή.

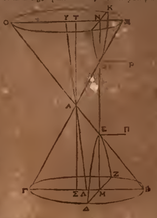
Ἔστω γὰρ ὁ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ὁ ΒΔΓΖ, καὶ ἤχθω ἐν τῇ κατὰ κορυφὴν ἐπιφανείᾳ παράλληλον αὐτῷ ἐπίπεδον τὸ ΞΗΟΚ. κοιναὶ δὲ τομαὶ τῶν ΖΕΔ, ΗΘΚ τομῶν καὶ τῶν κύκλων αἱ ΖΔ, ΗΚ· ἔσονται δὴ παράλληλοι. ἄξων δὲ ἔστω τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἡ ΛΑΥ εὐθεῖα, κέντρα δὲ τῶν κύκλων τὰ Λ, Υ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΖΔ κάθετος ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ



Sint ad verticem ſuperficies, quarum vertex Α punctum & ſecentur plano non per verticem, atque ſectiones faciat in ſuperficie lineas ΔΕΖ, ΗΘΚ: dico utramque ſectionum ΔΕΖ, ΗΘΚ eſſe eam quæ Hyperbola appellatur.

Sit enim circulus ΒΔΓΖ, in quo fertur recta linea ſuperficiem deſcribens, ducaturque in ſuperficie, quæ eſt ad verticem, planum ipſi æquidiſtans ΞΗΟΚ, & communes interſectiones ſectionum ΖΕΔ, ΗΘΚ & circulorum ſint ΖΔ, ΗΚ, quæ [per 16. 11.] etiam parallelæ erunt; axis autem conicæ ſuperficiei ſit recta ΛΑΥ, & circulorum centra Λ, Υ: & à Λ ad ΖΔ perpendicularis ducta producatur ad Β, Γ puncta;

puncta, perque ΒΓ & axem planum ducatur, quod ſectiones faciat in circulis quidem rectas ΞΟ, ΒΓ parallelas; in ſuperficie vero ipſas ΒΑΟ, ΓΑΞ & erit [per 18.11.] ΞΟ ad ΗΚ perpendicularis, quoniam & ΒΓ perpendicularis eſt ad ΖΔ, & utraque utrique eſt parallela. & quoniam planum per axem dictis ſectionibus occurrit ad puncta Μ, Ν, quæ ſunt intra lineas, plane conſtat ipſum etiam lineas ſecare. ſecet autem in Θ, Ε ergo puncta Μ, Ε, Θ, Ν erunt & in plano per axem, & in eo in quo ſunt lineæ ipſæ, & propterea [per 3.11.] ΜΕΘΝ recta erit. conſtat etiam [per 3. huj.] puncta Ξ, Θ, Α, Γ in eadem recta eſſe itemque Β, Ε, Α, Ο: quoniam ſunt & in ſuperficie conica & in plano per axem. ducantur ergo à punctis Θ, Ε ipſi ΘΕ ad rectos angulos rectæ ΘΡ, ΕΠ; perque Α rectæ ΜΕΘΝ parallela ducatur ΣΑΤ, & fiat ut quadratum ex ΑΣ ad rectangulum ΒΣΓ ſic ΘΕ ad ΕΠ, & ut quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΟΤΞ ſic ΕΘ ad ΘΡ. itaque quoniam conus, cujus vertex Α & baſis ΒΓ circulus, ſecatur plano per axem, quod ſectionem facit triangulum ΑΒΓ, ſecatur autem & altero plano ſecante baſim coni ſecundum ΔΜΖ ad ΒΓ perpendicularem, quod ſectionem facit in ſuperficie lineam ΔΕΖ, diameterque ΜΕ producta cum uno latere trianguli per axem extra coni verticem convenit & per punctum Α diametro ſectionis ΕΜ parallela ducitur ΑΣ, ab Ε vero ducitur ΕΠ ad rectos angulos ipſi ΕΜ, atque eſt ut quadratum ex ΑΣ ad rectangulum ΒΣΓ ita ΕΘ ad ΕΠ erit [per 12. huj.] ipſa ΔΕΖ ſectio hyperbola, & recta ΕΠ ea juxta quam poſſunt quæ ad ΕΜ ordinatim applicantur; tranſverſum vero figuræ latus eſt recta ΘΕ. eadem ratione & ΗΘΚ hyperbola erit, cujus diameter ΘΝ, recta ΘΡ ea juxta quam poſſunt ordinatim ad ΘΝ applicatæ; ΘΕ vero tranſverſum figuræ latus.



Dico ΘΡ ipſi ΕΠ æqualem eſſe.

Quoniam enim parallelæ ſunt ΒΓ, ΞΟ ut ΑΣ ad ΣΓ ita erit [per 4. 6.] ΑΤ ad ΤΞ & ut ΑΣ ad ΣΒ ita ΑΤ ad ΤΟ ſed [per 23.6.] ratio ΑΣ ad ΣΓ, una cum ratione ΑΣ ad ΣΒ, eſt ea quam habet quadratum ex ΑΣ ad rectangulum ΒΣΓ, & ratio ΑΤ ad ΤΞ una cum ratione ΑΤ ad ΤΟ, eſt quam habet quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΞΤΟ. ergo ut quadratum ex

[illegible] σημεῖα, καὶ διὰ τῆς ΒΓ καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω· ποιήσει δὴ τομὰς ἐν μὲν τοῖς κύκλοις παραλλήλους εὐθείας τὰς ΞΟ, ΒΓ, ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τὰς ΒΑΟ, ΓΑΞ. ἔσται δὴ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΗΚ πρὸς ὀρθάς, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ πρὸς ὀρθάς, καὶ ἔστιν ἑκατέρα παράλληλος. καὶ ἐπεὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ταῖς τομαῖς συμβάλλει κατὰ τὰ Μ, Ν σημεῖα ἐντὸς τῶν γραμμῶν, δῆλον ὡς τὰς γραμμὰς τέμνει τὸ ἐπίπεδον. τεμνέτω κατὰ τὰ Θ, Ε. τὰ ἄρα Μ, Ε, Θ, Ν σημεῖα ἔστιν [illegible] ἐστιν ἐπίπεδῳ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ἐν [illegible] εἰσιν αἱ γραμμαί· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΕΘΝ γραμμή. καὶ φανερὸν ὅτι τὰ Ξ, Θ, Α, Γ ἐπ᾽ εὐθείας ἐστί, καὶ τὰ Β, Ε, Α, Ο, ἔν τε γὰρ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ ἐστί, καὶ ἐν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ. ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ μὲν τῶν Θ, Ε τῇ ΘΕ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΘΡ, ΕΠ, διὰ δὲ τοῦ Α τῇ ΜΕΘΝ παράλληλος ἤχθω ἡ ΣΑΤ, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΕΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΟΤΞ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΡ. ἐπεὶ οὖν κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ πεποίηκε τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΔΜΖ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ, καὶ πεποίηκε τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΕΖ, ἡ δὲ διάμετρος ἡ ΜΕ ἐκβαλλομένη συμπέπτωκε μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς τῇ ΕΜ παράλληλος ἦκται ἡ ΑΣ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΜ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΕΠ, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΕΠ· ἡ μὲν ΔΕΖ ἄρα τομὴ ὑπερβολή ἐστιν, ἡ δὲ ΕΠ παρ᾽ ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΕΜ καταγόμεναι τεταγμένως, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘΕ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΗΘΚ ὑπερβολή ἐστι, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΘΝ, ἡ δὲ ΘΡ παρ᾽ ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΘΝ καταγόμεναι τεταγμένως, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘΕ.

Λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΡ τῇ ΕΠ.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλοί εἰσιν αἱ ΒΓ, ΞΟ· ἔστιν ὡς ἡ ΑΣ πρὸς ΣΓ οὕτως ἡ ΑΤ πρὸς ΤΞ, καὶ ὡς ἡ ΑΣ πρὸς ΣΒ οὕτως ἡ ΑΤ πρὸς ΤΟ. ἀλλ᾽ ὁ τῆς ΑΣ πρὸς ΣΓ λόγος μετὰ τοῦ τῆς ΑΣ πρὸς ΣΒ, ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ· ὁ δὲ τῆς ΑΤ πρὸς ΤΞ μετὰ τοῦ τῆς ΑΤ πρὸς ΤΟ, ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΤΟ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ

ὑπὸ

[illegible] ΑΤ [illegible] ἡ ΘΕ [illegible] ΑΤ [illegible] ΖΤΟ [illegible] ΘΕ πρὸς ΕΠ [illegible] ΘΡ.

ΑΣ ad [illegible] ΒΣΓ ita quadratum ex Α [illegible] recta [illegible] ut autem quadratum ex [illegible] per constr.] [illegible] ΕΠ & [illegible] ex ΑΤ [illegible] rectan- [illegible] ΘΕ ad Π [illegible] 9. 5] ΕΠ [illegible]

EUTOCIUS.

[illegible]

Πάνυ [illegible] τὰς ὅσα ἐστὶν ὁ [illegible] ἐκείνοις τὴν διάμετρον [illegible] τὴν ἀρχικὴν, καὶ τὰς παρ' ἃς δύνανται.

P[illegible] est [illegible] quoniam enim [illegible] per [illegible] ΓΣ [illegible] ΣΑ [illegible] ΤΑ, & eadem ratione [illegible] ΑΣ ad ΣΒ ita Α [illegible] æquali [illegible] ut ΣΑ ad ΣΒ [illegible] 1.6 [illegible] ratum ex ΓΣ [illegible] quadratum ex ΣΤ ad rectangul[illegible] triangulorum, [illegible] quadratum ex [illegible] ita quadratum ex ΑΤ [illegible] ΣΤ [illegible] æquali, ut [illegible] ita quadratum ex ΑΤ [illegible] ΤΟ [illegible] per constr.] ut quadratum ex ΑΣ ad rect[illegible] ita ΘΕ ad ΕΠ, [illegible] quadratum [illegible] ΑΤ [illegible] rectangulum [illegible] Ο ita ΘΕ ad [illegible] Ρ, ergo ut ΘΕ ad ΕΠ [illegible] ad ΘΡ æqualis igitur est per [illegible] ΘΡ.

Hoc theorema casum non habet. propoſitum autem manifeſtum eſt, utpote idem quod in tribus ſuperioribus: ſimiliter enim atque in [illegible], & oppoſitarum ſectionum principalem diametrum inquirit, & lineas juxta quas poſſunt quæ ad [illegible] ordinatim applicantur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιέ.

Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς διαμέτρου ἀχθεῖσα εὐθεῖα τεταγμένως ἐκβληθῇ ἐφ' ἑκάτερα ἕως τῆς τομῆς, καὶ ποιηθῇ ὡς ἡ ἐκβληθεῖσα πρὸς τὴν διάμετρον οὕτως ἡ διάμετρος πρός τινα εὐθεῖαν· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἐκβληθεῖσαν παράλληλος τῇ διαμέτρῳ, δυνήσεται τὸ παρακείμενον παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον, πλάτος ἔχον τὴν ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβανομένην πρὸς τῇ τομῇ, ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ἐφ' ἣν ἄγονται καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται. καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐφ' ἣν κατῆκται.

Ἔστω [illegible] ἔλλειψις, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ [illegible] κατὰ [illegible] Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω τεταγμένως καὶ [illegible] ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα ἕως τῆς τομῆς [illegible], καὶ ἀπὸ Δ σημείου τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ Δ[illegible] πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΖ, [illegible] εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ [illegible] Η τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ [illegible]Θ, καὶ ἐπεζεύχθω [illegible] ΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Θ τῇ ΔΖ παράλληλος ἤχθω [illegible] ΘΛ, διὰ δὲ [illegible] Ζ, Λ τῇ ΘΔ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΚ, ΛΜ· λέγω ὅτι ἡ ΗΘ δύναται τὸ Δ[illegible] ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΔΖ, πλάτος ἔχον τὴν ΔΘ, ἐλλεῖπον [illegible] τῷ Λ[illegible] ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἔστω γὰρ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΑΒ καταγόμεναι τεταγμένως ἡ ΑΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΝ, καὶ διὰ μὲν τοῦ

Prop. XV. *Theor.*

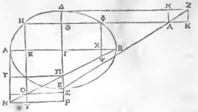
Si in ellipſi, à puncto quod diametrum biſariam dividit, recta ordinatim ducta ex utraque parte ad ſectionem producatur, & fiat ut producta ad diametrum ita diameter ad aliam: recta linea, quæ à ſectione ducitur ad productam diametro parallela, poterit ſpatium adjacens tertiæ proportionali, latitudinem habens rectam quæ inter ipſam & ſectionem interjicitur, deficienſque figura ſimili ei quæ continetur ſub rectâ ad quam ducuntur & eâ juxta quam poſſunt. & ſi ulterius producatur ad alteram partem ſectionis, biſariam ſecabitur ab ea ad quam applicata fuerit.

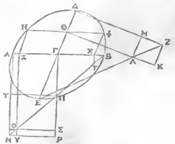
SIT ellipſis, cujus diameter ΑΒ, ſeceturque ΑΒ biſariam in Γ puncto, & per Γ ordinatim applicata ex utraque parte ad ſectionem producatur, quæ ſit ΔΓΕ; à puncto autem Δ ipſi ΔΕ ad rectos angulos ducatur ΔΖ, fiatque ut Δ[illegible] ad ΑΒ ita [illegible]Β ad ΔΖ; & ſumpto quolibet puncto Η in ſectione, per Η ducatur ΗΘ ipſi ΑΒ parallela, & jungatur ΕΖ, deinde per Θ ipſi ΔΖ parallela ducatur ΘΛ, & per Ζ, Λ puncta ducantur ipſi [illegible]Δ parallelæ ΖΚ, ΛΜ: dico ΗΘ poſſe ſpatium ΔΛ, quod quidem adjacet rectæ ΔΖ, latitudinem habens ΔΘ, deficienſque figura ΛΖ ſimili [illegible] quæ ſub ΕΔΖ continetur.

Sit enim ΑΝ ea juxta quam poſſunt ordinatim applicatæ ad ΑΒ, jungaturque ΒΝ, & per Η quidem

Η quidem ipſi ΔΕ parallela ducatur ΗΞ, perque Ξ,Γ ipſi ΑΝ parallelæ ΞΟ,ΓΠ; per Ν,Ο,Π vero ducantur ΝΤΡ, ΟΣ, ΤΠ parallelæ ipſi ΑΒ: æquale igitur eſt [per 13.huj.] quadratum ex ΔΓ rectangulo ΑΠ; & quadratum ex ΗΞ rectangulo ΑΟ. & quoniam ut ΒΑ ad ΑΝ ita eſt ΒΓ ad ΓΠ, & ΠΤ ad ΤΝ; æqualis autem ΒΓ ipſi ΓΑ, hoc eſt ipſi ΤΠ: & ΓΠ ipſi ΤΝ æqualis erit: ergo [per 36.1.] ΑΠ rectangulum æquale eſt rectangulo ΤΡ, & rectangulum ΞΤ ipſi ΤΥ. & quoniam [per 43.1.] rectangulum ΟΤ rectangulo ΟΡ æquale eſt, commune autem ΟΝ; erit rectangulum ΤΥ ipſi ΝΣ æquale. ſed ΤΥ eſt æquale ipſi ΤΞ: ergo ΤΞ æquale eſt ipſi ΝΣ. commune vero ΤΣ: totum igitur ΝΠ rectangulum, hoc eſt ΠΑ, æquale erit

Η τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΞ, διὰ δὲ τῶν Ξ, Γ τῇ ΑΝ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΞΟ, ΓΠ, διὰ δὲ τῶν Ν, Ο, Π τῇ ΑΒ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΝΤΡ, ΟΣ, ΤΠ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΔΓ τῷ ΑΠ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΞ τῷ ΑΟ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΝ οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΠ, καὶ ἡ ΠΤ πρὸς ΤΝ, ἴση δὲ ἡ ΒΓ τῇ ΓΑ, τουτέστι τῇ ΤΠ· καὶ ἡ ΓΠ τῇ ΤΝ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ΑΠ τῷ ΤΡ, τὸ δὲ ΞΤ τῷ ΤΥ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΟΤ τῷ ΟΡ ἐστὶν ἴσον, κοινὸν δὲ τὸ ΟΝ· τὸ ΤΥ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΣ. ἀλλὰ τὸ ΤΥ τῷ ΤΞ ἐστὶν ἴσον· τὸ ΤΞ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΣ. κοινὸν δὲ τὸ ΤΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΝΠ, τουτέστι τὸ ΠΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ





rectangulo ΑΟ una cum ΠΟ rectangulo: quare ΠΑ rectangulum ſuperat rectangulum ΑΟ ipſo ΟΠ. eſt autem [per 13.huj.] ΑΠ rectangulum æquale quadrato ex ΓΔ: rectangulumq; ΑΟ æquale quadrato ex ΞΗ, & ΟΠ ei quod ſub ΟΣΠ continetur: ergo quadratum ex ΓΔ ſuperat quadratum ex ΗΞ ipſo ΟΣΠ rectangulo. & quoniam recta ΔΕ ſecatur in partes æquales in Γ puncto, & in partes inæquales in Θ: rectangulum ΕΘΔ una cum quadrato ex ΓΘ, hoc eſt ex ΞΗ, æquale erit [per 5.2.] quadrato ex ΓΔ: quadratum igitur ex ΓΔ ſuperat quadratum ex ΞΗ rectangulo ΕΘΔ. ſuperabat autem quadratum ex ΓΔ ipſum quadratum ex ΗΞ rectangulo ΟΣΠ: rectangulum igitur ΕΘΔ rectangulo ΟΣΠ eſt æquale. &

ΑΟ μετὰ τοῦ ΠΟ· ὥστε ΠΑ τοῦ ΑΟ ὑπερέχει τῷ ΟΠ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΠ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ΑΟ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΗ, τὸ δὲ ΟΠ ἴσον τῷ ὑπὸ ΟΣΠ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΞ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ΟΣΠ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Θ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΘΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΘ, τουτέστι τοῦ ΞΗ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΞΗ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ΕΘΔ. ὑπερεῖχε δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΞ τῷ ὑπὸ τῶν ΟΣΠ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΘΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΟΣΠ. καὶ ἐπεὶ

ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΖ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΔΖ οὕτω καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ. καὶ ἔστι τῷ ἀπὸ ΓΔ ἴσον τὸ ΠΓΑ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΠΓΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΛ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΘΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΠΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΠΣΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΣ. καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΕΘΔ τῷ ὑπὸ ΠΣΟ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΔΘΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΣ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ἡ ΗΘ ἄρα δύναται τὸ ΔΛ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΔΖ, πλάτος ἔχον τὴν ΔΘ, ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΖΛ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῶν ΕΔΖ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐκβαλλομένη ἡ ΘΗ ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΔΕ.

Ἐκβεβλήσθω γάρ, καὶ συμβαλλέτω τῇ τομῇ κατὰ τὸ Φ, καὶ διὰ τοῦ Φ τῇ ΗΞ παράλληλος ἤχθω ἡ ΦΧ, διὰ δὲ τοῦ Χ τῇ ΑΤ παράλληλος ἤχθω ἡ ΧΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΞ τῇ ΦΧ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΞ τῷ ἀπὸ τῆς ΦΧ. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΗΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΞΟ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΦΧ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΧΨ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΞΟ τῷ ΑΧΨ ἴσον ἐστίν· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΟΞ πρὸς τὴν ΨΧ οὕτως ἡ ΧΑ πρὸς ΑΞ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΟΞ πρὸς τὴν ΨΧ οὕτως ἡ ΞΒ πρὸς ΒΧ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΑ πρὸς ΑΞ οὕτως ἡ ΞΒ πρὸς ΒΧ· καὶ διελόντι, ὡς ἡ ΧΞ πρὸς ΞΑ οὕτως ἡ ΧΞ πρὸς ΧΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΞ τῇ ΧΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΞΓ τῇ ΓΧ ἐστιν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΘΦ. ἡ ἄρα ΗΘ ἐκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΔΘ.

quoniam [per conſtr.] eſt ut ΔΕ ad ΑΒ ita ΑΒ ad ΔΖ: erit [per cor. 1. 20. 6.] ut ΔΕ ad ΔΖ ita quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΑΒ; hoc eſt quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΓΒ. atque eſt quadrato ex ΓΔ æquale ΠΓΑ rectangulum, hoc eſt ΠΓΒ: ut ergo ΔΕ ad ΔΖ, hoc eſt ut ΕΘ ad ΘΛ, hoc eſt [per 1. 6.] ut ΕΘΔ rectangulum ad rectangulum ΔΘΛ, ita rectangulum ΠΓΒ ad quadratum ex ΓΒ; hoc eſt [ob ſimilia triangula] rectangulum ΠΣΟ ad quadratum ex ΟΣ. ſed [ex modo oſtenſis] rectangulum ΕΘΔ æquale eſt ipſi ΠΣΟ: rectangulum igitur ΔΘΛ quadrato ex ΟΣ, hoc eſt quadrato ex ΗΘ, eſt æquale: & idcirco recta ΗΘ poteſt ſpatium ΔΛ, quod adjacet rectæ ΔΖ, latitudinem habens ΔΘ, deficienſque figura ΖΛ, ſimili ei quæ ſub ΕΔΖ continetur.

Dico inſuper ΘΗ, productam ad alteram partem ſectionis, ab ipſa ΔΕ biſariam ſecari.

Producatur enim, occurratque ſectioni in puncto Φ, & per Φ ipſi ΗΞ parallela ducatur ΦΧ, & per Χ ducatur ipſi ΑΤ parallela ΧΨ. quoniam igitur ΗΞ ipſi ΦΧ eſt æqualis, erit quadratum ex ΗΞ æquale quadrato ex ΦΧ. quadratum autem ex ΗΞ [per 13. huj.] æquale eſt ΑΞΟ rectangulo; & quadratum ex ΦΧ æquale rectangulo ΑΧΨ: & igitur rectangulum ΑΞΟ æquale eſt rectangulo ΑΧΨ: ergo [per 16. 6.] ut ΟΞ ad ΨΧ ita ΧΑ ad ΑΞ. & eſt ut ΟΞ ad ΨΧ ita ΞΒ ad ΒΧ: ut ergo ΧΑ ad ΑΞ ita ΞΒ ad ΒΧ; & [per 17. 5.] dividendo, ut ΧΞ ad ΞΑ ita ΞΧ ad ΧΒ: æqualis igitur eſt [per 9. 5.] ΑΞ ipſi ΧΒ. eſt autem ΑΓ æqualis ΓΒ: quare & reliqua ΞΓ reliquæ ΓΧ: & idcirco ΗΘ ipſi ΘΦ eſt æqualis. recta igitur ΗΘ producta ad alteram ſectionis partem ab ipſa ΔΘ biſariam ſecabitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛʹ.

Ἐὰν διὰ τῆς διχοτομίας τῆς πλαγίας πλευρᾶς τῶν ἀντικειμένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων συζυγὴς τῇ προϋπαρχούσῃ διαμέτρῳ.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι διάμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ συζυγὴς τῇ ΑΒ.

Ἔστωσαν γὰρ παρ᾿ ἃς δύνανται αἱ τεταγμένως καταγόμεναι αἱ ΑΕ, ΒΖ εὐθεῖαι, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΖ, ΒΕ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τι ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν τομῶν τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, ἀπὸ δὲ τῶν Η, Θ κατήχθωσαν τεταγμένως αἱ ΗΚ, ΘΛ, διὰ δὲ τῶν Κ, Λ ταῖς ΑΕ, ΒΖ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΚΜ, ΛΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΘΛ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΛ. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΚΜ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΘΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΛΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ

Prop. XVI. *Theor.*

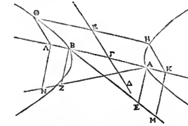
Si per punctum, quod tranſverſum latus oppoſitarum ſectionum biſariam dividit, recta ducatur ordinatim applicatæ parallela; erit hæc ipſarum diameter, priori diametro conjugata.

Sint oppoſitæ ſectiones, quarum diameter ΑΒ; ſeceturque ΑΒ biſariam in Γ puncto, & per Γ ordinatim applicatæ parallela ducatur ΓΔ: dico ΓΔ diametrum eſſe conjugatam ipſi ΑΒ.

Sint enim ΑΕ, ΒΖ juxta quas poſſunt ordinatim applicatæ, & junctæ ΑΖ, ΒΕ producantur, ſumpto autem in altera ſectione quovis puncto Η, ducatur per Η ipſi ΑΒ parallela ΗΘ, & à punctis Η, Θ ordinatim applicentur ΗΚ, ΘΛ; deinde à punctis Κ, Λ ipſis ΑΕ, ΒΖ parallelæ ducantur ΚΜ, ΛΝ. quoniam igitur æqualis eſt [per 34. 1.] ΗΚ ipſi ΘΛ: erit quadratum ex ΗΚ quadrato ex ΘΛ æquale. ſed [per 12. hujus] quadratum ex ΗΚ æquale eſt rectangulo ΑΚΜ, & quadratum ex ΘΛ rectangulo ΒΛΝ: ergo ΑΚΜ rectangulum rectangulo

BAN æquale erit. & quia æquales ſunt AE, BZ; erit [per 7. 5.] ut AE ad AB ita BZ ad BA. ut autem AE ad AB ſic MK [per 4. 6.] ad KB; & ut BZ ad BA ſic NA ad AA: quare ut MK ad KB ſic NA ad AA. ſed ut MK ad KB (ſumpta KA communi altitudine) ita [per 1. 6.] rectangulum MKA ad rectangulum BKA; & ut NA ad AA (ſumpta BA communi altitudine) ita NAB rectangulum ad rectangulum AAB: ergo ut rectangulum MKA ad

ΒΑΝ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΒΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς ΚΒ, καὶ ὡς ἡ ΒΖ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΝΑ πρὸς ΑΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΜΚ πρὸς ΚΒ οὕτως ἡ ΝΑ πρὸς ΑΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΚΒ, τῆς ΚΑ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΑ, ὡς δὲ ἡ ΝΑ πρὸς ΑΑ, τῆς ΒΑ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΑΒ·



rectangulum BKA ita rectangulum NAB ad ipſum AAB; & [per 16. 5.] permutando ut MKA rectangulum ad rectangulum NAB ita BKA rectangulum ad rectangulum AAB. eſt autem [ut modo oſtenſum] rectangulum MKA æquale rectangulo NAB: [a] quare & BKA rectangulum æquale rectangulo AAB; & propterea AK ipſi AB æqualis erit. eſtque AΓ æqualis ΓB: ergo & tota KΓ toti ΓA: & ideo HΞ ipſi ΞΘ æqualis. recta igitur HΘ ab ipſa ΞΓΔ biſariam ſecabitur, atque eſt ipſi AB parallela: ergo [per 17. def.] diameter erit & ΞΓΔ conjugata ipſi AB.

καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΑΒ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ ΜΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΑΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΑΒ. καὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΜΚΑ τῷ ὑπὸ ΝΑΒ· [a] ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΚΑ τῷ ὑπὸ ΑΑΒ· ἴση ἄρα ἡ ΑΚ τῇ ΑΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΚΓ ὅλῃ τῇ ΓΑ ἴση ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΗΞ τῇ ΞΘ. ἡ ΗΘ ἄρα δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΞΓΔ, καὶ ἔστι παράλληλος τῇ ΑΒ· διάμετρος ἄρα ἐστί, καὶ ἡ ΞΓΔ συζυγὴς τῇ ΑΒ.

EUTOCIUS.

[a] Quare & BKA rectangulum æquale rectangulo AAB; & propterea AK ipſi AB æqualis erit.] Quoniam enim rectangulum BKA ipſi AAB rectangulo eſt æquale; erit [per 16. 6.] ut KB ad AA ita AB ad AK, permutandoque ut KB ad BA ita AA ad AK, & componendo ut KA ad AB ita KA ad KA: æqualis igitur eſt KA ipſi BA.

Scire autem oportet, in quintodecimo & ſexto decimo theoremate *Apollonii* propoſitum fuiſſe, ut ſecundas, & conjugatas quas vocant, diametros inquireret ellipſis, & hyperbolæ, & oppoſitarum ſectionum: parabola enim ejuſmodi diametrum non habet. ſed & illud notatu dignum eſt, diametros ellipſis intra recipi; hyperbolæ vero & oppoſitarum ſectionum diametros deſcribi extra. oportet autem rectas juxta quas poſſunt ordinatim applicatæ, ſeu recta latera, & quæ ipſis æquidiſtant ad rectos angulos aptare; ordinatim vero applicatas, & ſecundas diametros non ſemper. maxime tamen debent in acuto angulo applicari, ut longe aliæ & diverſæ ab eis quæ recto lateri ſunt parallelæ, deprehendantur.

[a] Ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΚΑ τῷ ὑπὸ ΑΑΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΚ τῇ ΑΒ.] Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΒΚΑ τῷ ὑπὸ ΑΑΒ ἐστὶν ἴσον· ἀνάλογον ἔσται ὡς ἡ ΚΒ πρὸς ΑΑ ἡ ΑΒ πρὸς ΑΚ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΚΒ πρὸς ΒΑ ἡ ΑΑ πρὸς ΑΚ, καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΑΒ ἡ ΚΑ πρὸς ΚΑ· ἴση ἄρα ἡ ΚΑ τῇ ΒΑ.

Δεῖ εἰδέναι, ὅτι ἐν τῷ πέμπτῳ καὶ δεκάτῳ καὶ ἑκκαιδεκάτῳ θεωρήματι σκοπὸν ἔχει ζητῆσαι τὰς καλουμένας δευτέρας καὶ συζυγεῖς διαμέτρους τῆς ἐλλείψεως, καὶ τῆς ὑπερβολῆς, καὶ τῶν ἀντικειμένων· ἡ γὰρ παραβολὴ οὐκ ἔχει τοιαύτην διάμετρον. σημειωτέον δὲ, ὅτι αἱ μὲν τῆς ἐλλείψεως διάμετροι ἐντὸς λαμβάνονται, αἱ δὲ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων ἐκτὸς καταγράφονται. δεῖ δὲ τὰς μὲν παρ' ἃς δύνανται, ἤτοι τὰς ὀρθίας πλευράς, πρὸς ὀρθὰς τιθέναι, καὶ δηλονότι καὶ τὰς παραλλήλους αὐταῖς· τὰς δὲ τεταγμένως καταγομένας, καὶ τὰς δευτέρας διαμέτρους, οὐ πάντως. μάλιστα γὰρ ἐν ὀξείᾳ γωνίᾳ δεῖ καταγειν αὐτάς, ἵνα σαφεῖς ὦσι τοῖς ἐντυγχάνουσιν ἕτεραι οὖσαι τῶν παραλλήλων τῇ ὀρθίᾳ πλευρᾷ.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

1. PUNCTUM, quod hyperbolæ & ellipſis diametrum biſariam dividit, centrum ſectionis dicatur.

ΟΡΟΙ ΔΕΥΤΕΡΟΙ.

α΄. ΤΗΣ ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως ἑκατέρας ἡ διχοτομία τῆς διαμέτρου, κέντρον τῆς τομῆς καλείσθω.

β΄. Ἡ δὲ

β'. Ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν τομὴν προσπίπτουσα, ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς.

2. Et quæ à centro ad ſectionem perducitur, vocetur ex centro ſectionis.

γ'. Ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἀντικειμένων ἡ διχοτομία τῆς πλαγίας πλευρᾶς, κέντρον καλείσθω.

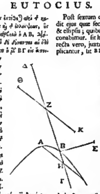
3. Similiter & quod tranſverſum latus oppoſitarum ſectionum bifariam divisit, centrum vocetur.

δ'. Ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἠγμένη παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, μέσον τε λόγον ἔχουσα τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν, καὶ δίχα τεμνομένη ὑπὸ τοῦ κέντρου, δευτέρα διάμετρος καλείσθω.

4. Quæ autem à centro ducitur parallela ordinatim applicatæ, mediamque proportionem habet inter latera figuræ, & bifariam ſecatur à centro, ſecunda diameter appelletur.

EUTOCIUS.

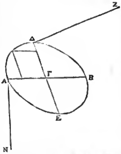
Μετὰ τὸ ἑκκαιδέκατον θεώρημα, ὅρους ἐκτίθεται περὶ τῆς καλουμένης δευτέρας διαμέτρου τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, οὓς διὰ καταγραφῆς σαφεῖς ποιήσομεν. ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἔστω ἡ ΓΗΒΔ, παρ' ἣν δὲ δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΒΓ καταγόμεναι, ἡ ΒΕ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ μὲν ΒΓ εἰς ἄπειρον αὔξεται διὰ τὴν τομήν, ὡς δέδεικται ἐν τῷ ὀγδόῳ θεωρήματι, ἡ δὲ ΒΔ, ἥτις ἐστὶν ἡ ὑποτείνουσα τὴν ἐκτὸς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου γωνίαν, πεπέρασται· ταύτην δὲ διχοτομοῦντες κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀγαγόντες ἀπὸ τοῦ Α τεταγμένως κατηγμένην τὴν ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΑΗ παράλληλον τὴν ΘΖΚ, καὶ ποιήσαντες τὴν ΘΖ τῇ ΖΚ ἴσην, καὶ τὸ ἀπὸ ΘΚ ἴσον τῷ ὑπὸ ΔΒΕ, ἕξομεν τὴν ΘΚ δευτέραν διάμετρον. τοῦτο γὰρ δυνατόν, διὰ τὸ τὴν ΘΚ ἐκτὸς οὖσαν τῆς τομῆς εἰς ἄπειρον ἐκβάλλεσθαι, καὶ δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τῆς ἀπείρου τῇ ἐκτεθείσῃ εὐθείᾳ ἀφελεῖν ἴσην. τὸ δὲ Ζ κέντρον καλεῖ, τὴν δὲ ΖΒ καὶ τὰς ὁμοίας αὐτῇ, ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὴν τομὴν φερομένας, ἐκ τοῦ κέντρου. ταῦτα μὲν ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων. καὶ φανερὸν ὅτι πεπερασμένη ἐστὶν ἑκατέρα τῶν διαμέτρων, ἡ μὲν πρώτη αὐτόθεν ἐκ τῆς γενέσεως τῆς τομῆς, ἡ δὲ δευτέρα διὰ τὸ μέση ἀνάλογον εἶναι πεπερασμένων εὐθειῶν, τῆς τε πρώτης διαμέτρου καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως.



Ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως οὔπω δῆλον τὸ λεγόμενον. ἐπειδὴ γὰρ εἰς ἑαυτὴν συννεύει καθάπερ ὁ κύκλος, καὶ ἐντὸς ἀπολαμβάνει πάσας τὰς διαμέτρους, καὶ ὡρισμένας αὐτὰς ἀπεργάζεται· ὥστε οὐ πάντως ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἡ μέση ἀνάλογον τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἀγομένη καὶ ὑπὸ τῆς διαμέτρου διχοτομουμένη ὑπὸ τῆς τομῆς περατοῦται. δυνατὸν δὲ αὐτὴν συλλογίζεσθαι δι' αὐτῶν τῶν εἰρημένων ἐν τῷ πεντεκαιδεκάτῳ θεωρήματι. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἐκεῖ δέδεικται, αἱ ἐπὶ τὴν ΔΕ καταγόμεναι, παράλληλοι τῇ ΑΒ, δύνανται τὰ παρακείμενα παρὰ τὴν τρίτην αὐτῶν ἀνάλογον γινομένην, τουτέστι τὴν ΖΔ· ἔστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΑΒ ἡ ΑΒ πρὸς ΔΖ· ὥστε μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΑΒ τῶν ΒΔ, ΔΖ· καὶ διὰ τοῦτο καὶ αἱ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΑΒ, παράλληλοι τῇ ΔΕ, δύνανται τὰ παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον παρακείμενα τῶν ΔΒ, ΑΒ, τουτέστι τὴν ΑΝ. διὰ δὲ τοῦτο μέση ἀνάλογον γίνεται ἡ ΔΕ δευτέρα διάμετρος τῶν ΒΑ, ΑΝ,

Poſt ſextum decimum theorema, definitiones tradit ejus quæ ſecunda diameter appellatur hyperbolæ & ellipſis; quibus quidem nos ex figuris lucem afferre conabimur. ſit hyperbola AB, cujus diameter ΓΗΒΔ, recta vero, juxta quam poſſunt quæ ad ipſam BΓ applicantur, ſit BE: patet igitur BΓ in infinitum augeri propter ſectionem, ut oſtenſum eſt in octavo theoremate. ſed ipſa BΔ, quæ ſubtenditur angulo extra triangulum per axem, terminata eſt: itaque ſi bifariam ſecta BΔ in Z, & à puncto A ordinatim applicatâ AH, per Z rectæ AH parallelam duxerimus ΘZK, ita ut ſit ΘZ ipſi ZK æqualis, & quadratum ex ΘK æquale rectangulo ΔBE; erit ΘK ſecunda diameter. hoc enim fieri poſſe perſpicuum eſt: quippe cum ΘK extra ſectionem cadens in infinitum produci poſſit, atque à recta infinita cuilibet datæ rectæ æqualis facile abſcindatur. punctum autem Z vocat centrum, & rectam ZB & alias quæ ſimiliter à puncto Z ad ſectionem ducuntur, ex centro appellat; atque hæc in hyperbola & oppoſitis ſectionibus. conſtat ergo utramque diametrum terminatam eſſe; primam quidem per ſe ex generatione ſectionis; ſecundam vero, quod media proportionalis ſit inter rectas terminatas, videlicet inter primam diametrum, & eam juxta quam poſſunt quæ ad diametrum ordinatim applicantur.

Sed in ellipſi id quod dictum eſt nondum apparet. quoniam enim illa in ſeipſam vergat inſtar circuli, & omnes diametros intra recipiat atque terminet: non ſemper in ellipſi, media proportionalis inter figuræ latera, ducta per centrum ſectionis, & à diametro bifariam diviſa, ab ipſa ſectione terminatur. hoc autem ex iis quæ dicta ſunt in quinto decimo theoremate oſtendere poſſumus. quoniam enim, ut demonſtratum eſt, quæ ad rectam ΔE applicantur, parallelæ ipſi AB, poſſunt ſpatia tertiæ proportionali ipſis, videlicet rectæ ZΔ adjacentia: erit ut ΔB ad AB ita AB ad ΔZ: quare AB media proportionalis eſt inter BΔ, ΔZ: & idcirco, quæ applicantur ad AB, ipſi ΔB parallelæ, poterunt ſpatia adjacentia tertiæ proportionali ipſis ΔE, AB, hoc eſt rectæ AN. ergo ſecunda diameter ΔB eſt media proportionalis inter figuræ



guræ latera ΒΑ, ΑΝ. oportet autem hoc ſcire etiam ob commodam figurarum deſcriptionem. nam cum inæquales ſint ΑΒ, ΔΒ diametri (in ſolo enim circulo ſunt æquales) conſtat rectam, quæ minori earum ad rectos angulos ducitur, ut hoc in loco ΔΖ, eo quod ſit tertia proportionalis ipſis ΔΒ, ΑΒ, utravis majorem eſſe: eam vero, quæ ad angulos rectos ducitur majori ut ΑΝ, eo quod ſit tertia proportionalis ipſis ΑΒ, ΔΕ, utravis eſſe minorem; ita ut quatuor continue proportionales ſint, ut enim ΑΝ ad ΔΒ ſic eſt ΔΕ ad ΑΒ & ΑΒ ad ΔΖ.

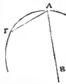
τῶν εἰδῶν πλευρῶν. δεῖ δὲ εἰδέναι καὶ τοῦτο, διὰ τί οὐ χρησόμεθα τῇ καταγραφῇ. ἐπεὶ γὰρ ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΔΒ διάμετροι, ἐν μόνῳ γὰρ κύκλῳ εἰσὶν ἴσαι, δῆλον ὅτι ἡ μὲν πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη τῇ ἐλάσσονι αὐτῶν, ὡς ἐνταῦθα ἡ ΔΖ, ὥστε τρίτην ἀνάλογον εἶναι τῶν ΔΕ, ΑΒ, μείζων ἐστὶν ἀμφοτέρων· ἡ δὲ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη τῇ μείζονι, ὡς ἐνταῦθα ἡ ΑΝ, διὰ τὸ τρίτην ἀνάλογον εἶναι τῶν ΑΒ, ΔΕ, ἐλάσσων ἐστὶν ἀμφοτέρων· ὥστε καὶ συνεχῶς εἶναι τὰς τέσσαρας ἀνάλογον, ὡς γὰρ ἡ ΑΝ πρὸς ΔΕ, ἡ ΔΕ πρὸς ΑΒ καὶ ἡ ΑΒ πρὸς ΔΖ.

Prop. XVII. *Theor.*

Si in coni ſectione à vertice ipſius ducatur recta linea parallela ordinatim applicatæ: extra ſectionem cadet.

SIT coni ſectio, cujus diameter ΑΒ: dico rectam, quæ à vertice, hoc eſt à puncto Α, ducitur parallela ei quæ ordinatim applicatur, extra ſectionem cadere.

Si enim fieri poteſt, cadat intra, ut ΑΓ. quoniam igitur in coni ſectione ſumptum eſt quoddam punctum Γ; recta, quæ ab ipſo Γ intra ſectionem ducitur, ordinatim applicatæ parallela, [per 7. huj.] diametro ΑΒ occurrit, atque ab ipſa bifariam ſecatur: quare ΑΓ producta bifariam ſecabitur à recta ΑΒ; quod eſt abſurdum: ΑΓ enim producta [per 10 huj.] extra ſectionem cadit. non igitur recta, quæ à puncto Α ducitur ordinatim applicatæ parallela, cadet intra ſectionem: ergo extra cadet; & propterea ſectionem ipſam neceſſario continget.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ΄.

Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ κώνου τομή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς, τουτέστι τοῦ Α σημείου, παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

Εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ἐντός, ὡς ἡ ΑΓ. ἐπεὶ οὖν ἐν κώνου τομῇ εἴληπται τυχὸν σημεῖον τὸ Γ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγομένη παρὰ τεταγμένως κατηγμένην συμβαλεῖ τῇ ΑΒ διαμέτρῳ, καὶ δίχα τμηθήσεται ὑπ' αὐτῆς· ἡ ΑΓ ἄρα ἐκβαλλομένη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΑΒ, ὅπερ ἄτοπον· ἐκβαλλομένη γὰρ ἡ ΑΓ ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς γραμμῆς· ἐκτὸς ἄρα πεσεῖται, διόπερ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

EUTOCIUS.

Euclides in quinto decimo theoremate tertii libri elementorum oſtendit rectam, quæ ab extremitate diametri ad rectos angulos ducitur, cadere extra atque circulum ipſum contingere: *Apollonius* autem hoc loco univerſale quoddam demonſtrat, quod tum tribus coni ſectionibus, tum circulo convenit. hoc enim differt circulus à coni ſectionibus, quod in circulo ordinatim applicatæ perpendiculares ſunt ad diametrum; neque enim aliæ rectæ parallelæ a diametro circuli bifariam dividuntur: at in tribus ſectionibus, perpendiculares non ſemper ducuntur, præterquam ad ſolos axes.

Ὁ μὲν Εὐκλείδης ἐν τῷ δεκάτῳ πέμπτῳ θεωρήματι τοῦ τρίτου βιβλίου τῆς στοιχειώσεως ἔδειξεν, ὅτι ἡ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἀπ' ἄκρας τῆς διαμέτρου ἐκτὸς τε πίπτει καὶ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ὁ δὲ Ἀπολλώνιος ἐν τούτῳ καθολικόν τι δείκνυσι δυνάμενον ἐφαρμόσαι ταῖς τρισὶ τοῦ κώνου τομαῖς καὶ τῷ κύκλῳ. τούτῳ γὰρ διαφέρει ὁ κύκλος τῶν τοῦ κώνου τομῶν, ὅτι ἐπ' ἐκείνου μὲν αἱ τεταγμέναι πρὸς ὀρθὰς ἄγονται τῇ διαμέτρῳ, οὐδὲ γὰρ ἄλλαι οὐδεμίαι παράλληλοι ἑαυταῖς ὑπὸ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου διχοτομοῦνται· ἐπὶ δὲ τῶν τριῶν τομῶν οὐ πάντως πρὸς ὀρθὰς ἄγονται, εἰ μὴ ἐπὶ μόνους τοὺς ἄξονας.

Prop. XVIII. *Theor.*

Si recta linea coni ſectioni occurrat, productaque in utramque partem extra ſectionem cadat; ſumatur autem aliquod punctum intra ſectionem, & per ipſum ei quæ ſectioni occurrit parallela ducatur: ducta recta & producta ex utraque parte ſectioni occurret.

SIT coni ſectio, atque ipſi occurrens recta ΑΒΖ, quæ producta in utramque partem extra ſectionem cadat; ſumpto autem intra ſe-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη΄.

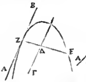
Ἐὰν κώνου τομῇ εὐθεῖα συμπίπτουσα, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐντὸς τῆς τομῆς, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ συμπιπτούσῃ· ἡ ἀχθεῖσα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

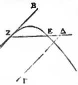
ΕΣΤΩ κώνου τομή, καὶ συμπίπτουσα αὐτῇ ἡ ΑΒΖ εὐθεῖα, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τῆς

τομῆς

τομῆς τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ Α Ζ Β παράλληλος ἤχθω ἡ Γ Δ· λέγω ὅτι ἡ Γ Δ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ε Ζ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ Α Β τῇ Γ Δ, καὶ τῇ Α Β συμπέπτωκέ τις εὐθεῖα ἡ Ε Ζ, καὶ ἡ Γ Δ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ Ε Ζ. καὶ εἰ μὲν μεταξὺ τῶν Ε, Ζ, φανερὸν ὅτι καὶ τῇ τομῇ συμπίπτει· ἐὰν δὲ ἐκτὸς τοῦ Ε σημείου, πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται. ἡ ἄρα Γ Δ ἐκβαλλομένη, ὡς ἐπὶ τὰ Δ μέρη, συμπίπτει τῇ τομῇ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς ἐπὶ Γ ἐκβαλλομένη συμπίπτει· ἡ Γ Δ ἄρα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.





ſectionem puncto aliquo Γ; per Γ ipſi Α Ζ Β parallela ducatur Γ Δ: dico Γ Δ productam ex utraque parte ſectioni occurrere.

Sumatur enim aliquod punctum in ipſa ſectione, quod ſit E, & jungatur E Z. & quoniam recta A B rectæ Γ Δ eſt parallela, ipſique A B occurrit recta E Z, Γ Δ quoq; producta ipſi E Z occurret. & ſiquidem cadat [ut in fig. 1.] inter E, Z puncta, perſpicuum eſt ipſam ſectioni occurrere; ſi vero [ut in fig 2.] extra E, ſectioni prius occurret: ergo Γ Δ producta, ut ad partes Δ, occurrit ſectioni. ſimiliter demonſtrabitur, & ut ad partes Γ eidem occurrere: recta igitur Γ Δ producta ex utraque parte ſectioni occurret.

EUTOCIUS.

Ἐν τισιν ἀντιγράφοις τὸ θεώρημα τοῦτο ἐπὶ μόνης παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς ἐστι. κάλλιον δὲ καθολικώτερον ἔχειν αὐτὸ ἀνέγραψαν, εἰ καὶ ὅτι ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐν ἐκείνοις ὡς ἀναμφίβολον παραλέλειπται· ἡ γὰρ Γ Δ, ἐντὸς οὖσα τῆς τομῆς περιωρισμένη ἐστί, καὶ αὐτὴ ἐκβαλλομένη κατ' ἀμφότερα τέμνει τὴν τομήν. δεῖ δὲ ἐπιστῆσαι, ὅτι, κἂν ἡ Α Ζ Β τέμνῃ τὴν τομήν, ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις ἁρμόζει.

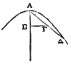
In aliquibus exemplaribus hoc theorema in parabola & hyperbola tantummodo propoſitum oſtendit. ſed tamen præſtat propoſitionem univerſaliorem eſſe; quamquam de ellipſi, ut minime dubium, in illis prætermiſſum videri poteſt; nam recta Γ Δ, intra ſectionem terminatam exiſtens, ſi producatur ex utraque parte, neceſſario ipſam ſecabit. ſciendum autem eſt eandem congruere demonſtrationem, etiam ſi Α Ζ Β ſecet ipſam ſectionem.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐν πάσῃ κώνου τομῇ, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς διαμέτρου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθῇ, συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Ἔστω κώνου τομή, ἧς διάμετρος ἡ Α Β, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς διαμέτρου τὸ Β, καὶ διὰ τοῦ Β παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ Β Γ· λέγω ὅτι ἡ Β Γ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Δ, ἔστι δὲ καὶ τὸ Α ἐπὶ τῆς τομῆς· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, καὶ συμπίπτει αὐτῇ ἡ Α Δ, καὶ ἔστι τῇ κατηγμένῃ παράλληλος ἡ Β Γ· καὶ ἡ Β Γ ἄρα συμπεσεῖται τῇ Α Δ. καὶ εἰ μὲν μεταξὺ τῶν Α, Δ σημείων, φανερὸν ὅτι καὶ τῇ τομῇ συμπεσεῖται. εἰ δὲ ἐκτὸς τοῦ Δ, ὡς κατὰ τὸ Ε, πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

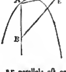


Prop. XIX. *Theor.*

In omni ſectione coni, recta linea, quæ à diametro ducitur ordinatim applicatæ parallela, cum ſectione conveniet.

SIT coni ſectio, cujus diameter A B, ſumaturque aliquod punctum B in diametro; & per B ducatur B Γ parallela ordinatim applicatæ: dico B Γ productam cum ſectione convenire.

Sumatur enim quodlibet punctum Δ in ſectione; eſt autem & punctum A in ſectione: ergo [per 10. huj.] à puncto A ad Δ ducta recta intra ſectionem cadet. & quoniam [per 17. huj.] quæ ab A ducta eſt ordinatim applicatæ parallela, cadit extra ſectionem, & cum ipſa convenit recta A Δ, itemque B Γ parallela eſt ordinatim applicatæ: ſequitur quod B Γ etiam cum A Δ conveniet. & ſi quidem convenit inter puncta A, Δ; perſpicuum eſt eam cum ſectione quoque convenire. ſi vero extra Δ, ut ad punctum E, prius conveniet cum ſectione. ergo recta linea, quæ à puncto B ducitur ordinatim applicatæ parallela, cum ſectione conveniet.



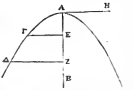
Prop. XX. *Theor.*

Si in parabola duæ rectæ à ſectinne ad diametrum nrdinatim applicentur: nt eorum quadrata inter ſeſe, ita erunt & rectæ, quæ ab ipſis ex diametro ad verticem abſcinduntur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν ἐν παραβολῇ ἀπὸ τῆς τομῆς καταχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως· ἔσται ὡς τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ' αὐτῶν ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς.

SIT parabola, cujus diameter AB; & in ipſa ſumantur puncta quæpiam Γ, Δ, à quibus ad AB ordinatim applicentur ΓE, ΔZ: dico ZA ad ipſam AE ita eſſe ut quadratum rectæ ΔZ ad quadratum rectæ ΓE.



Sit enim AH, juxta quam poſſunt ordinatim applicatæ; erit [per 11. huj.] quadratum ex ΔZ rectangulo ZAH æquale. at quadratum ex ΓE æquale rectangulo EAH: quare ut quadratum ex ΔZ ad quadratum ex ΓE ita rectangulum ZAH ad rectangulum EAH. ut autem rectangulum ZAH ad rectangulum EAH, ita [per 1.6.] linea ZA ad lineam AE: ergo ut quadratum ex ΔZ ad quadratum ex ΓE, ita erit ZA ad AE.

ΕΣΤΩ παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ εἰλήφθω τινὰ σημεῖα ἐπ' αὐτῆς τὰ Γ, Δ, καὶ ἀπ' αὐτῶν Γ, Δ τεταγμένως κατήχθωσαν ἐπὶ τὴν ΑΒ αἱ ΓΕ, ΔΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ΑΕ.

Ἔστω γὰρ παρ' ἣν δύνανται αἱ τεταγμένως καταγόμεναι ἡ ΑΗ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΔΖ τῷ ὑπὸ ΖΑΗ. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΕΑΗ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΑΗ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΖΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΑΗ, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ΑΕ.

EUTOCIUS.

Ab hoc theoremate incipiens *Apollonius* deinceps in omnibus accidentia, quæ ipſi parabolæ inſunt & non alii cuipiam, oſtendit: ſicut plerumque eadem hyperbolæ, ellipſi, & circulo convenire demonſtrat. Quoniam autem non inutile viſum eſt iis qui mechanica tradunt, ob inſtrumentorum penuriam, ſæpenumero per continuata puncta coni ſectiones in plano deſcribere: ex hoc theoremate ſuppeditatur modus ſumendi ea puncta continuata, per quæ parabola regulæ adminiculo deſignabitur. ſi enim exponamus rectam ut AB, & in ea ſumamus puncta continuata E, Z, à quibus ad rectos angulos ipſi AB rectas EΓ, ZΔ ducamus *, ſumpto in EΓ quolibet puncto Γ, longius quidem ab E ſi latiorem parabolam facere libuerit, ſi vero anguſtiorem propius; & fiat ut AE ad AZ ita quadratum ex EΓ ad quadratum ex ZΔ: puncta Γ, Δ in ſectione erunt. Pari modo ſumentur & alia puncta per quæ parabola deſcribetur.

Ἀπὸ τούτου τοῦ θεωρήματος ἀρχόμενος ἑξῆς ἐν πᾶσι τὰ συμπτώματα τῆς παραβολῆς αὐτῇ δείκνυσιν ὑπάρχοντα καὶ οὐκ ἄλλῳ τινί· ὡς δὲ ἐπὶ τὸ πολὺ τῇ ὑπερβολῇ, καὶ τῇ ἐλλείψει, καὶ τῷ κύκλῳ τὰ αὐτὰ δείκνυσιν ὑπάρχοντα. Ἐπεὶ δὲ οὐκ ἄχρηστον φαίνεται τοῖς τὰ μηχανικὰ γράφουσι, διὰ τὴν ἀπορίαν τῶν ὀργάνων, καὶ πολλάκις διὰ συνεχῶν σημείων γράφειν τὰς τοῦ κώνου τομὰς ἐν ἐπιπέδῳ, διὰ τούτου τοῦ θεωρήματος ἔστι πορίσασθαι συνεχῆ σημεῖα, δι' ὧν γραφήσεται ἡ παραβολὴ κανόνος παραθέσει. ἐὰν γὰρ ἐκθῶμαι εὐθεῖαν, ὡς τὴν ΑΒ, καὶ ἐπ' αὐτῆς λάβω συνεχῆ σημεῖα, ὡς τὰ Ε, Ζ, καὶ ἀπ' αὐτῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒ, καὶ ποιήσω ὡς τὰς ΕΓ, ΖΔ, λαβὼν ἐπὶ τῆς ΕΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, εἰ μὲν εὐρυτέραν βουληθείην ποιῆσαι παραβολὴν, πόῤῥω τοῦ Ε, εἰ δὲ στενοτέραν, ἐγγύτερον, καὶ ποιήσω ὡς τὴν ΑΕ πρὸς ΑΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ· τὰ Γ, Δ σημεῖα ἐπὶ τῆς τομῆς ἔσται. ὁμοίως δὲ καὶ ἄλλα ληψόμεθα δι' ὧν γραφήσεται ἡ παραβολή.

Prop. XXI. *Theor.*

Si in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia rectæ lineæ ordinatim ad diametrum applicentur: erunt quadrata earum ad ſpatia contenta ſub rectis, quæ inter ipſas & vertices tranſverſi lateris figuræ interjiciuntur, ut figuræ rectum latus ad tranſverſum inter ſeſe vero, ut ſpatia quæ interjectis, ut diximus, rectis cnntinentur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ, ἢ ἐλλείψει, ἢ κύκλου περιφερείᾳ εὐθεῖαι ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον· ἔσται τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα πρὸς μὲν τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ εἴδους, ὡς τοῦ εἴδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν· πρὸς ἄλληλα δὲ, ὡς τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν, ὡς εἴρηται, ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν.

* Non opus eſt ut rectæ EΓ, ZΔ, &c. ſint ad rectos angulos ipſi AB, ſufficit ut ſint inter ſe parallelæ.

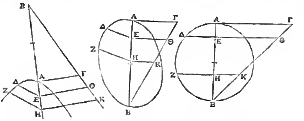
Ἔστω

Ἔστω ὑπερβολὴ, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, παρ' ἣν δὲ δύνανται αἱ καταγόμεναι ἡ ΑΓ, καὶ κατήχθωσαν ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως αἱ ΔΕ, ΖΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΒ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΑΒ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΓ διορίζουσα τὸ εἶδος, καὶ διὰ τῶν Ε, Η τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΗΚ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ὑπὸ ΚΗΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΕ τῷ ὑπὸ ΘΕΑ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΚΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, ὡς δὲ ἡ ΚΗ πρὸς ΗΒ, τῆς ΑΗ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΗΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΗΑ· ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΗΑ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΗ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΑ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΕΑ, οὕτως ΓΑ πρὸς ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ.

SIT hyperbola, vel ellipſis, vel circuli circumferentia, cujus diameter AB, recta autem juxta quam poſſunt applicatæ AΓ, & ad diametrum applicentur ordinatim ΔE, ZH: dico ut quadratum ex ZH ad rectangulum AHB, ita eſſe AΓ ad AB; ut vero quadratum ex ZH ad quadratum ex ΔE, ita rectangulum AHK ad rectangulum AEK.

Jungatur enim BΓ figuram determinans, & per E, H puncta ipſi AΓ parallelæ ducantur EΘ, HK: quadratum igitur ex ZH æquale eſt [per 12, aut 13. huj.] rectangulo KHA, & quadratum ex ΔE rectangulo ΘEA. quoniam autem ut KH ad HB, ita eſt [per 4. 6.] ΓA ad AB; & ut KH ad HB ſumptâ AH communi altitudine, ita [per 1. 6.] rectangulum KHA ad rectangulum BHA: erit [per 11. 5.] ut ΓA ad AB, ita rectangulum KHA (hoc eſt quadratum ex ZH) ad rectangulum KHA. eadem ratione demonſtrabitur etiam ut quadratum ex ΔE ad rectangulum KEA, ita ΓA ad AE: ergo [per 11. 5.] ut quadratum ex ZH ad rectangulum BHA, ita quadratum ex ΔE ad BEA rectangulum; & permutando, ut quadratum ex ZH ad quadratum ex ΔE, ita rectangulum BHA ad rectangulum KEA.



EUTOCIUS.

Τὸ θεώρημα σαφῶς ἔκκειται, καὶ πτῶσιν οὐκ ἔχει. δεῖ μέντοι ἐπιστῆσαι, ὅτι ἡ παρ' ἣν δύνανται, τουτέστιν ἡ ὀρθία πλευρὰ, ἐπὶ τοῦ κύκλου ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ. εἰ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΚ οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ ἐπὶ τοῦ κύκλου· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ. δεῖ δὲ καὶ τοῦτο εἰδέναι, ὅτι αἱ κατηγμέναι ἐν τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ πρὸς ὀρθὰς εἰσι πάντως τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἐπ' εὐθείας γίνονται ταῖς παραλλήλοις τῇ ΑΓ.

Διὰ δὲ τούτου τοῦ θεωρήματος, τοῦ αὐτοῦ τρόπον τοῖς ἐπὶ τῆς παραβολῆς εἰρημένοις προσέχοντες, χαράξομεν ὑπερβολὴν καὶ ἔλλειψιν ὀργανικῶς παραδόσει. ἐκκείσθω γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ προσεκβεβλήσθω ἐπ' ἄπειρον ἐπὶ τὸ Η, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ταύτῃ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τινὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς ΑΗ τὰ Ε, Η, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Η τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΗΚ, καὶ γενέσθω τὸ μὲν ὑπὸ ΑΗΚ ἴσον τῷ ἀπὸ ΖΗ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΕΘ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΕ· διὰ γὰρ τῶν Α, Δ, Ζ ἥξει ἡ ὑπερβολή. ὁμοίως δὲ κατασκευάσομεν καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως.

Theorema manifeſte exponitur, & caſum non habet. oportet autem ſcire lineam juxta quam poſſunt, videlicet rectum figuræ latus, in circulo quidem diametro æquale eſſe. quoniam enim ut quadratum ex ΔE ad rectangulum AEB ita eſt ΓA ad AB; quadratum autem ex ΔE rectangulo AEB in circulo eſt æquale; ſequitur quod & ΓA æqualis ſit ipſi AB. Sed illud quoque ſciendum eſt, lineas, quæ in circuli circumferentia ordinatim applicantur, ad diametrum perpendiculares eſſe, atque in iiſdem rectis lineis in quibus ſunt parallelæ ipſi AΓ.

Per hoc autem theorema, eo modo quo dictum eſt in parabola, hyperbolam & ellipſim regulæ adminiculo deſcribemus. exponatur enim recta linea AB, & in infinitum producatur ad H; à puncto autem A ad rectos angulos ipſi AB ducatur AΓ: junctaque BΓ & producta, ſumantur in linea AH puncta quædam E, H, & à punctis E, H ipſi AΓ parallelæ ducantur EΘ, HK, & fiat AHK rectangulum æquale quadrato ex ZH, & rectangulum AEΘ æquale ipſi quadrato ex ΔE; & tranſibit hyperbola per puncta A, Δ, Z. ſimiliter eadem & in ellipſi conſtruemus.

PROP.

Prop. XXII. *Theor.*

Si parabolam vel hyperbolam recta linea in duobus punctis ſecet, non conveniens cum diametro ſectionis intra ſectionem: producta cum eadem diametro extra ſectionem conveniet.

SIT parabola, vel hyperbola, cujus diameter ΑΒ; & ſecet quæpiam recta linea ſectionem in duobus punctis Γ, Δ: dico rectam ΓΔ productam convenire cum ipſa ΑΒ extra ſectionem.

Applicentur enim à punctis Γ, Δ ordinatim rectæ ΓΕ, ΔΒ, & ſit primum ſectio parabola. quoniam igitur in parabola, ut quadratum ex ΓΕ ad quadratum ex ΔΒ, ita eſt [per 20. huj.] ΕΑ ad ΑΒ; major autem ΕΑ quam ΑΒ: erit quadratum ex ΓΕ quadrato ex ΔΒ majus; quare & linea ΓΕ major ipſa ΔΒ. & ſunt inter ſeſe parallelæ: ergo recta ΓΔ producta cum diametro ΑΒ extra ſectionem conveniet. ſed ſit ſectio hyperbola. itaq; quoniam [per 21. huj.] in hyperbola ut quadratum ex ΓΕ ad quadratum ex ΔΒ, ita eſt rectangulum ΖΕΑ ad rectangulum ΖΒΑ; quadratum ex ΓΕ majus erit quadrato ex ΔΒ. & ſunt parallelæ: igitur ΓΔ producta cum diametro ſectionis extra ſectionem conveniet.

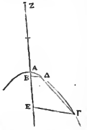


ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν παραβολὴν ἢ ὑπερβολὴν εὐθεῖα τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, μὴ συμπίπτουσα τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς ἐντὸς τῆς τομῆς· συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς ἐκτὸς τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τεμνέτω τις εὐθεῖα τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ, μὴ συμπίπτουσα τῇ διαμέτρῳ ἐντός· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἐκτὸς τῆς τομῆς τῇ ΑΒ.

Κατήχθωσαν ἀπὸ τῶν Γ, Δ τεταγμένως αἱ ΓΕ, ΔΒ, ἔστω δὲ πρῶτον ἡ τομὴ παραβολή. ἐπεὶ οὖν ἐν τῇ παραβολῇ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ, μείζων δὲ ἡ ΕΑ τῆς ΑΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ, ὥστε καὶ ἡ ΓΕ τῆς ΔΒ μείζων ἐστί. καί εἰσι παράλληλοι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΒ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς. ἀλλὰ δὲ ἔστω ὑπερβολή. ἐπεὶ οὖν ἐν τῇ ὑπερβολῇ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΒΑ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ. καί εἰσι παράλληλοι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς ἐκτὸς τῆς τομῆς.

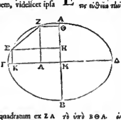


Prop. XXIII. *Theor.*

Si ellipſim recta linea ſecet inter duas diametros ſita: producta cum utraque earum extra ſectionem conveniet.

SIT ellipſis, cujus diametri ΑΒ, ΓΔ; & ſecet quædam recta ſectionem, videlicet ipſa ΕΖ, inter duas diametros ΑΒ, ΓΔ interjecta: dico ΕΖ productam convenire cum utraque earum extra ſectionem.

Applicentur enim à punctis Ε, Ζ ordinatim ad diametrum quidem ΑΒ rectæ ΗΕ, ΖΘ; ad ΔΓ vero ΕΚ, ΖΛ: eſt igitur [per 21. huj.] ut quadratum ex ΕΗ ad quadratum ex ΖΘ, ita rectangulum ΒΗΑ ad rectangulum ΒΘΑ. ut autem quadratum ex ΖΛ ad quadratum ex ΕΚ, ita rectangulum ΔΛΓ ad



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν ἔλλειψιν εὐθεῖα τέμνῃ μεταξὺ κειμένη τῶν διαμέτρων, ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν διαμέτρων ἐκτὸς τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ ἔλλειψις, ἧς διάμετροι ΑΒ, ΓΔ, καὶ τεμνέτω τις εὐθεῖα τὴν τομὴν ἡ ΕΖ μεταξὺ κειμένη τῶν ΑΒ, ΓΔ διαμέτρων· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

Κατήχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ τεταγμένως ἐπὶ μὲν τὴν ΑΒ αἱ ΗΕ, ΖΘ, ἐπὶ δὲ τὴν ΔΓ αἱ ΕΚ, ΖΛ· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘΑ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΛΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΚΓ,

ΔΚΓ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ ΒΗΑ μεῖζον τοῦ ὑπὸ ΒΘΑ, ἔγγιον γὰρ τὸ Η τῆς διχοτομίας, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΛΓ τοῦ ὑπὸ ΔΚΓ μεῖζον· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΗΕ τοῦ ἀπὸ ΖΘ. τὸ δὲ ἀπὸ ΖΛ τοῦ ἀπὸ ΕΚ μεῖζόν ἐστι· μείζων ἄρα καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΖΘ, ἡ δὲ ΖΛ τῆς ΕΚ. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ μὲν ΗΕ τῇ ΖΘ, ἡ δὲ ΖΛ τῇ ΕΚ· ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ διαμέτρων ἐκτὸς τῆς τομῆς.

rectangulum ΔΚΓ, atque eſt [per 5. 2.] rectangulum ΒΗΑ majus rectangulo ΒΘΑ; etenim Η propius accedit ad punctum quo diameter ΑΒ bifariam ſecatur; & rectangulum ΔΛΓ majus eſt rectangulo ΔΚΓ: quadratum igitur ex ΗΕ majus eſt quadrato ex ΖΘ, & quadratum ex ΖΛ majus quadrato ex ΕΚ: idcirco linea ΗΕ major eſt quam ipſa ΖΘ, & ΖΛ major quam ΕΚ. parallela autem eſt ΗΕ ipſi ΖΘ, itemque ΖΛ ipſi ΕΚ: ergo ΕΖ producta cum utraque diametro ΑΒ, ΓΔ extra ſectionem conveniet.

EUTOCIUS.

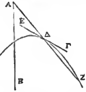
Δεῖ δὲ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἐν τῇ προτάσει δύο διαμέτρους λέγει, οὐχ ἁπλῶς τὰς τυχούσας, ἀλλὰ τὰς καλουμένας συζυγεῖς, ὧν ἑκατέρα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἦκται, καὶ μέσον λόγον ἔχει τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν τῆς ἑτέρας διαμέτρου, καὶ διὰ τοῦτο δίχα τέμνουσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλους, ὡς δέδεικται ἐν τῷ πεντεκαιδεκάτῳ θεωρήματι. εἰ γὰρ μὴ οὕτως ληφθῇ, συμβήσεται τὴν μεταξὺ εὐθεῖαν τῶν δύο διαμέτρων τῇ ἑτέρᾳ αὐτῶν παράλληλον εἶναι, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ἐπειδὴ δὲ τὸ Η ἐγγύτερόν ἐστι τοῦ Μ, τοῦ τῆς διχοτομίας τῆς ΑΒ, ἤπερ τὸ Θ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ ΒΗΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΗΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΜ, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΘΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΘΜ ἴσον τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἀπὸ ΘΜ τοῦ ἀπὸ ΗΜ μεῖζον· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΗΑ μεῖζον τοῦ ὑπὸ ΒΘΑ.

Attendendum eſt in propoſitione *Apollonium* duas diametros intelligere, non ſimpliciter quaſcunque, ſed quæ conjugatæ diametri appellentur; quarum utraque ordinatim applicatæ parallela ducitur, mediamque proportionem habet inter latera figuræ alterius diametri; & idcirco rectas invicem parallelas bifariam dividunt, ut in decimo-quinto theoremate eſt demonſtratum. niſi enim ita ſit, continget, lineam inter duas diametros inter-mediam alteri ipſarum eſſe parallelam, quod fieri non poteſt. quoniam autem Η propius accedit ad Μ medium punctum rectæ ΑΒ quam ipſum Θ, rectangulum quidem ΒΗΑ una cum quadrato ex ΗΜ æquale eſt quadrato ex ΑΜ, rectangulum vero ΒΘΑ una cum quadrato ex ΘΜ eidem eſt æquale; & quadratum ex ΘΜ majus eſt quadrato ex ΗΜ: erit igitur rectangulum ΒΗΑ rectangulo ΒΘΑ majus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδʹ.

Ἐὰν παραβολῇ ἢ ὑπερβολῇ εὐθεῖα, καθ' ἓν σημεῖον συμπίπτουσα, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς· συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ.

Ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ συμπιπτέτω αὐτῇ εὐθεῖα ἡ ΓΔΕ κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς· λέγω ὅτι συμπεσεῖται τῇ ΑΒ διαμέτρῳ.

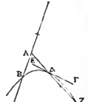


Εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ· ἡ ΔΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Α, καὶ ἔστι μεταξὺ τῆς τε τομῆς καὶ τῆς ΔΑ ἡ ΔΕ· ἡ ΓΔΕ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

Prop. XXIV. *Theor.*

Si parabolæ vel hyperbolæ recta linea, in uno puncto occurrens, producta ex utraque parte extra ſectionem cadat: cum diametro conveniet.

Sit parabola vel hyperbola, cujus diameter ΑΒ; occurratque ipſi recta ΓΔΕ in puncto Δ, quæ producta ex utraque parte extra ſectionem cadat: dico ΓΔΕ cum diametro ΑΒ convenire.



Sumatur enim aliquod punctum Ζ in ſectione; & jungatur ΔΖ: ergo [per 22. hujus] ΔΖ producta conveniet cum diametro extra ſectionem. conveniat autem in Α puncto, & recta ΔΕ eſt inter ſectionem & ΔΑ. recta igitur ΓΔΕ producta cum diametro extra ſectionem conveniet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κεʹ.

Ἐὰν ἐλλείψει εὐθεῖα συμπίπτουσα μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς

Prop. XXV. *Theor.*

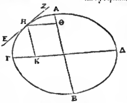
Si ellipſi recta linea occurrens inter duas diametros *, producta ex utraque

* Nempe conjugatos ut in XXIII.

parte cadat extra ſectionem: cum utraque diametro conveniet.

SIT ellipſis, cujus diametri A B, Γ Δ; & ipſi occurrat recta E Z inter duas diametros in puncto H; & producta in utramque partem extra ſectionem cadat: dico E Z cum utraque diametro A B, Γ Δ convenire.

Applicentur enim à puncto H ordinatim ad diametros A B, Γ Δ rectæ H Θ, H K. itaque quoniam H K eſt parallela ipſi A B, convenit autem quædam E Z cum H K; cum ipſa quoque A B conveniet. eodem modo & E Z cum diametro Γ Δ convenire demonſtrabitur.



πίπτῃ τῆς τομῆς· συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν διαμέτρων.

ΕΣΤΩ ἔλλειψις, ἧς διάμετροι αἱ A B, Γ Δ, καὶ ταύτῃ συμπιπτέτω τις εὐθεῖα μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων ἡ E Z κατὰ τὸ H, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς· λέγω ὅτι ἡ E Z συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν A B, Γ Δ.

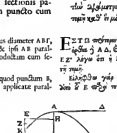
Κατήχθωσαν ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὰς A B, Γ Δ τεταγμένως αἱ H Θ, H K. ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ H K τῇ A B, συμπέπτωκε δέ τις τῇ H K ἡ E Z· καὶ τῇ A B ἄρα συμπεσεῖται. ὁμοίως δὴ καὶ τῇ Γ Δ συμπεσεῖται E Z.

Prop. XXVI. *Theor.*

Si in parabola vel hyperbola recta linea ducatur diametro ſectionis parallela: in uno tantum puncto cum ſectione conveniet.

SIT primum parabola, cujus diameter A B Γ, rectum autem latus A Δ; & ipſi A B parallela ducatur E Z: dico E Z productam cum ſectione convenire.

Sumatur enim in ipſa E Z aliquod punctum E, à quo ducatur E H ordinatim applicatæ parallela, & quadrato ex H E majus ſit rectangulum Δ A Γ; à puncto autem Γ ordinatim applicetur Γ Θ: ergo [per 11. huj.] quadratum ex Θ Γ æquale eſt rectangulo Δ A Γ. atque eſt rectangulum Δ A Γ majus quadrato ex E H: quadratum igitur ex Θ Γ quadrato ex E H majus erit; & idcirco linea Θ Γ major linea E H. & ſunt parallelæ inter ſe: ergo E Z producta ſecabit Θ Γ; proptereaque conveniet cum ſectione. conveniat in K. dico in uno tantum puncto K convenire. ſi enim fieri poteſt, conveniat etiam in Λ. quoniam igitur parabolam recta linea ſecat in duobus punctis, ſi producatur [per 22. huj.] conveniet cum diametro ſectionis; quod eſt abſurdum. poſitum enim eſt ipſi eſſe parallelam. ergo E Z producta in uno tantum puncto cum ſectione conveniet.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Ἐὰν παραβολῇ ἢ ὑπερβολῇ εὐθεῖα ἀχθῇ παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς· συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

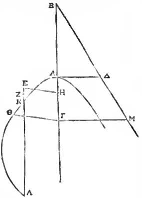
ΕΣΤΩ πρότερον παραβολή, ἧς διάμετρος A B Γ, ὀρθία δὲ ἡ A Δ, καὶ τῇ A B παράλληλος ἤχθω ἡ E Z· λέγω ὅτι ἡ E Z ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς E Z, τὸ E, καὶ ἀπὸ τοῦ E παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ E H, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς H E μεῖζον ἔστω τὸ ὑπὸ Δ A Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ Γ Θ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Θ Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ A Γ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ Δ A Γ τοῦ ἀπὸ E H· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ Θ Γ τοῦ ἀπὸ E H· μείζων ἄρα καὶ ἡ Θ Γ τῆς E H. καί εἰσι παράλληλοι· ἡ E Z ἄρα ἐκβαλλομένη τέμνει τὴν Θ Γ, ὥστε καὶ τῇ τομῇ συμπεσεῖται. συμπιπτέτω κατὰ τὸ K. λέγω δὴ ὅτι καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον τὸ K συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατὸν συμπιπτέτω καὶ κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν παραβολὴν εὐθεῖα τέμνει κατὰ δύο σημεῖα, ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς· ὅπερ ἄτοπον. ὑπόκειται γὰρ παράλληλος. ἡ E Z ἄρα ἐκβαλλομένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον συμπίπτει τῇ τομῇ.

Ἔστω

Digitized by Google

Ἔστω δὴ ἡ τομὴ ὑπερβολή, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω· τῶν αὐτῶν δὴ κατασκευασθέντων, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΔ παράλληλος ἡ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΜΓΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΔΑΓ, καὶ ἔστι τῷ μὲν ΜΓΑ ἴσον τὸ ἀπὸ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΑΓ μεῖζον τοῦ ἀπὸ ΗΕ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ τοῦ ἀπὸ ΕΗ· ὥστε καὶ ἡ ΓΘ τῆς ΕΗ μείζων ἐστί, καὶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον συμβήσεται.



Sit deinde ſectio hyperbola; tranſverſum vero figuræ latus AB, & AΔ rectum; jungaturque ΔB & producatur: iiſdem igitur, quæ ſupra, diſpoſitis, ducatur à puncto Γ ipſi AΔ parallela ΓM. & quoniam rectangulum MΓA majus eſt rectangulo ΔAΓ; ipſique MΓA æquale eſt [per 12. huj.] quadratum ex ΓΘ; & ΔAΓ rectangulum majus eſt quadrato ex HE: erit & quadratum ex ΓΘ quadrato ex EH majus; & ideo linea ΓΘ major linea EH; hinc eadem quæ ſupra in parabola conſequentur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

Ἐὰν παραβολῆς τὴν διάμετρον εὐθεῖα τέμνῃ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

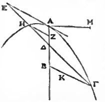
Prop. XXVII. *Theor.*

Si parabolæ diametrum ſecet recta linea: producta in utramque partem cum ſectione conveniet.

Ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ. καὶ ταύτην τεμνέτω τις εὐθεῖα ἐντὸς τῆς τομῆς ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Ἤχθω γάρ τις ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΑΕ· ἡ ΑΕ ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς· ἤτοι δὴ ἡ ΓΔ τῇ ΑΕ παράλληλός ἐστιν, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν παράλληλός ἐστιν αὐτῇ, τεταγμένως κατῆκται· ὥστε ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Μὴ ἔστω δὴ παράλληλος τῇ ΑΕ, ἀλλ' ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω τῇ ΑΕ κατὰ τὸ Ε. ὅτι μὲν οὖν τῇ τομῇ συμπίπτει, ἐπὶ τὰ μέρη ἐφ' ἅ ἐστι τὸ Ε, φανερόν. εἰ γὰρ τῇ ΑΕ συμβάλλει, πολὺ πρότερον τέμνει τὴν τομήν. λέγω πάλιν ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τομῇ. ἔστω γὰρ παρ' ἣν δύνανται ἡ ΜΑ, καὶ τεταγμένως κατηγμένη ἡ ΗΖ, καὶ τὸ ἀπὸ ΑΔ ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ ΒΑΖ, καὶ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΓΒ συμπιπτέτω τῇ ΔΓ κατὰ τὸ Γ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΑΒ τῷ ἀπὸ ΑΔ· ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΑΔ ἡ ΔΑ πρὸς ΑΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς λοιπὴν τὴν ΔΖ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ. ἐπειδὴ δὲ ἴσον τὸ ἀπὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ



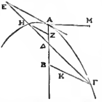
SIT parabola, cujus diameter AB; & ipſam AB ſecet quæpiam recta ΓΔ intra ſectionem: dico ΓΔ productam in utramque partem cum ſectione convenire.

Ducatur enim à puncto A ordinatim applicatæ parallela AE; ergo [per 17. huj.] AE extra ſectionem cadet: itaque vel ΓΔ ipſi AE parallela eſt, vel non. & ſi quidem ſit parallela, ordinatim applicata eſt: quare [per 19. huj.] producta in utramque partem conveniet cum ſectione.

Sed non ſit parallela, verum producatur & conveniat cum AE in E puncto. conſtat igitur ipſam cum ſectione convenire ad partes E. ſi enim convenit cum AE, multo prius ſectioni occurrit. dico rurſus eandem & ad alteras partes productam convenire cum ſectione. ſit enim MA linea juxta quam poſſunt, & HZ ordinatim applicetur, quadratum autem ex AΔ æquale ſit rectangulo BAZ; & ordinatim applicatæ parallela BΓ conveniat cum ΔΓ in Γ puncto. quoniam igitur rectangulum ZAB æquale eſt quadrato ex AΔ; erit [per 17. 6.] ut AB ad AΔ ita ΔA ad AZ: quare [per 19. 5.] & reliqua BΔ ad reliquam ΔZ eſt ut BA ad AΔ: & propterea [per 22. 6.] ut quadratum ex BΔ ad quadratum ex ZΔ, ita quadratum ex BA ad quadratum ex AΔ. rurſus quoniam quadratum ex AΔ æquale eſt rectangulo

BAZ,

BAZ, ut BA ad AZ ſic [per cor. 20. 6] erit quadratum ex BA ad quadratum ex AΔ; hoc eſt quadratum ex BΔ ad quadratum ex ΔZ. ut autem quadratum ex BΔ ad quadratum ex ΔZ, ſic quadratum ex BΓ ad quadratum ex ZH; & [per 1. 6.] ut BA ad AZ ſic rectangulum BAM ad rectangulum ZAM: igitur ut quadratum ex BΓ ad quadratum ex ZH ita rectangulum BAM ad ipſum ZAM, & permutando [per 16. 5.] ut quadratum ex BΓ ad rectangulum BAM ita quadratum ex ZH ad rectangulum ZAM. at [per 11. huj.] quadratum ex ZH æquale eſt rectangulo ZAM, propter ſectionem: ergo & quadratum ex BΓ rectangulo BAM æquale erit. eſt autem [per conſtr.] AM rectum figuræ latus, & BΓ ordinatim applicatæ parallela: ſectio igitur tranſit per Γ punctum, & ΓΔ cum ſectione neceſſario convenit in puncto Γ.



BAZ, ἔστιν ὡς ἡ BA πρὸς AZ οὕτως τὸ ἀπὸ BA πρὸς τὸ ἀπὸ AΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ BΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔZ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ BΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔZ οὕτω τὸ ἀπὸ BΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ZH· ὡς δὲ ἡ BA πρὸς AZ οὕτως τὸ ὑπὸ BAM πρὸς τὸ ὑπὸ ZAM· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ BΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ZH οὕτως τὸ ὑπὸ BAM πρὸς τὸ ὑπὸ ZAM· καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ἀπὸ BΓ πρὸς τὸ ὑπὸ BAM οὕτως τὸ ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ὑπὸ ZAM. τὸ δὲ ἀπὸ ZH ἴσον τῷ ὑπὸ ZAM, διὰ τὴν τομήν· καὶ τὸ ἀπὸ BΓ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ BAM. πλαγία δὲ ἡ AM, παρὰ τεταγμένως δὲ κατηγμένην ἡ BΓ· ἡ ἄρα τομὴ ἔρχεται διὰ τοῦ Γ, καὶ συμπίπτει τῇ τομῇ ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Γ.

EUTOCIUS.

In aliquibus exemplaribus vigeſimiſeptimi theorematis talis legitur demonſtratio.

Ἐν τισὶν ἀντιγράφοις τοῦ εἰκοστοῦ ἑβδόμου θεωρήματος φέρεται τοιαύτη ἀπόδειξις.

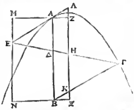
SIT parabola cujus diameter AB, & hanc ſecet recta quædam HΔ intra ſectionem: dico HΔ productam ad utraſque partes cum ſectione convenire.

Ducatur enim per A punctum ordinatim applicatæ parallela AE: ergo [per 17. huj] AE cadet extra ſectionem; itaque vel HΔ ipſi AE parallela erit, vel non. & ſiquidem HE ſit parallela, ipſa ordinatim applicata eſt, ideoque [per 19. huj] ſi producatur ad utraſque partes, bifariam ſecta à diametro conveniet cum ſectione. ſed non ſit ipſi AE parallela, ſed producta conveniat cum AE in E puncto. perſpicuum eſt ipſam, ſi cum AE convenit, multo prius ſectioni occurrere.

Ἔστω παραβολὴ ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ ταύτην τεμνέτω εὐθεῖά τις ἡ HΔ ἐντὸς τῆς τομῆς· λέγω ὅτι ἡ HΔ ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Ἤχθω γάρ τις διὰ τοῦ A παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ AE· ἡ AE ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς· ἤτοι δὴ ἡ HΔ τῇ AE παράλληλός ἐστιν, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν παράλληλός ἐστι, τεταγμένως κατῆκται· ὥστε ἐκβαλλομένη ἐφ᾽ ἑκάτερα, ἐπεὶ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς διαμέτρου, συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ἔστω δὴ μὴ παράλληλος τῇ AE, ἀλλὰ ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω τῇ AE κατὰ τὸ E. δῆλον οὖν εἰ μὲν τῇ AE συμβάλλει, ὅτι πολὺ πρότερον τεμεῖ τὴν τομήν.

Dico etiam ad alteras partes productam cum ſectione convenire. ſit enim MA linea juxta quam poſſunt, & in directum ipſi producatur AZ: ergo MA ad AB eſt perpendicularis. fiat ut quadratum ex AE ad triangulum ABΔ ſic linea MA ad AZ; & per puncta M, Z ipſi AB parallelæ ducantur ZHK, MN. cum igitur quadrilaterum ſit AAΔH, & poſitione datur AA; ducatur ΓKB ipſi AA parallela, quæ abſcindat ΓKH triangulum quadrilatero AAΔH æquale, & per B ipſi ZAM parallela ducatur ΞBN. itaque quoniam [per conſtr.] ut quadratum ex AE ad triangulum AEΔ ita eſt MA ad AZ, & ut quadratum ex AB ad AEΔ triangulum ita quadratum ex ΓB ad triangulum ΔΓB; ete-



Λέγω ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τομῇ. ἔστω γὰρ παρ᾽ ἣν δύνανται ἡ MA, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας αὐτῇ ἡ AZ· ἡ MA ἄρα τῇ AB πρὸς ὀρθάς ἐστι. πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ AE πρὸς τὸ AEΔ τρίγωνον οὕτως ἡ MA πρὸς τὴν AZ, καὶ διὰ τῶν M, Z τῇ AB παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ZK, MN. τετραπλεύρου οὖν ὄντος τοῦ AAΔH, καὶ θέσει οὔσης τῆς AA, ἤχθω τῇ AA παράλληλος ἡ ΓKB, ἀποτέμνουσα τὸ ΓKH τρίγωνον τῷ AAΔH τετραπλεύρῳ ἴσον, καὶ διὰ τοῦ B τῇ ZAM παράλληλος ἤχθω ἡ ΞBN. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ AE πρὸς τὸ AEΔ τρίγωνον οὕτως ἡ MA πρὸς AZ· καὶ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ AE πρὸς τὸ AEΔ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΓB πρὸς ΔΓB τρίγωνον, παράλληλος

γάρ

Digitized by Google

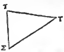
γάρ ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΓΒ, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΓΕ, ΑΒ. ὡς δὲ ἡ ΜΑ πρὸς ΑΖ οὕτως τὸ ΑΜΝΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΑΖΞΒ παραλληλόγραμμον· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΓΔΒ τρίγωνον οὕτως τὸ ΑΜΝΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΑΖΞΒ παραλληλόγραμμον· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ πρὸς τὸ ΑΜΝΒ παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ ΓΔΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΖΞΒ παραλληλόγραμμον. ἴσον δέ ἐστι τὸ ΑΖΞΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔΒ τριγώνῳ· (ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΗΚ τρίγωνον τῷ ΑΛΗΔ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον, κοινὸν δὲ τὸ ΗΔΒΚ τετράπλευρον· τὸ ΛΑΒΚ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔΒ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. τὸ δὲ ΛΑΒΚ παραλληλόγραμμον τῷ ΖΑΒΞ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΑΒ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΒ, ΛΚ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΔΒ τρίγωνον τῷ ΞΖΑΒ παραλληλογράμμῳ.) ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΓΒ τῷ ΑΜΝΒ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. τὸ δὲ ΑΜΝΒ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΑΒ, ἡ γὰρ ΜΑ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΒ. καί ἐστιν ἡ ΜΑ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά, ἡ δὲ ΑΒ διάμετρος, καὶ ἡ ΓΒ τεταγμένως κατηγμένη, παράλληλος γάρ ἐστι τῇ ΑΕ· τὸ Γ ἄρα πρὸς τῇ τομῇ ἐστιν· ἡ ΔΗΓ ἄρα συμβάλλει τῇ τομῇ κατὰ τὸ Γ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

nim ΑΕ, ΓΒ ſunt parallelæ, & ipſas conjungunt ΓΕ, ΑΒ. ut autem ΜΑ ad ΑΖ ita [per 1. 6.] ΑΜΝΒ parallelogrammum ad parallelogrammum ΑΖΞΒ: erit ut quadratum ex ΓΒ ad triangulum ΓΔΒ ita ΑΜΝΒ parallelogrammum ad parallelogrammum ΑΖΞΒ; & permutando ut quadratum ex ΓΒ ad parallelogrammum ΑΜΝΒ ita ΓΔΒ triangulum ad parallelogrammum ΑΖΞΒ, parallelogrammum autem ΑΖΞΒ triangulo ΓΔΒ eſt æquale: (quoniam enim ΓΗΚ triangulum æquale eſt [per conſtr.] quadrilatero ΑΛΗΔ, & quadrilaterum ΗΔΒΚ utrique commune; erit ΛΑΒΚ parallelogrammum æquale triangulo ΓΔΒ. ſed [per 35. 1.] ΛΑΒΚ parallelogrammum æquale eſt parallelogrammo ΖΑΒΞ, quia eſt ſuper eadem baſi ΑΒ & in eiſdem parallelis ΑΒ, ΛΚ: ergo ΓΔΒ triangulum parallelogrammo ΞΖΑΒ æquale erit.) quare [per 14. 5.] & quadratum ex ΓΒ æquale parallelogrammo ΑΜΝΒ: parallelogrammum autem ΑΜΝΒ rectangulo ΜΑΒ æquale, quia ΜΑ ad ΑΒ eſt perpendicularis; ergo rectangulum ΜΑΒ eſt æquale quadrato ex ΓΒ. atque eſt ΜΑ rectum figuræ latus, ΑΒ diameter & ΓΒ ordinatim applicata, quia ipſi ΑΕ eſt parallela: ex quibus ſequitur punctum Γ eſſe in ſectione; ergo ΔΗΓ cum ſectione convenit in Γ. quod erat demonſtrandum.

Commentarius in Praecedentem Demonſtrationem.

ª Πεποιήσθω δὴ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΕΔ τρίγωνον οὕτως ἡ ΜΑ πρὸς ΑΖ.] Τοῦτο δέδεικται ἐν χωλίῳ τοῦ ἑνδεκάτου θεωρήματος. ἀναγράψαντες γὰρ τὸ ἀπὸ ΑΕ, καὶ τῇ πλευρᾷ αὐτοῦ χωρίον τῷ ΑΕΔ τριγώνῳ ἴσον παραβαλόντες, ἕξομεν τὸ ζητούμενον.

ᵇ Τετραπλεύρου ὄντος τοῦ ΛΑΔΗ, καὶ θέσει οὔσης τῆς ΛΑ, ἤχθω τῇ ΛΑ παράλληλος ἡ ΓΚΒ, ἀποτέμνουσα τὸ ΓΚΗ τρίγωνον τῷ ΛΑΔΗ τετραπλεύρῳ ἴσον.] Τοῦτο δὲ ποιήσομεν οὕτως. ἐὰν γάρ, ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις ἐμάθομεν, τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΛΑΔΗ τετραπλεύρῳ ἴσον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ ΑΕΔ τριγώνῳ ὅμοιον τὸ αὐτὸ συστησώμεθα τὸ ΣΤΥ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΣΤ τῇ ΑΔ, καὶ ἀπολάβωμεν τῇ μὲν ΤΣ ἴσην τὴν ΗΚ, τῇ δὲ ΤΥ ἴσην τὴν ΗΓ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΓΚ, ἔσται τὸ ζητούμενον. ἐπεὶ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Υ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ Δ γωνίᾳ, τουτέστι τῇ Η· διὰ τοῦτο ἴσον καὶ ὅμοιον τὸ ΓΗΚ τῷ ΣΤΥ. καὶ ἴση ἡ Γ γωνία τῇ Ε, καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΑΒ. φανερὸν δὲ ὅτι ὅταν ἡ ΑΒ ἄξων ἐστίν, ἡ ΜΑ ἐφάπτεται τῆς τομῆς· ὅταν δὲ μὴ ἄξων, τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἄγεται πάντως τῇ διαμέτρῳ.



ª Fiat ut quadratum ex ΑΕ ad triangulum ΑΒΔ ſic ΜΑ ad ΑΖ.] Demonſtratum eſt hoc in commentariis in undecimum theorema. ſi enim, deſcribentes quadratum lineæ ΑΕ, ipſius lateri appoſuerimus [per 44. 1.] ſpatium triangulo ΑΕΔ æquale, factum jam erit quod quæritur.

ᵇ Cum igitur quadrilaterum ſit ΛΑΔΗ, & poſitione data ΛΑ, ducatur ΓΚΒ ipſi ΛΑ parallela, quæ abſcindat ΓΚΗ triangulum quadrilatero ΛΑΔΗ æquale.] Hoc ita faciemus. Si enim, ut in elementis [ad 25. 6.] didicimus, dato rectilineo, videlicet quadrilatero ΛΑΔΗ, æquale & triangulo dato ΑΕΔ ſimile conſtituerimus triangulum ΣΤΥ, ita ut latus ΣΤ lateri ΑΔ reſpondeat, & [per 3. 1.] fecerimus ΗΚ ipſi ΤΣ æqualem, & ΗΓ æqualem ΤΥ, & junxerimus ΓΚ; factum erit quod quæritur. quoniam enim angulus ad Υ æqualis eſt angulo ad Δ, hoc eſt ei qui ad Η; erit triangulum ΓΗΚ æquale ac ſimile triangulo ΣΤΥ, & angulus Γ angulo Ε æqualis, & alterni ſunt: linea igitur ΓΚ [per 27. 1.] eſt parallela ipſi ΑΒ. perſpicuum autem eſt, quod, quando ΑΒ ſit axis, linea ΜΑ tangit ſectionem; quando vero non ſit axis, ſecat, & ad diametrum omnino perpendicularis ducitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐντὸς τῆς ἑτέρας τομῆς, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ ἐφαπτομένῃ εὐθεῖα· ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι ὧν ἡ ΑΒ διάμετρος, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα

Prop. XXVIII. *Theor.*

Si recta linea unam oppoſitarum ſectionum contingat, ſumatur autem punctum intra alteram ſectionem, & per ipſum recta contingenti parallela ducatur: producta ad utraſque partes cum ſectione conveniet.

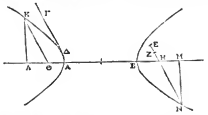
Sint oppoſitæ ſectiones, quarum diameter ΑΒ; & ſectionem, in qua eſt Α, contingat quævis

recta Γ Δ; ſumatur autem aliquod punctum E intra alteram ſectionem; & per E ducatur E Z ipſi Γ Δ parallela: dico E Z productam ad utraſque partes cum ſectione convenire.

Quoniam enim oſtenſum eſt [ad 24. huj.] Γ Δ productam convenire cum diametro A B; atque eſt E Z ipſi parallela: E Z producta cum diametro conveniet. conveniat autem in H; & ipſi H B æqualis ponatur Λ Θ. deinde per Θ ducatur Θ K parallela ipſi E Z; & ſit K Λ ordinatim applicata: ponatur H M æqualis Λ Θ, ducaturque M N ordinatim applicatæ parallela: &

ἡ Γ Δ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τῆς ἑτέρας τομῆς τὸ E, καὶ διὰ τοῦ E τῇ Γ Δ παράλληλος ἤχθω ἡ E Z· λέγω ὅτι ἡ E Z ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὅτι ἡ Γ Δ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ A B διαμέτρῳ, καί ἐστι παράλληλος αὐτῇ ἡ E Z· ἡ E Z ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ H, καὶ τῇ H B ἴση κείσθω ἡ Λ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ τῇ Z E παράλληλος ἤχθω ἡ Θ K, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ K Λ, καὶ τῇ Λ Θ ἴση κείσθω ἡ H M, καὶ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ M N, καὶ προσεκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ H N.



H N in directum producatur. itaque quoniam K Λ ipſi M N eſt parallela; & K Θ ipſi H N; & eſt Λ M una eademque recta: triangulum K Θ Λ [per 9.1.& 4.6.] ſimile eſt triangulo HMN. eſt autem Λ Θ æqualis H M: quare & KΛ ipſi MN æqualis erit: ideoque quadratum ex K Λ æquale quadrato ex M N. rurſus quoniam Λ Θ æqualis eſt H M & Λ Θ ipſi B H, communis autem A B; erit B Λ æqualis A M; & propterea rectangulum B Λ A rectangulo A M B æquale: ut igitur rectangulum B Λ A ad quadratum ex K Λ, ita rectangulum A M B ad quadratum ex M N. ſed [per 21. huj.] ut rectangulum B Λ A ad quadratum ex Λ K, ita tranſverſum figuræ latus ad rectum: quare ut rectangulum A M B ad quadratum ex M N ita erit latus tranſverſum ad rectum. ex quibus colligitur, punctum N in ſectione eſſe: ergo E Z producta cum ſectione conveniet in puncto N. ſimiliter oſtendemus, ſi ex altera parte producatur, cum ſectione convenire.

καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ K Λ τῇ M N, ἡ δὲ K Θ τῇ H N, καὶ μία εὐθεῖά ἐστιν ἡ Λ M, ὅμοιόν ἐστι τὸ K Θ Λ τρίγωνον τῷ H M N τριγώνῳ. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ Λ Θ τῇ H M· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ K Λ τῇ M N· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ K Λ τῷ ἀπὸ M N ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Λ Θ τῇ H M, ἡ δὲ Λ Θ τῇ B H, κοινὴ δὲ ἡ A B· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ B Λ τῇ A M· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ B Λ A τῷ ὑπὸ A M B· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ B Λ A πρὸς τὸ ἀπὸ K Λ οὕτως τὸ ὑπὸ A M B πρὸς τὸ ἀπὸ M N. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ B Λ A πρὸς τὸ ἀπὸ Λ K οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ A M B πρὸς τὸ ἀπὸ M N οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· τὸ N ἄρα πρὸς τῇ τομῇ ἐστιν· ἡ E Z ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ κατὰ τὸ N. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

EUTOCIUS.

Quod ſi Γ Δ hyperbolam ſecet, eadem ſequentur, quemadmodum in decimo octavo theoremate.

Ὅτι κἂν ἡ Γ Δ τέμνῃ τὴν ὑπερβολὴν τὰ αὐτὰ συμβήσεται, ὥσπερ ἐπὶ τοῦ δεκάτου ὀγδόου.

Prop. XXIX. *Theor.*

Si in oppoſitis ſectionibus recta linea per centrum ducta occurrat uni ſectioni; ulterius producta alteram quoque ſecabit ſectionem.

Sint ſectiones oppoſitæ, quarum diameter A B, centrum autem Γ; & recta Γ Δ ſectionem A Δ ſecet: dico ſectionem Γ Δ alteram quoque ſecare.

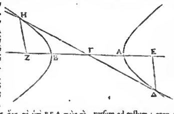
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις εὐθεῖα προσπίπτῃ διὰ τοῦ κέντρου πρὸς ὁποτέραν τῶν τομῶν· ἐκβαλλομένη τέμνει τὴν ἑτέραν τομήν.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι ὧν διάμετρος ἡ A B, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἡ Γ Δ τεμνέτω τὴν A Δ τομήν· λέγω ὅτι καὶ τὴν ἑτέραν τομὴν τεμεῖ.

Τεταγμένως

Τεταγμένως γὰρ κατήχθω ἡ ΕΔ, καὶ τῇ ΑΕ ἴση κείσθω ἡ ΒΖ, καὶ τεταγμένως ἤχθω ἡ ΖΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΒΖ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΕΑ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΒΕΑ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΕΔ τῷ ἀπὸ ΖΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΕΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΖΗ, καὶ εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΕΖ, καὶ παράλληλος ἡ ΕΔ τῇ ΖΗ· καὶ ἡ ΔΗ ἄρα εὐθεῖά ἐστι, καὶ ἡ ΓΔ ἄρα τεμεῖ καὶ τὴν ἑτέραν τομήν.



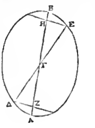
Ordinatim enim applicetur ΕΔ; ipſique ΑΕ ponatur æqualis ΒΖ; & ΖΗ ordinatim ducatur. quoniam igitur ΒΑ, ΒΖ æquales ſunt, & ΑΒ utrique communis; rectangulum ΒΕΑ rectangulo ΑΖΒ eſt æquale. & quoniam [per 21. huj.] ut rectangulum ΒΕΑ ad quadratum ex ΔΕ ita eſt tranſverſum latus ad rectum: ut autem rectangulum ΑΖΒ ad quadratum ex ΖΗ ita latus tranſverſum ad rectum: ergo ut rectangulum ΒΕΑ ad quadratum ex ΔΕ ſic rectangulum ΑΖΒ ad quadratum ex ΖΗ. ſed æquale eſt rectangulum ΒΕΑ rectangulo ΑΖΒ: quadratum igitur ex ΔΕ [per 14. 5.] quadrato ex ΖΗ ex æquale. quod cum ΕΓ æqualis ſit ipſi ΓΖ; & ΔΕ ipſi ΖΗ; ſitque ΕΖ recta, & ΕΔ ipſi ΖΗ parallela; erit [per 32. 6.] & ΔΗ recta: ergo ΓΔ ſectionem quoque alteram ſecabit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἢ ἀντικειμέναις εὐθεῖα ἀχθῇ, ἐφ' ἑκάτερα τοῦ κέντρου συμπίπτουσα τῇ τομῇ· δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ κέντρον.

Ἔστω ἔλλειψις, ἢ ἀντικείμεναι, διάμετρος δὲ αὐτῶν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΓΕ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΓΕ.

Ἤχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΔΖ, ΕΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ· καὶ [a] ὡς ἄρα (ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως συνθέντι, ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι) τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ

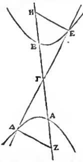


Prop. XXX. *Theor.*

Si in ellipſi, vel oppoſitis ſectionibus, recta linea ducatur, ad utraſque centri partes ſectioni occurrens: ad centrum bifariam ſecabitur.

SIT ellipſis, vel oppoſitæ ſectiones, quarum diameter ΑΒ, centrum Γ; & per Γ ducatur recta ΔΓΒ: dico ΓΔ ipſi ΓΒ æqualem eſſe.

Ordinatim enim applicentur ΔΖ, ΕΗ. & quoniam ut rectangulum ΒΖΑ ad quadratum ex ΖΔ ita eſt [per 21. huj.] tranſverſum latus ad rectum; & ut rectangulum ΑΗΒ ad quadratum ex ΗΕ, ita latus tranſverſum ad rectum: erit [per 11. 5.] ut rectangulum ΒΖΑ ad quadratum ex ΖΔ, ita rectangulum ΑΗΒ ad quadratum ex ΗΒ; & permutando [per 16. 5.] ut rectangulum ΒΖΑ ad rectangulum ΑΗΒ ita quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΗΕ. ut autem quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΕΗ ita [per 4. & 22. 6.] quadratum ex ΖΓ ad quadratum ex ΓΗ: ergo permutando, ut rectangulum ΒΖΑ ad quadratum ex ΓΖ ita rectangulum ΑΗΒ ad quadratum ex ΓΗ. [a] ut igitur (in ellipſi componendo, in oppoſitis vero ſectionibus invertendo & per converſionem rationis) quadratum ex ΑΓ ad quadratum



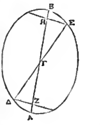
ex

ex Γ Z, ita quadratum ex B Γ ad quadratum ex Γ H; quadratum autem ex A Γ æquale eſt quadrato ex Γ B: ergo & quadratum ex Z Γ quadrato ex Γ H æquale erit: idcircoque Z Γ ipſi Γ H æqualis. & cum Δ Z, H E inter ſe ſint parallelæ, neceſſe eſt [per 4.1.] Δ Γ ipſi Γ E æqualem eſſe.

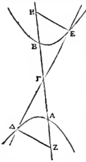
ἀπὸ Γ Z οὕτως τὸ ἀπὸ B Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ H. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ A Γ τῷ ἀπὸ Γ B· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ Z Γ τῷ ἀπὸ Γ H· ἴση ἄρα ἡ Z Γ τῇ Γ H. καί εἰσι παράλληλοι αἱ Δ Z, H E· ἴση ἄρα καὶ ἡ Δ Γ τῇ Γ E.

EUTOCIUS.

a Ut igitur in ellipſi componendo, in oppoſitis vero invertendo & per converſionem rationis.] In ellipſi quidem ita dicemus. quoniam ut rectangulum A Z B ad quadratum ex Δ Z ita eſt rectangulum A H B ad quadratum ex H E. ut autem quadratum ex Δ Z ad quadratum ex Z Γ ita quadratum ex H E ad quadratum ex H Γ; erit igitur ex æquali [per 22. 5.] ut rectangulum A Z B ad quadratum ex Z Γ ita rectangulum A H B ad quadratum ex H Γ, & componendo ut rectangulum A Z B una cum quadrato ex Z Γ ad quadratum ex Z Γ, hoc eſt [per 5. 2] quadratum ex A Γ ad quadratum ex Z Γ (etenim recta A B ſecatur in partes æquales ad punctum Γ & in partes inæquales ad Z) ita rectangulum A H B una cum quadrato ex H Γ ad quadratum ex H Γ; hoc eſt, propter eandem cauſam, quadratum ex B Γ ad quadratum ex H Γ. & [per 16 5.] permutando ut quadratum ex A Γ ad quadratum ex Γ B ita quadratum ex Z Γ ad quadratum ex H Γ. At vero in ſectionibus oppoſitis: quoniam eſt ut rectangulum B Z A ad quadratum ex Z Γ ita rectangulum A H B ad quadratum ex H Γ; erit invertendo ut quadratum ex Z Γ ad rectangulum B Z A ita quadratum ex H Γ ad rectangulum A H B, & per converſionem rationis, ut quadratum ex Z Γ ad quadratum ex Γ A ita quadratum ex H Γ ad quadratum ex Γ B. nam cum linea A B bifariam ſecetur in Γ, atque ei adjiciatur Z A, erit [per 6. 2.] rectangulum B Z A una cum quadrato ex A Γ æquale quadrato ex Γ Z: quare quadratum ex Γ Z ſuperat rectangulum B Z A ipſo quadrato ex A Γ. pulchre igitur dictum eſt ſequi illud per converſionem rationis.



b Ὡς ἄρα ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως συνθέντι, ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι.] Ἐπὶ μὲν οὖν τῆς ἐλλείψεως ἐροῦμεν. ἐπειδή ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ A Z B πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Z οὕτως τὸ ὑπὸ A H B πρὸς τὸ ἀπὸ H E, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ Δ Z πρὸς τὸ ἀπὸ Z Γ οὕτως τὸ ἀπὸ H E πρὸς τὸ ἀπὸ H Γ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ A Z B πρὸς τὸ ἀπὸ Z Γ οὕτως τὸ ὑπὸ A H B πρὸς τὸ ἀπὸ H Γ, καὶ συνθέντι ὡς τὸ ὑπὸ A Z B μετὰ τοῦ ἀπὸ Z Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Z Γ, τουτέστι τὸ ἀπὸ A Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Z Γ· ἡ γὰρ A B τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Z· οὕτως τὸ ὑπὸ A H B μετὰ τοῦ ἀπὸ H Γ πρὸς τὸ ἀπὸ H Γ, τουτέστι τὸ ἀπὸ Γ B πρὸς τὸ ἀπὸ H Γ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ A Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ B οὕτως τὸ ἀπὸ Z Γ πρὸς τὸ ἀπὸ H Γ. ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ B Z A πρὸς τὸ ἀπὸ Z Γ οὕτως τὸ ὑπὸ A H B πρὸς τὸ ἀπὸ Γ H· ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ Z Γ πρὸς τὸ ὑπὸ B Z A οὕτως τὸ ἀπὸ H Γ πρὸς τὸ ὑπὸ A H B, καὶ ἀναστρέψαντι ὡς τὸ ἀπὸ Z Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ A οὕτως τὸ ἀπὸ H Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ B. εὐθεῖα γὰρ ἡ A B τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται ἡ Z A, καὶ τὸ ὑπὸ B Z A μετὰ τοῦ ἀπὸ A Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Γ Z· ὥστε τὸ ἀπὸ Γ Z τοῦ ὑπὸ B Z A ὑπερέχει τῷ ἀπὸ A Γ. καὶ καλῶς εἴρηται τὸ ἀναστρέψαντι.



Prop. XXXI. *Theor.*

Si in tranſverſo figuræ latere hyperbolæ ſumatur aliquod punctum, non minorem abſcindens ad verticem ſectionis quam ſit dimidia tranſverſi lateris figuræ, & ab ipſo ducta recta ſectioni occurrat: ſi producatur cadet intra ſectionem, verſus ulteriora ejus.

SIT hyperbola, cujus diameter A B; & in ipſa ſumatur punctum aliquod Γ, non minorem abſcindens rectam Γ B, quam ſit ipſius A B dimidia; & occurrat ſectioni quævis recta Γ Δ: dico Γ Δ productam intra ſectionem cadere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

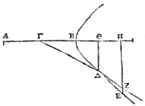
Ἐὰν ὑπερβολῆς ἐπὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ εἴδους ληφθῇ τι σημεῖον, μὴ ἐλάττονα ἀπολαμβάνον πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους πλευρᾶς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ προσπίπτῃ εὐθεῖα πρὸς τὴν τομήν· ἡ προσβληθεῖσα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς, κατὰ τὰ ἑπόμενα μέρη τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἧς διάμετρος ἡ A B, καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῆς σημεῖόν τι τὸ Γ, μὴ ἐλάττονα ἀπολαμβάνον τῆς Γ B τῆς ἡμισείας τῆς A B, καὶ προσπιπτέτω τις εὐθεῖα πρὸς τὴν τομήν· λέγω ὅτι ἡ Γ Δ ἐκβαλλομένη ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

Σ

Digitized by Google

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς, ὡς ἡ ΓΔΕ, καὶ ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ Ε τεταγμένως κατήχθω ἡ ΕΗ, καὶ ἡ ΔΘ. καὶ ἔστω πρότερον ἴση ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΘ, διὰ τὸ ΕΗ παράλληλον εἶναι τῇ ΔΘ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ, διὰ τὴν τομήν· τὸ ἄρα ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ· ἐναλλὰξ ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ. [a] διελόντι ἄρα, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΓΔΕ ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς, ἐντὸς ἄρα· καὶ διὰ τοῦτο, ἡ ἀπό τινος τῶν ἐπὶ τῆς ΑΓ σημείων πολλῷ μᾶλλον ἐντὸς πεσεῖται, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΓΔ ἐντὸς πεσεῖται.



Si enim fieri poteſt, cadat extra ſectionem, ut ΓΔΕ; & à quovis puncto E ordinatim applicetur EH, itemque ipſa ΔΘ. ſit autem primum linea AΓ æqualis ΓB. & quoniam [per 8.5.] quadratum ex EH ad quadratum ex ΔΘ majorem rationem habet quam quadratum ex ZH ad quadratum ex ΔΘ, & ut quadratum ex EH ad quadratum ex ΔΘ ita [per 4. & 22. 6.] quadratum ex HΓ ad quadratum ex ΓΘ; propterea quod EH ipſi ΔΘ ſit parallela. ut vero [per 12. huj.] quadratum ex ZH ad quadratum ex ΔΘ ita rectangulum AHB ad rectangulum AΘB, propter ſectionem: quadratum igitur ex HΓ ad quadratum ex ΘΓ rationem majorem habet quam rectangulum AHB ad rectangulum AΘB: & permutando, quadratum ex ΓH ad rectangulum AHB habet majorem rationem, quam quadratum ex ΓΘ ad rectangulum AΘB, [a] ergo dividendo, quadratum ex ΓB ad rectangulum AHB majorem habet rationem quam quadratum ex ΓB ad rectangulum AΘB: quod [per 8.5.] fieri non poteſt: igitur linea ΓΔE non cadet extra ſectionem: quare intra cadet: & idcirco quæ ab aliquo puncto rectæ AΓ ad ſectionem ducitur, multo magis cadet intra, quoniam & ΓΔ intra cadit.

EUTOCIUS.

[a] Διελόντι ἄρα, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘΒ.] Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται αὐτῇ ἡ ΒΗ, τὸ ὑπὸ ΑΗΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΗ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΓΗ τοῦ ὑπὸ ΑΗΒ ὑπερέχει τῷ ἀπὸ ΓΒ. διὰ δὴ τὴν αὐτὴν αἰτίαν καὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ τοῦ ὑπὸ ΑΘΒ ὑπερέχει τῷ ἀπὸ ΓΒ. ὥστε ὀρθῶς εἴρηται τὸ διελόντι.

[a] Ergo dividendo, quadratum ex ΓB ad rectangulum AHB majorem habet rationem, quam quadratum ex ΓB ad rectangulum AΘB.] Quoniam enim recta linea AB bifariam ſecatur in Γ, & ipſi adjicitur linea BH, rectangulum AHB una cum quadrato ex ΓB [per 6. 2.] æquale eſt quadrato ex ΓH: ergo quadratum ex ΓH ſuperat rectangulum AHB quadrato ex ΓB. & propter eandem cauſam quadratum ex ΓΘ ſuperat rectangulum AΘB ipſo quadrato ex ΓB. recte igitur dixit dividendo illud concludi.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ΄.

Ἐὰν κώνου τομῆς διὰ τῆς κορυφῆς εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθῇ, ἐφάψεται τῆς τομῆς, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε κώνου τομῆς καὶ τῆς εὐθείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ πρότερον ἡ καλουμένη παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ ΑΓ· ὅτι μὲν οὖν ἡ ΑΓ ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, δέδεικται. λέγω δὴ ὅτι καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ᾽ αὐτῆς τυχὸν τὸ Δ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἔστω παρ᾽ ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ

Prop. XXXII. *Theor.*

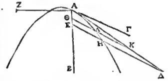
Si per verticem ſectionis coni recta linea ordinatum applicatæ parallela ducatur, ſectionem continget: & in locum, qui inter coni ſectionem & rectam interjicitur, altera recta non cadet.

SIT coni ſectio prius parabola, cujus diameter AB; & à puncto A ducatur AΓ ordinatim applicatæ parallela: cadet AΓ extra ſectionem, quod [ad 17. huj.] ſupra demonſtratum eſt. dico in locum, qui inter AΓ & ſectionem interjicitur, alteram rectam non cadere.

Si enim fieri poteſt, cadat, ut AΔ; ſumaturque in ipſa quodvis punctum Δ; & ordinatim applicetur ΔE. ſit autem AZ, juxta quam poſſunt quæ à ſectione ordinatim ducuntur. & quoniam [per 8. 5.] quadratum ex ΔB ad quadratum ex EA majorem rationem habet quam

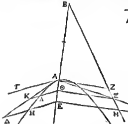
quadratum ex H E ad quadratum ex E A, eſtque [per 11. huj.] quadratum ex H E æquale rectangulo Z A E: quadratum igitur ex Δ E ad quadratum ex E A majorem rationem habet quam rectangulum Z A E ad quadratum ex E A; hoc eſt [per 1. 6.] quam Z A ad A E. itaque fiat ut quadratum ex Δ E ad quadratum ex E A ſic Z A ad A Θ: & per Θ ducatur ΘΛΚ parallela ipſi E Δ. quoniam igitur eſt ut quadratum ex Δ E ad quadratum ex EA ſic ZA ad ipſam AΘ, hoc eſt [per 1.6.] rectangulum Z A Θ ad quadratum ex AΘ; & ut quadratum ex Δ E ad quadratum ex E A ita [per 4. & 22.6.] quadratum ex K Θ ad quadratum ex Θ A: rectangulo autem Z A Θ æquale eſt [per 11. huj.] quadratum ex Θ Λ: quare ut quadratum ex K Θ ad quadratum ex Θ A ſic quadratum ex Λ Θ ad quadratum ex Θ A: æqualis eſt igitur [per 11.5.] linea K Θ ipſi Θ Λ; quod eſt abſurdum. quocirca in locum inter rectam lineam A Γ & ſectionem altera recta linea non cadet.

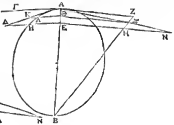
τὸ ἀπὸ H E πρὸς τὸ ἀπὸ E A, τὸ δὲ ἀπὸ H E ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Z A E· καὶ τὸ ἀπὸ Δ E ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ E A μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ Z A E πρὸς τὸ ἀπὸ E A, τουτέστιν ἡ Z A πρὸς A E. πεποιήσθω οὖν ὡς τὸ ἀπὸ Δ E πρὸς τὸ ἀπὸ E A οὕτως ἡ Z A πρὸς A Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ παράλληλος ἤχθω τῇ E Δ ἡ Θ Λ K. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ Δ E πρὸς τὸ ἀπὸ E A οὕτως ἡ Z A πρὸς A Θ, τουτέστι τὸ ὑπὸ Z A Θ πρὸς τὸ ἀπὸ A Θ· καὶ ἔστιν ὡς μὲν τὸ ἀπὸ Δ E πρὸς τὸ ἀπὸ E A οὕτως τὸ ἀπὸ K Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Θ A, τῷ δὲ ὑπὸ Z A Θ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ Θ Λ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ K Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Θ A οὕτως τὸ ἀπὸ Λ Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Θ A· ἴση ἄρα ἡ K Θ τῇ Θ Λ, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς A Γ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

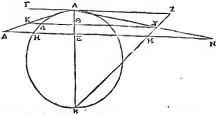


Verum ſit ſectio hyperbola, vel ellipſis, vel circuli circumferentia, cujus diameter A B, & rectum figuræ latus A Z; juncta autem B Z producatur; & à puncto A ordinatim applicatis parallela ducatur A Γ, quæ extra ſectionem cadet, ut [per 17. huj.]

Ἔστω δὴ ἡ τομὴ ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ A B, ὀρθία δὲ ἡ A Z, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ B Z ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ A παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ A Γ. ὅτι μὲν οὖν ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς δέδεικται.







δείκνυται· λέγω δὴ ὅτι καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τυχὸν τὸ Δ, καὶ τεταγμένως ἀπ' αὐτοῦ κατήχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΑΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΜ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΜ, πεποιήσθω τῷ ἀπὸ ΔΕ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΕΝ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΝ τεμνέτω τὴν ΖΜ κατὰ τὸ Ξ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Ξ τῇ ΖΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΞΘ, διὰ δὲ τοῦ Θ τῇ ΑΓ ἡ ΘΑΚ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΝ, ἔστιν ὡς ἡ ΝΕ πρὸς ΕΔ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΕ πρὸς ΕΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΝΕ πρὸς ΕΑ οὕτως ἡ ΞΘ πρὸς ΘΑ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΑ· ὡς ἄρα ἡ ΞΘ πρὸς ΘΑ οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΑ· μέση ἄρα ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΚΘ τῶν ΞΘ, ΘΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΘΞ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΑΘ τῷ ὑπὸ ΑΘΞ ἴσον, διὰ τὴν τομήν· τὸ ἄρα ἀπὸ ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΘΑ, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

oſtenſum eſt: dico in locum, qui inter lineam rectam ΑΓ & ſectionem interjicitur, alteram rectam lineam non cadere.

Cadat enim, ſi fieri poteſt, ut ΑΔ; & in ipſa ſumatur quodvis punctum Δ, à quo ΔΕ ordinatim applicetur; & per Ε ducatur ΕΜ ipſi ΑΖ parallela. & quoniam [per 12 vel 13. huj.] quadratum ex ΗΕ æquale eſt rectangulo ΑΕΜ; fiat rectangulum ΑΕΝ quadrato ex ΔΕ æquale; & juncta ΑΝ ſecet ΖΜ in puncto Ξ, deinde per Ξ ipſi ΖΑ parallela ducatur ΞΘ, & per Θ ducatur ΘΑΚ parallela ipſi ΑΓ. itaque cum quadratum ex ΔΕ æquale ſit rectangulo ΑΕΝ, erit [per 17. 6.] ut ΝΕ ad ΕΔ ita ΔΕ ad ΕΑ: & idcirco [per cor. 20. 6.] ut linea ΝΕ ad ΕΑ, ita quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ. ſed [per 4. 6.] ut ΝΕ ad ΕΑ ita ΞΘ ad ΘΑ, & ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ ita quadratum ex ΚΘ ad quadratum ex ΘΑ: ut igitur ΞΘ ad ΘΑ ſic quadratum ex ΚΘ ad quadratum ex ΘΑ: ergo [per cor. 20. 6.] ΚΘ media proportionalis eſt inter ΞΘ, ΘΑ: & propterea [per 17. 6.] quadratum ex ΚΘ æquale rectangulo ΑΘΞ. eſt autem [per 12. vel 13. huj.] & quadratum ex ΑΘ rectangulo ΑΘΞ æquale, propter ſectionem: ergo quadratum ex ΚΘ æquale eſt quadrato ex ΘΑ; quod fieri non poteſt. in locum igitur, qui eſt inter ΑΓ & ſectionem, altera recta non cadet.

EUTOCIUS.

Ἐν τῷ ἑπτακαιδεκάτῳ θεωρήματι ἁπλούστερον ἔδειξεν, ὅτι ἡ διὰ τῆς κορυφῆς παρὰ τὴν τεταγμένως ἀγομένη, τῆς τομῆς ἐφάπτεται. ἐνταῦθα δὲ τὸ ἐν τοῖς στοιχείοις ἐπὶ τοῦ κύκλου μόνου δειχθὲν καθολικώτερον ἐπὶ πάσης κώνου τομῆς ὁ ποιητὴς ἐπιδείκνυσι. δεῖ μέντοι εἰδέναι, ὅτι κἀκεῖ ἐδείχθη, ὅτι καμπύλην μὲν ἴσως γραμμὴν οὐδὲν ἄτοπον ἐμπίπτειν μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τῆς τομῆς, εὐθεῖαν δὲ ἀμήχανον· τεμεῖ γὰρ αὐτὴ τὴν τομὴν καὶ οὐκ ἐφάψεται· δύο γὰρ ἐφαπτομένας εὐθείας κατὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου εἶναι ἀδύνατον. πολυτρόπως δεικνυμένου τούτου τοῦ θεωρήματος ἐν διαφόροις ἐκδόσεσιν, ἡμεῖς τὴν ἁπλουστέραν καὶ σαφεστέραν ἐποιήσαμεν.

In ſeptimodecimo theoremate ſimplicius oſtendit, rectam, quæ per verticem ducitur ordinatim applicatæ parallela, ſectionem ipſam contingere. hoc autem loco, id quod in elementis de circulo tantum demonſtratur, univerſe de omni coni ſectione oſtendit. oportet autem ſcire, quod & illic demonſtratum eſt, nullum fortaſſe ſequi abſurdum, ſi ponatur linea curva inter ſectionem & rectam cadere. at vero ut cadat recta linea fieri non poteſt: ſecabit etenim ipſa, non continget ſectionem; quoniam duæ rectæ in eodem puncto contingentes eſſe non poſſunt. cum autem hoc theorema multifariam demonſtretur in diverſis editionibus, nos ſimpliciorem & manifeſtiorem demonſtrationem adſcripſimus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Ἐὰν ἐν παραβολῇ ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον κατα χθῇ εὐθεῖα, καὶ τῇ ἀπολαμβανομένῃ ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τεθῇ ἴση ἐπ' εὐθείας ἀπ' ἄκρας αὐτῆς· ἡ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπιζευγνυμένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ἔστω παραβολὴ ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΓΔ, καὶ τῇ ΕΔ ἴση κείσθω ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἐκβαλλομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ ΓΖ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ἀλλ' ὡς

Prop. XXXIII. *Theor.*

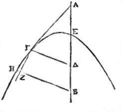
Si in parabola ſumatur aliquod punctum, à quo recta linea ad diametrum ordinatim applicetur; & ei, quæ ab ipſa ex diametro abſcinditur ad verticem, æqualis ponatur in directum ab ejus extremitate: recta linea, quæ à puncto ſic invento ducitur ad illud quod ſumptum fuerat, ſectionem continget.

Sit parabola, cujus diameter ΑΒ; & recta ΓΔ ordinatim applicetur, & ipſi ΕΔ æqualis ponatur ΑΕ, & jungatur ΑΓ: dico ΑΓ productam extra ſectionem cadere.

Si enim fieri poteſt, cadat intra, ut ΓΖ; & ΗΒ ordinatim applicetur. & quoniam [per 8. 5.] quadratum ex ΗΒ ad quadratum ex ΓΔ majorem rationem habet quam quadratum ex ΖΒ ad quadratum ex ΓΔ, & [per 4. & 22. 6.] ut

quadratum

quadratum ex ZB ad quadratum ex ΓΔ ita quadratum ex BA ad quadratum ex AΔ; ut autem quadratum ex HB ad quadratum ex ΓΔ ita [per 20. huj.] linea BE ad ΔE; ergo BE ad EΔ majorem rationem habet quam quadratum ex BA ad quadratum ex AΔ. ſed [per 1. 6.] ut BE ad EΔ ita rectangulum BEA quater ſumptum ad rectangulum AEΔ quater: rectangulum igitur BEA quater ad rectangulum ABΔ quater majorem habet rationem quam quadratum ex BA ad quadratum ex AΔ: & [per 16. 5.] permutando, rectangulum BEA quater ad quadratum ex AB majorem rationem habet quam rectangulum ABΔ quater ad quadratum ex AΔ; quod fieri minime poteſt: nam cum linea AE ipſi EΔ ſit æqualis, rectangulum AEΔ quater ſumptum [per 4. 2.] æquale eſt quadrato ex AΔ, rectangulum vero BEA quater ſumptum quadrato ex BA eſt minus; neque enim punctum E ipſam AB bifariam ſecat. igitur AΓ non cadet intra: quare ſectionem ipſam contingat neceſſe eſt.



τὸ ἀπὸ ZB πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ BA πρὸς τὸ ἀπὸ AΔ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ HB πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ οὕτως ἡ BE πρὸς ΔE· ἡ BE ἄρα πρὸς EΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ BA πρὸς τὸ ἀπὸ AΔ. ἀλλ' ὡς ἡ BE πρὸς EΔ οὕτως τὸ τετράκις ὑπὸ BEA πρὸς τὸ τετράκις ὑπὸ AEΔ· καὶ τὸ τετράκις ἄρα ὑπὸ τῶν BEA πρὸς τὸ τετράκις ὑπὸ AEΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ BA πρὸς τὸ ἀπὸ AΔ· ἐναλλὰξ ἄρα τὸ τετράκις ὑπὸ BEA πρὸς τὸ ἀπὸ AB μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ τετράκις ὑπὸ AEΔ πρὸς τὸ ἀπὸ AΔ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἴσης γὰρ οὔσης τῆς AE τῇ EΔ, τὸ τετράκις ὑπὸ ABΔ τῷ ἀπὸ AΔ ἐστὶν ἴσον. τὸ δὲ τετράκις ὑπὸ BEA τοῦ ἀπὸ BA ἐστὶν ἔλασσον, τῆς γὰρ AB οὐκ ἔστι διχοτομία τὸ E σημεῖον. οὐκ ἄρα ἡ AΓ ἐντὸς πίπτει τῆς τομῆς· ἐφάπτεται ἄρα.

Prop. XXXIV. *Theor.*

Si in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia ſumatur aliquod punctum; ab eoque recta linea ad diametrum ordinatim applicetur; & quam rationem habent lineæ interjectæ inter applicatam & terminos tranſverſi lateris figuræ, eandem habeant inter ſe partes lateris tranſverſi, ita ut quæ ſunt ad verticem partes ſibi ipſis reſpondeant: recta linea, conjungens punctum quod in tranſverſo latere ſumitur & punctum quod eſt in ſectione, ſectionem ipſam continget.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἐὰν ἐπὶ ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, καὶ ὃν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους πλευρᾶς, τοῦτον ἔχῃ τὰ τμήματα τῆς πλαγίας πλευρᾶς, ὥστε ὁμόλογα εἶναι τὰ πρὸς τῇ κορυφῇ τμήματα· ἡ τὸ ἐπὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ληφθὲν σημεῖον καὶ τὸ ἐπὶ τῆς τομῆς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα, ἐφάψεται τῆς τομῆς.

SIT hyperbola, vel ellipſis, vel circuli circumferentia, cujus diameter AB; ſumaturque aliquod punctum in ſectione, quod ſit Γ; & ab eo ΓΔ ordinatim applicetur; fiat autem ut BΔ ad ΔA ſic BE ad EA; & jungatur EΓ: dico lineam ΓE ſectionem contingere.

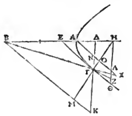
Si enim fieri poteſt, ſecet, ut EΓZ: & ſumpto in ea aliquo puncto Z ordinatim applicetur HZΘ; per puncta vero A, B ducantur AΛ, BK ipſi EΓ parallelæ: & junctæ ΔΓ, BΓ, HΓ ad puncta K, Ξ, M producantur. itaque quoniam ut BΔ ad ΔA ita eſt BE ad EA; & ut BΔ ad ΔA ſic [per 4. 6.] BK ad AN; ut autem BE ad AE ita [per 2. 6.] BΓ ad ΓΞ, hoc eſt [per 4. 6] BK ad ΞN: erit ut BK ad AN ita BK ad NΞ. æqualis eſt igitur [per 9. 5.] AN ipſi NΞ: * & propterea [per 5. 2.] rectangulum ANΞ majus eſt rectangulo AOΞ: quare [per 16. 6.] linea NΞ ad ΞO majorem habet ra-

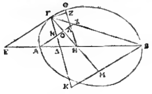
Ἔστω ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τεταγμένως ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ BΔ πρὸς ΔA οὕτως ἡ BE πρὸς EA, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EΓ· λέγω ὅτι ἡ ΓE ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

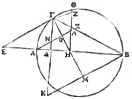
Εἰ γὰρ δυνατὸν, τεμνέτω ὡς ἡ EΓZ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Z, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ HZΘ, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν A, B τῇ EΓ παράλληλοι αἱ AΛ, BK, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΔΓ, BΓ, HΓ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ K, Ξ, M σημεῖα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ BΔ πρὸς ΔA οὕτως ἡ BE πρὸς EA, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ BΔ πρὸς ΔA οὕτως ἡ BK πρὸς AN, ὡς δὲ ἡ BE πρὸς AE οὕτως ἡ BΓ πρὸς ΓΞ, τουτέστιν ἡ BK πρὸς ΞN· ὡς ἄρα ἡ BK πρὸς AN οὕτως ἡ BK πρὸς NΞ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ AN τῇ NΞ· * τὸ ἄρα ὑπὸ ANΞ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ AOΞ· ἡ NΞ ἄρα πρὸς ΞO μείζονα

ζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΟΑ πρὸς ΑΝ. ἀλλ' ὡς ἡ ΝΞ πρὸς ΞΟ, οὕτως ἡ ΚΒ πρὸς ΒΜ· ἡ ΚΒ ἄρα πρὸς ΒΜ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΟΑ πρὸς ΑΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΚΒ, ΑΝ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΜΒ, ΑΟ· ὥστε τὸ ὑπὸ ΚΒ, ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΜΒ, ΑΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ. [b] ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΚΒ, ΑΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΔ, ΕΓΔ, ΑΝΔ τριγώνων· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΜΒ, ΑΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΒΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΕ·

tionem quam ΟΑ ad ΑΝ. ſed [per 4. 6.] ut ΝΞ ad ΞΟ ita ΚΒ ad ΒΜ: ergo ΚΒ ad ΒΜ majorem rationem habet quam ΟΑ ad ΑΝ: ideoque [per 16. 6.] rectangulum quod fit ſub ΚΒ, ΑΝ majus eſt eo quod fit ſub ΒΜ, ΑΟ: ſequitur igitur [per 9. 5.] rectangulum ſub ΚΒ, ΑΝ ad quadratum ex ΓΕ majorem rationem habere quam rectangulum ſub ΜΒ, ΑΟ ad quadratum ex ΓΕ. [b] at vero [per *Pappi* lem. 5.] ut rectangulum ſub ΚΒ, ΑΝ ad quadratum ex ΓΕ, ſic rectangulum ΒΔΑ ad quadratum ex ΔΕ, propter ſimilitudinem triangulorum ΒΚΔ, ΕΓΔ, ΑΝΔ; & ut rectangulum ſub ΜΒ, ΑΟ ad quadratum ex ΓΕ, ſic rectangulum ΒΗΑ ad quadratum ex ΗΕ: ergo ΒΔΑ rectangulum ad quadratum ex ΔΕ majorem rationem habet quam rectangulum ΒΗΑ ad quadratum ex







ἐναλλὰξ ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΗΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ· καὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΗ τῆς ΖΗ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΕΓ τέμνει τὴν τομήν· ἐφάπτεται ἄρα.

ΗΕ; & permutando [per 16. 5.] rectangulum ΒΔΑ ad rectangulum ΒΗΑ majorem habet rationem quam quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΗ. ſed [per 21. huj.] ut rectangulum ΒΔΑ ad ipſum ΑΗΒ ita quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΗΘ, & [per 4. & 22. 6.] ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΗ ſic quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΖΗ: quadratum igitur ex ΓΔ ad quadratum ex ΘΗ majorem rationem habet quam quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΖΗ: & idcirco [per 9. 5.] ΘΗ minor eſt ipſa ΗΖ; quod fieri non poteſt. igitur ΕΓ ſectionem non ſecat: quare ſectionem ipſam contingat neceſſe eſt.

EUTOCIUS.

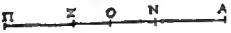
Δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι ἡ ΓΔ κατηγμένη ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τὰς ΔΒ, ΔΑ ὁρίζουσα, τὴν ΒΑ καταλιμπάνουσα ἐκτὸς ἣν ἔδει τμηθῆναι εἰς τὸν τῶν ΒΔ, ΔΑ λόγον· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἀνάπαλιν, τὴν ΒΑ τέμνουσα εἰς ὡρισμένον λόγον τὸν τῶν ΒΔ, ΔΑ, ἐπιζητεῖν ἡμᾶς ποιεῖ τὸν τῶν ΒΕ, ΕΑ· οὐδὲν γὰρ δυσχερὲς

Sciendum eſt ΓΔ, quæ ad diametrum ordinatim applicatur, in hyperbola quidem terminare lineas ΔΒ, ΔΑ, cadens extra ipſam ΒΑ, quæ in ratione linearum ΒΔ, ΔΑ ſecari debet: in ellipſi vero & circuli circumferentia contrarium evenit, nam cum ſecet ipſam ΒΑ, neceſſe eſt ut inquiramus ΒΕ, ΕΑ in determinata ratione, in qua videlicet ſunt ΒΔ, ΔΑ. neque enim diffi-

 cile

ciſe eſt data ratione æqualem ipſi exhibere. ſed & illud ſcire oportet, in unaquaque ſectione duas deſcriptiones eſſe, nempe puncto Z vel intra Γ vel extra ſumpto, ita ut omnes caſus ſex ſint. utitur autem duobus lemmatibus quæ nos deinceps conſcribemus.

a Et propterea rectangulum Α Ν Ξ majus eſt rectangulo Α Ο Ξ: quare linea Ν Ξ ad Ξ Ο majorem rationem habet quam Ο Α ad Α Ν.] Quoniam enim rectangulum Α Ν Ξ rectangulo Α Ο Ξ majus eſt, fiat rectangulo Α Ν Ξ æquale rectangulum quod ſub ipſa Α Ο & alia quapiam, videlicet Ξ Π, continetur, quæ quidem major erit quam Ξ Ο: eſt igitur [per 16 6] ut Ο Α ad Α Ν ſic Ν Ξ ad Ξ Π. ſed [per 8.5] Ν Ξ ad Ξ Ο majorem rationem habet quam ad Ξ Π: ergo Α Ο ad Α Ν minorem habet rationem quam Ν Ξ ad Ξ Ο.



Sed & hujus converſum etiam conſtat, ſi Ξ Ν ad Ξ Ο majorem rationem habeat quam Ο Α ad Α Ν, & rectangulum Α Ν Ξ majus eſſe rectangulo Α Ο Ξ. fiat enim ut Ο Α ad Α Ν ita Ν Ξ ad aliam majorem ipſa Ξ Ο, videlicet ad Ξ Π: quare rectangulum Α Ν Ξ æquale eſt rectangulo quod ſub Α Ο, Ξ Π continetur: rectangulum igitur Α Ν Ξ rectangulo Α Ο Ξ majus erit.

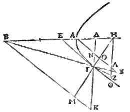
b At vero ut rectangulum ſub Κ Β, Α Ν ad quadratum ex Ε Γ, ſic rectangulum Β Δ Α ad quadratum ex Ε Δ.] Quoniam igitur ob rectas Α Ν, Ε Γ, Κ Β parallelas, ut Α Ν ad Ε Γ ita eſt [per 4. 6.] Α Δ ad Δ Ε; ut autem Ε Γ ad Κ Β ita Ε Δ ad Δ Β: quare ex æquali ut Α Ν ad Κ Β ita Α Δ ad Δ Β, & propterea [per 1.6.] ut quadratum ex Α Ν ad rectangulum ſub Α Ν, Κ Β, ita quadratum ex Α Δ ad rectangulum Α Δ Β. ſed ut quadratum ex Ε Γ ad quadratum ex Α Ν ita quadratum ex Ε Δ ad quadratum ex Δ Α: ergo ex æquali, ut quadratum ex Ε Γ ad rectangulum ſub Α Ν, Κ Β, ita quadratum ex Ε Δ ad rectangulum Α Δ Β; & invertendo, ut rectangulum ſub Κ Β, Α Ν ad quadratum ex Ε Γ, ita rectangulum Β Δ Α ad quadratum ex Ε Δ.

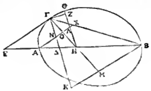
λόγω δοθέντος ἴσον αὐτῷ ποιήσασθαι. δεῖ μέντοι εἰδέναι, ὅτι καθ' ἑκάστην τομὴν καταγραφαί εἰσι δύο, τοῦ Ζ σημείου ἢ ἐσωτέρω τοῦ Γ λαμβανομένου, ἢ ἐξωτέρω, ὥστε εἶναι τὰς πάσας πτώσεις ἕξ. χρῆται δὲ καὶ δυσὶ λήμμασιν ἅπερ ἑξῆς γράψομεν.

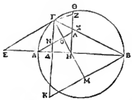
a Μεῖζον ἄρα τὸ ὑπὸ Α Ν Ξ τοῦ ὑπὸ Α Ο Ξ· ἡ Ν Ξ ἄρα πρὸς Ξ Ο μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ο Α πρὸς Α Ν.] Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ Α Ν, Ν Ξ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ Α Ο, Ο Ξ, γενέσθω τῷ ὑπὸ Α Ν, Ν Ξ ἴσον τὸ ὑπὸ τῆς Α Ο καὶ ἄλλης τινὸς τῆς Ξ Π, ἥτις μείζων ἔσται τῆς Ξ Ο· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ο Α πρὸς Α Ν οὕτως ἡ Ν Ξ πρὸς Ξ Π. ἡ δὲ Ν Ξ πρὸς Ξ Ο μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν Ξ Π· καὶ ἡ Α Ο ἄρα πρὸς Α Ν ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ν Ξ πρὸς Ξ Ο.

Φανερὸν δὴ καὶ τὸ ἀνάπαλιν, ὅτι, ἐὰν ἡ Ξ Ν πρὸς Ξ Ο μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ Ο Α πρὸς Α Ν, τὸ ὑπὸ Ξ Ν, Ν Α μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ Α Ο Ξ. γενέσθω γὰρ ὡς ἡ Ο Α πρὸς Α Ν οὕτως ἡ Ν Ξ πρὸς μείζονα δηλονότι τῆς Ξ Ο, ὡς τὴν Ξ Π· τὸ ἄρα ὑπὸ Ν Ξ, Ν Α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Α Ο, Ξ Π· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ Ξ Ν, Ν Α τοῦ ὑπὸ Α Ο, Ο Ξ.

b Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ Κ Β, Α Ν πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Γ οὕτως τὸ ὑπὸ Β Δ Α πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Δ.] Ἐπεὶ γὰρ, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς Α Ν, Ε Γ, Κ Β, ἐστὶν ὡς ἡ Α Ν πρὸς Ε Γ οὕτως ἡ Α Δ πρὸς Δ Ε, ὡς δὲ ἡ Ε Γ πρὸς Κ Β οὕτως ἡ Ε Δ πρὸς Δ Β· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ Α Ν πρὸς Κ Β οὕτως ἡ Α Δ πρὸς Δ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Α Ν πρὸς τὸ ὑπὸ Α Ν, Κ Β, οὕτως τὸ ἀπὸ Α Δ πρὸς τὸ ὑπὸ Α Δ Β. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ Ε Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Α Ν οὕτως τὸ ἀπὸ Ε Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Α· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ Ε Γ πρὸς τὸ ὑπὸ Α Ν, Κ Β, οὕτως τὸ ἀπὸ Ε Δ πρὸς τὸ ὑπὸ Α Δ Β· καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ὑπὸ Κ Β, Α Ν πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Γ, οὕτως τὸ ὑπὸ Β Δ Α πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Δ.







Prop. XXXV. *Theor.*

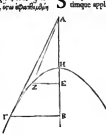
Si parabolam recta linea contingat, conveniens cum diametro extra ſectio-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐφάπτηται, συμπίπτουσα τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς· ἡ ἀπὸ

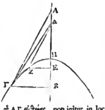
τῆς ἁφῆς εὐθεῖα ἀχθεῖσα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον ἴσην ἀπολήψεται ἀπὸ τῆς διαμέτρου, πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, τῇ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τομῆς οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Εστω παραβολὴ ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΗ ἴση ἐστὶ τῇ ΗΒ.



Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ἄνισος αὐτῇ, καὶ τῇ ΑΗ ἴση κείσθω ἡ ΗΕ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· ἡ ΑΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΓ εὐθείᾳ· ὅπερ ἀδύνατον, δυοῖν γὰρ ἔσται εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἴση ἄρα.

ΛΕΓΩ δὴ ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΑΓ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.



Εἰ γὰρ δυνατὸν, παρεμπιπτέτω ἡ ΓΔ, καὶ τῇ ΗΔ ἴση κείσθω ἡ ΗΕ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΕΖ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς τομῆς· ἐκβαλλομένη ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται αὐτῆς· ὥστε συμπεσεῖται τῇ ΔΓ, καὶ δυοῖν εὐθειῶν ἔσται τὰ αὐτὰ πέρατα, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε τομῆς καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας παρεμπεσεῖται εὐθεῖα.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛʹ.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, συμπίπτουσα τῇ πλαγίᾳ τοῦ εἴδους πλευρᾷ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον· ἔσται ὡς ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ πέρατι τῆς πλαγίας πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ ἑτέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς, οὕτως ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ πέρατι τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ ἑτέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς, ὥστε τὰς ὁμολόγους συνεχεῖς εἶναι· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τοῦ κώνου τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

nem: quæ à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abſcindet ex diametro ad verticem ſectionis rectam æqualem ei quæ inter ipſam & contingentem interjicitur; & in locum qui eſt inter contingentem & ſectionem alia recta non cadet.

SIT parabola, cujus diameter ΑΒ; ordinatimque applicetur ΒΓ; & ſit ΑΓ ſectionem contingens: dico ΑΗ ipſi ΗΒ æqualem eſſe.

Si enim fieri poteſt, ſit inæqualis; & ipſi ΑΗ æqualis ponatur ΗΕ; recta autem ΕΖ ordinatim applicetur; & jungatur ΑΖ: ergo [per 33. huj.] ΑΖ producta conveniet cum ΑΓ; quod fieri non poteſt: duarum enim rectarum iidem termini eſſent. non ergo inæqualis eſt ΑΗ ipſi ΗΒ: quare neceſſario erit æqualis.

Rursus dico in locum, qui eſt inter ΑΓ & ſectionem, aliam rectam lineam non cadere.

Si enim fieri poſſit, cadat ΓΔ; ipſique ΗΔ æqualis ponatur ΗΕ; & ΕΖ ordinatim applicetur: ergo [per 33. huj.] à puncto Δ ad Ζ ducta recta contingit ſectionem; quare producta extra ipſam cadet: & propterea conveniet cum ΔΓ, eruntque duarum rectarum iidem termini; quod eſt abſurdum. non igitur in locum, qui eſt inter ſectionem & ΑΓ, alia recta cadet.

Prop. XXXVI. *Theor.*

Si hyperbolam, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam contingat quædam recta linea conveniens cum tranſverſo figuræ latere, & à tactu recta ad diametrum ordinatim applicetur: erit ut recta, quæ interjicitur inter contingentem & terminum tranſverſi lateris ad interjectam inter eandem & alterum lateris terminum, ita quæ eſt inter ordinatim applicatam & terminum lateris ad eam quæ eſt inter eandem & alterum terminum, adeo ut continuatæ inter ſe ſint quæ ſibi ipſis reſpondent; & in locum, qui inter contingentem & ſectionem coni interjicitur, altera recta non cadet.

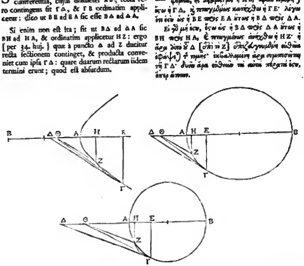
SIT

SIT hyperbola, vel ellipſis, vel circuli circumferentia, cujus diameter ΑΒ; recta vero contingens ſit ΓΔ, & ΓΕ ordinatim applicetur: dico ut ΒΕ ad ΕΑ ſic eſſe ΒΔ ad ΔΑ.

Si enim non eſt ita; ſit ut ΒΔ ad ΔΑ ſic ΒΗ ad ΗΑ, & ordinatim applicetur ΗΖ: ergo [per 34. huj.] quæ à puncto Δ ad Ζ ducitur recta ſectionem continget, & producta conveniet cum ipſa ΓΔ: quare duarum rectarum iidem termini erunt; quod eſt abſurdum.

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΓΕ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς ΕΑ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΑ.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἔστω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΑ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς ΗΑ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΗΖ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ [ἐπὶ τὸ Ζ] ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς τομῆς· ἐκβαλλομένη ἄρα συμπεσεῖται τῇ ΓΔ· δύο ἄρα εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατά ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον.



DICO etiam in locum, qui inter ſectionem & ΓΔ interjicitur, nullam rectam cadere.

Si enim fieri poteſt, cadat ΓΘ; & ut ΒΘ ad ΘΑ ita fiat ΒΗ ad ΗΑ, & ΗΖ ordinatim applicetur: juncta ergo ΘΖ, ſi producatur, [per 34. huj.] conveniet cum ipſa ΘΓ, atque erunt duarum rectarum iidem termini; quod fieri non poteſt. non ergo inter ſectionem & ΓΔ altera recta cadet.

ΛΕΓΩ ὅτι μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ΓΔ εὐθείας οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΓΘ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΑ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς ΗΑ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΗΖ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΘΓ· δύο ἄρα εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατά ἐστιν, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τομῆς καὶ τῆς ΓΔ εὐθείας παρεμπεσεῖται εὐθεῖα.

PROP. XXXVII. *Theor.*

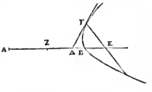
Si recta linea hyperbolam, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam contingens cum diametro conveniat, & à tactu ad diametrum recta ordinatim applicetur: quæ interjicitur inter applicatam & centrum ſectionis, una cum interjecta inter contingentem & ſectionis centrum, continebit rectangulum æquale quadrato rectæ quæ eſt ex centro ſectionis: ſed una cum ea, quæ inter applicatam & contingentem interjicitur, continebit ſpatium, quod ad quadratum ordinatim applicatæ eandem rationem habet quam tranſverſum figuræ latus ad rectum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

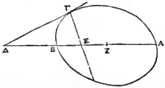
Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως· ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, μετὰ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, ἴσον περιέξει τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς· μετὰ δὲ τῆς μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιέξει χωρίον, λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης τετράγωνον ὃν ἡ πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν.

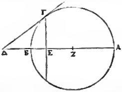
ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΓΕ, κέντρον δὲ ἔστω τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΔΖΕ τῷ ἀπὸ ΖΒ, καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν.

Ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτεται ἡ ΓΔ τῆς τομῆς, καὶ τεταγμένως κατῆκται ἡ ΓΕ, ἔσται ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ· συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ ΑΔ, ΔΒ πρὸς ΔΒ οὕτως συναμφότερος ἡ ΑΕ, ΕΒ πρὸς ΕΒ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση. ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἐροῦμεν. ἀλλὰ συναμφοτέρου μὲν τῆς ΑΕ, ΕΒ ἡμίσειά ἐστιν ἡ ΖΕ, τῆς δὲ ΑΒ ἡ ΖΒ· ὡς ἄρα ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ· ἀναστρέψαντι ἄρα, ἐστὶν ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΖΒ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΖΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΖΔ τῷ ἀπὸ ΖΒ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ΖΒ πρὸς ΒΔ, τουτέστιν ἡ ΑΖ πρὸς ΔΒ· ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΕ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΒ· ὥστε τὸ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΕΔ. ἔστι δὲ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν.



Ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς κύκλου περιφερείας. ἀλλὰ συναμφοτέρου μὲν τῆς ΑΔ, ΔΒ ἡμίσειά ἐστιν ἡ ΔΖ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίσειά ἐστιν ἡ ΖΒ· ὡς ἄρα ἡ ΖΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΒΕ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΖ πρὸς ΖΒ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖΕ τῷ ἀπὸ ΒΖ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΕΖ καὶ τῷ ἀπὸ ΖΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ





μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ λοιπῷ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον ἐστίν· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ. ἀλλὰ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν.

SIT hyperbola, vel ellipſis, vel circuli circumferentia, cujus diameter A B; ducaturque contingens Γ Δ, & Γ E ordinatim applicetur; centrum autem ſit Z: dico rectangulum Δ Z E quadrato ex Z B æquale eſſe; & ut rectangulum Δ E Z ad quadratum ex E Γ ita tranſverſum latus ad rectum.

Quoniam enim Γ Δ contingit ſectionem, & ordinatim applicata eſt Γ E; erit [per 36. huj.] ut A Δ ad Δ B ita A E ad E B: ergo [per 18. 5.] componendo, ut utraque A Δ, Δ B ad Δ B ita utraque A E, E B ad E B; & antecedentium dimidia. In hyperbola quidem in hunc modum argumentabimur. ſed utriuſque A E, E B dimidia eſt Z E, ipſius autem A B dimidia Z B: ut igitur Z E ad E B ita Z B ad B Δ; & [per cor. 19. 5.] per converſionem rationis ut E Z ad Z B ita Z B ad Z Δ: quare [per 17. 6.] rectangulum E Z Δ quadrato ex Z B eſt æquale. Et quoniam ut Z E ad E B ita Z B ad B Δ, hoc eſt A Z ad Δ B; erit [per 16. 5.] permutando ut A Z ad Z E ita Δ B ad B E; & [per 18. 5.] componendo ut A E ad E Z ita Δ E ad E B: ergo [per 17. 6.] rectangulum A E B æquale eſt rectangulo Z E Δ. ſed [per 21. huj.] ut rectangulum A E B ad quadratum Γ E ita tranſverſum latus ad rectum: ut igitur rectangulum Z E Δ ad quadratum Γ E ita tranſverſum latus ad rectum.

In ellipſi vero, & circuli circumferentia hoc modo. ſed utriuſque A Δ, Δ B dimidia eſt Δ Z; & ipſius A B dimidia Z B: ergo ut Z Δ ad Δ B ita Z B ad B E; & [per cor. 19. 5.] per converſionem rationis, ut Δ Z ad Z B ita B Z ad Z E: rectangulum igitur Δ Z E [per 17. 6.] æquale eſt quadrato ex B Z. At vero [per 3. 2.] rectangulum Δ Z E rectangulo Δ E Z una cum quadrato ex Z E eſt æquale; & [per 5. 2.] quadratum ex B Z æquale eſt rectangulo A E B una cum quadrato ex Z E. commune auferatur quadratum ex Z E: reliquum igitur rectangulum Δ E Z reliquo A E B æquale erit: ut igitur rectangulum Δ E Z ad quadratum ex Γ E, ita [per 7. 5.] rectangulum A E B ad quadratum ex Γ E. ſed [per 21. huj.] ut rectangulum A E B ad quadratum ex Γ E ita tranſverſum latus ad rectum: ergo ut rectangulum Δ E Z ad quadratum ex E Γ ita tranſverſum latus ad rectum.

EUTOCIUS.

Ex his theorematibus patet, quomodo per datum punctum in diametro vel vertice ſectionis contingentem rectam ducere poſſimus.

Διὰ τούτων τῶν θεωρημάτων φανερὸν, ὅπως ἔστι δυνατὸν διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἐπὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν.

Prop. XXXVIII. *Theor.*

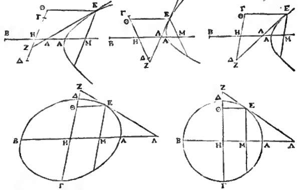
Si hyperbolam, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum ſecunda diametro conveniat; & à tactu ad diametrum applicetur recta alteri diametro parallela: quæ interjicitur inter applicatam & ſectionis centrum, una cum interjecta inter contingentem & centrum ſectionis, continebit rectangulum æquale quadrato quod fit ex dimidia ſecundæ diametri; ſed una cum ea, quæ inter applicatam & contingentem interjicitur, ſpatium continebit, quod ad quadratum applicatæ eam rationem habeat, quam figuræ rectum latus ad tranſverſum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Εὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς εὐθεῖα καταχθῇ ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ· ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, μετὰ μὲν τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, ἴσον περιέξει τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου τετραγώνῳ· μετὰ δὲ τῆς μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιέξει χωρίον λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης, ὃν ἔχει ἡ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν.

SIT hyperbola, vel ellipſis, vel circuli circumferentia, cujus diameter A H B, ſecunda diameter Γ H Δ; recta vero ſectionem contingens ſit E A Z, quæ conveniat cum Γ Δ in Z; & Θ E ipſi A B ſit parallela: dico rectangulum Z H Θ quadrato ex Γ H æquale eſſe; & ut rectangulum H Θ Z ad quadratum ex Θ E ita rectum figuræ latus ad latus tranſverſum.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια ἧς διάμετρος ἡ Α Η Β, δευτέρα δὲ διάμετρος ἡ Γ Η Δ, ἐφαπτομένη δὲ ἔστω τῆς τομῆς ἡ Ε Λ Ζ συμπίπτουσα τῇ Γ Δ κατὰ τὸ Ζ, παράλληλος δὲ ἔστω τῇ Α Β ἡ Θ Ε· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ Ζ Η Θ τῷ ἀπὸ Η Γ ἐστὶν ἴσον, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ Η Θ Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ Θ Ε οὕτως ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν.



Ordinatim namque applicatâ M E, erit [per 37. huj.] ut rectangulum H M Λ ad quadratum ex M E ita tranſverſum latus ad rectum. ſed [per def. 2[da] diam.] ut tranſverſum latus B A ad Γ Δ ita Γ Δ ad latus rectum: ergo [per cor. 20. 6.]

Ἤχθω τεταγμένως ἡ Μ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ Η Μ Λ πρὸς τὸ ἀπὸ Μ Ε οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ' ἔστιν ὡς ἡ πλαγία Β Α πρὸς Γ Δ οὕτως ἡ Γ Δ πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα ἡ πλαγία

Digitized by Google

ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, καὶ τὰ τέταρτα, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΜΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ. τὸ δὲ ὑπὸ ΗΜΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΗΜ πρὸς ΜΕ, τουτέστι πρὸς ΗΘ, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ ΛΜ πρὸς ΜΕ· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ τοῦ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΗΜ, τουτέστιν ΘΗ πρὸς ΜΗ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ΕΜ πρὸς ΜΑ, τουτέστιν ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΗ πρὸς ΗΜ, καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΖΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΗΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΗΑ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΖΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΗΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΜΗΑ τῷ ἀπὸ ΗΑ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΖΗΘ τῷ ἀπὸ ΗΓ. Πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΜΑ, καὶ τὸ ἀπὸ ΕΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΜΑ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΗΜ, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς ΘΕ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΑ, τουτέστιν ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ, τουτέστιν ἡ ΖΘ πρὸς ΘΕ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΖΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ οὕτως ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν.

ut tranſverſum latus ad rectum ita quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΓΔ: & [per 15.5.] ita horum quadratorum quartæ partes, videlicet quadratum ex ΗΛ ad quadratum ex ΗΓ: ut igitur rectangulum ΗΜΛ ad quadratum ex ΜΕ ita quadratum ex ΛΗ ad quadratum ex ΗΓ. ſed [per 23. 6.] rectangulum ΗΜΛ ad quadratum ex ΜΕ compoſitam rationem habet ex ratione ΗΜ ad ΜΕ, hoc eſt [per 33.1.] ad ΗΘ, & ex ratione ΛΜ ad ΜΕ: quare invertendo ratio quadrati ex ΓΗ ad quadratum ex ΗΛ componitur ex ratione ΕΜ ad ΜΗ, hoc eſt ΘΗ ad ΗΜ, & ex ratione ΕΜ ad ΜΛ, hoc eſt [per 4 6.] ΖΗ ad ΗΛ: ergo quadratum ex ΗΓ ad quadratum ex ΗΛ compoſitam habet rationem ex ratione ΘΗ ad ΗΜ, & ex ratione ΖΗ ad ΗΛ, quæ quidem eadem eſt [per 23. 6.] ac rectanguli ΖΗΘ ad rectangulum ΜΗΛ: ut igitur rectangulum ΖΗΘ ad ΜΗΛ rectangulum ita quadratum ex ΓΗ ad quadratum ex ΗΛ; & permutando ut rectangulum ΖΗΘ ad quadratum ex ΓΗ ita rectangulum ΜΗΛ ad quadratum ex ΗΛ. rectangulum autem ΜΗΛ [per 37. huj.] æquale eſt quadrato ex ΗΛ: ergo & rectangulum ΖΗΘ quadrato ex ΗΓ æquale erit. Rurſus [per 21.huj.] ut rectum latus ad tranſverſum ita quadratum ex ΕΜ ad rectangulum ΗΜΛ. quadratum vero ex ΕΜ ad rectangulum ΗΜΛ [per 23. 6.] compoſitam rationem habet ex ratione ΕΜ ad ΗΜ, hoc eſt ΗΘ ad ΘΕ; & ex ratione ΕΜ ad ΜΛ, hoc eſt [per 4. 6.] ΖΗ ad ΗΛ, ſive ΖΘ ad ΘΕ: quare ratio hæc eadem eſt [per 23. 6.] quam habet rectangulum ΖΘΗ ad quadratum ex ΘΕ: ergo ut rectangulum ΖΘΗ ad quadratum ex ΘΕ ita rectum latus ad tranſverſum.

* Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, δεικτέον ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ κατηγμένῃ, πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ ἑτέρου πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου, οὕτως ἡ μεταξὺ τοῦ ἑτέρου πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ αὐτοῦ πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης.

Iiſdem poſitis oſtendendum eſt, ut recta, quæ inter tangentem & terminum ſecundæ diametri ad partes applicatæ interjicitur, ad eam, quæ inter tangentem & alterum terminum ſecundæ diametri; ita eſſe rectam, quæ eſt inter alterum terminum & applicatam, ad eam quæ inter eundem terminum & applicatam.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΗΘ τῷ ἀπὸ ΗΓ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΓΗΔ, ἴση γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΗΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ, καὶ ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΖΔ οὕτως ἡ ΗΓ πρὸς ΓΘ, καὶ τὰ διπλᾶ τῶν ἡγουμένων. ἔστι δὲ διπλασία τῆς ΗΖ [ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως τῆς ὑπερβολῆς ἡ τῶν ΓΖ, ΖΔ ὑπεροχή, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας] συναμφότερος ἡ ΓΖ, ΖΔ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΓΗ τῇ ΗΔ, τῆς δὲ ΗΓ διπλασία ἡ ΓΔ· ὡς ἄρα [ἡ τῶν ΓΖ, ΖΔ ὑπεροχὴ ἢ] συναμφότερος ἡ ΓΖ, ΖΔ πρὸς ΖΔ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ, καὶ [συνθέντι ἐπὶ τῆς πρώτης πτώσεως, ἢ ἐπὶ τῆς δευτέρας] διελόντι ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΓ.

Quoniam enim [ex ſup.prop.] æquale eſt rectangulum ΖΗΘ quadrato ex ΗΓ, hoc eſt rectangulo ΓΗΔ; nam linea ΓΗ æqualis eſt ipſi ΗΔ: erit [per 16.6.] ut ΖΗ ad ΗΔ ita ΓΗ ad ΗΘ; & [per cor. 19. 6.] per converſionem rationis, ut ΖΗ ad ΖΔ ita ΗΓ ad ΓΘ, & antecedentium dupla. eſt autem dupla ipſius ΗΖ differentia inter ΓΖ, ΖΔ, in primo caſu hyperbolæ, at in ſecundo utraque ΓΖ, ΖΔ ſimul ſumpta, ob æquales ΓΗ, ΗΔ; ac ΓΔ dupla eſt ipſius ΗΓ: ut igitur differentia vel ſumma ipſarum ΓΖ, ΖΔ ad ΖΔ ita ΓΔ ad ΓΘ, ac componendo in primo caſu vel dividendo in ſecundo fiet ΓΖ ad ΖΔ ſicut ΔΘ ad ΘΓ.

* Hæc demonſtratio hyperbolæ tantum competit, ſed levi mutatione ad ellipſin & circulum transferri poteſt, & in quibuſdam codicibus theorema hoc ſic reperitur enunciatum, convenientius nempe ellipſi & circulo, Ὡς ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ κατηγμένῃ, πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ αὐτοῦ πέρατος, οὕτως ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ ἑτέρου πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ ἑτέρου πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης. Ut intercepta inter contingentem & terminum ſecundæ diametri ad partes applicatæ, ad interceptam inter applicatam & dictum terminum, ita intercepta inter contingentem & alterum terminum ſecundæ diametri ad interceptam inter hunc alterum terminum & applicatam; hoc eſt ut ΓΖ ad ΖΔ ita ΓΘ ad ΘΔ: id quod ex trigeſima ſexta hujus manifeſtum eſt.

Corol-

Corollarium.

Ex jam dictis manifeſtum eſt E Z contingere ſectionem, ſive rectangulum Z H Θ æquale ſit quadrato ex H Γ, ſive Z Θ H rectangulum ad quadratum ex Θ E eam, quam diximus, rationem habeat. conuerſo enim modo illud facile oſtendetur.

Πόρισμα.

Φανερὸν δὴ ἐκ τῶν εἰρημένων ὅτι ἡ Ε Ζ ἐφάπτεται τῆς τομῆς, ἐάν τε ἴσον ᾖ τὸ ὑπὸ Ζ Η Θ τῷ ἀπὸ τῆς Η Γ, ἐάν τε λόγον ἔχῃ τὸ ὑπὸ Ζ Θ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Θ Ε τὸν εἰρημένον. δειχθήσεται γὰρ ἀντιστρόφως.

EUTOCIUS.

In aliquibus exemplaribus hoc theorema in ſola hyperbola demonſtratum invenimus: ſed hoc loco univerſaliter demonſtratur, quoniam eadem contingunt & in diverſis ſectionibus. *Apollonio* autem viſum eſt non ſolum hyperbolam ſed etiam ellipſim ſecundam diametrum habere, ut ſæpe ex ipſo in ſuperioribus didicimus. Et in ellipſi quidem caſum non habet, in hyperbola vero tres habet caſus. punctum enim Z, in quo recta ſectionem contingens cum ſecunda diametro convenit, vel eſt infra Δ, vel in ipſo Δ, vel ſupra; & propterea punctum Θ ſimiliter tres locos obtinet. attendendum autem eſt, cum Z cadit infra Δ, & Θ infra Γ cadere; cum vero Z cadit in Δ, Θ cadit in Γ; & cum Z ſupra Δ, & Θ ſupra Γ cadit.

Ἔν τισιν ἀντιγράφοις τὸ θεώρημα τοῦτο ἐπὶ μόνης τῆς ὑπερβολῆς εὑρίσκεται δεδειγμένον. καθολικῶς δὲ ἐνταῦθα δέδεικται· τὰ γὰρ αὐτὰ συμβαίνει καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τομῶν. καὶ τῷ Ἀπολλωνίῳ δὲ δοκεῖ μὴ μόνον τὴν ὑπερβολὴν, ἀλλὰ καὶ τὴν ἔλλειψιν ἔχειν δευτέραν διάμετρον, ὡς πολλάκις αὐτοῦ ἠκούσαμεν ἐν τοῖς προλαβοῦσι. καὶ ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως πτῶσιν οὐκ ἔχει, ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς τρεῖς. τὸ γὰρ Ζ σημεῖον, καθ᾽ ὃ συμβάλλει ἡ ἐφαπτομένη τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, ἢ κατωτέρω τοῦ Δ ἐστὶν, ἢ ἐπὶ τοῦ Δ, ἢ ἀνωτέρω τοῦ Δ· καὶ διὰ τοῦτο τὸ Θ ὁμοίως αὐτῷ τρεῖς ἕξει τόπους. καὶ προσεκτέον, ὅτι ὅτε κατωτέρω πίπτει τὸ Ζ τοῦ Δ, καὶ τὸ Θ τοῦ Γ ἔσται κατωτέρω· ὅτε τὸ Ζ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ τὸ Θ ἐπὶ τὸ Γ· ὅτε ἀνωτέρω τὸ Ζ τοῦ Δ, καὶ τὸ Θ τοῦ Γ ἔσται ἀνωτέρω.

Prop. XXXIX. *Theor.*

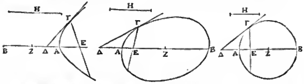
Si hyperbolam, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam recta contingens cum diametro conveniat; & à tactu ad diametrum recta ordinatim applicetur: ſumptâ quâvis rectâ ex duabus, quarum altera interjicitur inter applicatam & centrum ſectionis, altera inter applicatam & contingentem, habebit ad eam applicata rationem compoſitam ex ratione quam habet altera dictarum rectarum ad applicatam, & ex ratione quam rectum figuræ latus habet ad tranſverſum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθʹ.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως· ἥτις ἂν ληφθῇ τῶν δύο εὐθειῶν, ὧν ἐστιν ἡ μὲν μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, ἡ δὲ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης τῆς τομῆς, ἕξει πρὸς αὐτὴν ἡ κατηγμένη τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν δύο εὐθειῶν πρὸς κατηγμένην, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ εἴδους ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν.

SIT hyperbola, vel ellipſis, vel circuli circumferentia cujus diameter A B, centrum autem Z; ducaturque Γ Δ ſectionem contingens, & Γ E ordinatim applicetur: dico Γ E ad alteram rectarum Z E, E Δ rationem habere compoſitam ex ratione, quam habet rectum figuræ latus ad tranſverſum, & ex ea quam altera dictarum rectarum Z E, E Δ habet ad ipſam E Γ.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια ἧς διάμετρος ἡ Α Β, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Ζ, καὶ ἐφαπτομένη ἤχθω τῆς τομῆς ἡ Γ Δ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ Γ Ε· λέγω ὅτι ἡ Γ Ε πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν Ζ Ε, Ε Δ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν Ζ Ε, Ε Δ πρὸς τὴν Ε Γ.



Sit enim rectangulum Z E Δ æquale rectangulo ſub E Γ & recta H: & quoniam [per 37. huj.] ut rectangulum Z E Δ ad quadratum ex Γ E ita tranſverſum latus ad rectum; atque rectangulum Z E Δ rectangulo ſub E Γ & H æquale eſt: erit ut

Ἔστω γὰρ ἴσον τὸ ὑπὸ Ζ Ε Δ τῷ ὑπὸ Ε Γ καὶ τῆς Η· καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ Ζ Ε Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Ε οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ Ζ Ε Δ τῷ ὑπὸ Γ Ε, Η· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ

ὑπὸ ΓΕ, Η πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, τουτέστιν ἡ Η πρὸς ΓΕ, οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΕΔ τῷ ὑπὸ ΓΕ, Η, ἔστιν ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΕΓ οὕτως ἡ Η πρὸς ΕΔ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΓΕ πρὸς Η καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Η πρὸς ΕΔ· ἀλλ' ἔστιν ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς Η οὕτως ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, ὡς δὲ ἡ Η πρὸς ΔΕ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ· ἡ ΓΕ ἄρα πρὸς ΕΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ.

rectangulum ſub ΓΕ & Η ad quadratum ex ΓΕ, hoc eſt [per 1. 6.] ut Η ad ΓΕ, ita tranſverſum latus ad rectum. rurſus quoniam rectangulum ΖΕΔ æquale eſt rectangulo ſub ΓΕ & Η; ut ΕΖ ad ΕΓ ita [per 16. 6.] erit Η ad ΕΔ. habet autem ΓΕ ad ΕΔ rationem compoſitam ex ratione quam ΓΕ habet ad Η & ex ea quam Η habet ad ΕΔ; utque ΓΕ eſt ad Η (ut mox oſtenſum) ita rectum latus ad tranſverſum; & ut Η ad ΔΕ ita ΖΕ ad ΕΓ: ergo ΓΕ ad ΕΔ rationem habebit compoſitam ex ratione quam habet rectum latus ad tranſverſum, & ex ea quam ΖΕ habet ad ΕΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

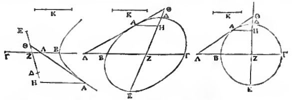
Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ· ἥτις ἂν ληφθῇ τῶν δύο εὐθειῶν, ὧν ἡ μὲν μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, ἡ δὲ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης, ἕξει πρὸς αὐτὴν ἡ κατηγμένη τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν δύο εὐθειῶν πρὸς τὴν κατηγμένην.

Prop. XL. *Theor.*

Si hyperbolam, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum ſecunda diametro conveniat; & à tactu ad eandem diametrum recta applicetur diametro alteri parallela: ſumptâ quâlibet rectâ ex duabus, quarum una inter applicatam & ſectionis centrum interjicitur, altera inter applicatam & contingentem, habebit ad ipſam applicata rationem compoſitam ex ratione quam habet tranſverſum figuræ latus ad rectum & ex ea quam altera dictarum rectarum habet ad applicatam.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΒΖΓ, δευτέρα δὲ ἡ ΔΖΕ, καὶ ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΘΛΑ, καὶ τῇ ΓΒ παράλληλος ἡ ΑΗ· λέγω ὅτι ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν ΘΗ, ΖΗ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν ΖΗ, ΘΗ πρὸς τὴν ΗΑ.

SIT hyperbola, vel ellipſis, vel circuli circumferentia ΑΒ, cujus diameter ΒΖΓ, & ſecunda diameter ΔΖΕ; ducaturque recta ſectionem contingens ΘΛΑ, & ipſi ΓΒ parallela ducatur ΑΗ: dico ΑΗ ad alteram rectarum ΘΗ, ΗΖ rationem habere compoſitam ex ratione quam habet tranſverſum figuræ latus ad rectum, & ex ea quam altera dictarum rectarum ΖΗ, ΘΗ habet ad ipſam ΗΑ.



Ἔστω τὸ ὑπὸ ΘΗΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΗΑ, Κ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ, τῷ δὲ ὑπὸ ΘΗΖ ἴσον τὸ ὑπὸ ΗΑ, Κ· καὶ τὸ ὑπὸ ΗΑ, Κ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ, τουτέστιν ἡ Κ πρὸς ΑΗ, ἐστὶν ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΗ πρὸς Κ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Κ πρὸς ΗΖ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΗΑ πρὸς Κ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὡς δὲ ἡ Κ πρὸς ΗΖ οὕτως

Sit enim rectangulum ΘΗΖ rectangulo quod fit ſub ΗΑ & Κ æquale. itaque quoniam [per 38. huj.] ut rectum latus ad tranſverſum ita rectangulum ΘΗΖ ad quadratum ex ΗΑ; rectangulo autem ΘΗΖ æquale eſt [ex hyp.] id quod fit ſub ΗΑ & Κ: erit rectangulum ſub ΗΑ & Κ ad quadratum ex ΗΑ, hoc eſt [per 1. 6.] Κ ad ΑΗ, ut latus rectum ad tranſverſum: & quoniam ΑΗ ad ΗΖ compoſitam habet rationem ex ratione quam habet ΑΗ ad Κ & ex ea quam Κ habet ad ΗΖ; eſtque ut ΗΑ ad Κ ita tranſverſum latus ad rectum; & [per 16. 6.] ut Κ ad ΗΖ ita

ΘH ad HA, propterea quod rectangulum ΘHZ æquale eſt rectangulo ſub AH & K: conſtat ergo AH ad HZ compoſitam habere rationem ex ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum & ex ea quam ΘH habet ad HA.

Prop. XLI. *Theor.*

Si in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia recta linea ordinatim applicetur ad diametrum; & ab applicata, & ab ea quæ ex centro, parallelogramma æquiangula deſcribantur; habeat autem applicata ad reliquum parallelogrammi latus rationem compoſitam ex ratione quam habet ea quæ ex centro ad reliquum latus, & ex ratione quam rectum figuræ latus habet ad tranſverſum: parallelogrammum factum à recta, quæ inter centrum & applicatam interjicitur, ſimile parallelogrammo quod fit ab ea quæ ex centro, in hyperbola quidem excedit parallelogrammum ab applicata parallelogrammo quod fit ab ea quæ ex centro; in ellipſi vero & circuli circumferentia, una cum parallelogrammo quod fit ab applicata æquale eſt parallelogrammo facto ab ea quæ ex centro.

SIT hyperbola, vel ellipſis, vel circuli circumferentia, cujus diameter AB, centrum E; & ordinatim applicetur ΓΔ; à lineis autem EA, ΓΔ æquiangula parallelogramma deſcribantur, quæ ſint AZ, ΔH; & habeat ΓΔ ad ΓH rationem compoſitam ex ratione quam habet AE ad EZ & ex ea quam rectum figuræ latus habet ad tranſverſum: dico in hyperbola parallelogrammum quod fit ex EΔ, ſimile ipſi AZ, parallelogrammis AZ, HΔ æquale eſſe: in ellipſi vero & circuli circumferentia, parallelogrammum quod fit ex ΔE, ſimile AZ, una cum parallelogrammo HΔ ipſi AZ eſſe æquale.

Fiat enim ut rectum figuræ latus ad tranſverſum ita ΔΓ ad ΓΘ. & quoniam [ex hyp.] ut ΔΓ ad ΓΘ ita rectum latus ad tranſverſum; ut autem ΔΓ ad ΓΘ ita [per 1. 6.] quadratum ex ΔΓ ad rectangulum ΔΓΘ; & [per 21. huj.] ut rectum latus ad tranſverſum ita quadratum ex ΔΓ ad rectangulum BΔA: erit [per 9. 5.] rectangulum BΔA rectangulo ΔΓΘ æquale. rurſus quoniam ΔΓ ad ΓH rationem habet compoſitam ex ratione quam habet AE ad EZ & ex ea quam rectum latus ad tranſverſum, hoc eſt quam ΔΓ habet ad ΓΘ. ſed & ΔΓ ad ΓH compoſitam rationem habet ex ratione ΔΓ ad ΓΘ & ex ratione ΘΓ ad ΓH: erit igitur ratio compoſita ex ratione AE ad EZ & ex ratione ΔΓ ad ΓΘ eadem quæ componitur ex ratione ΔΓ ad ΓΘ & ex ratione ΘΓ ad ΓH. communis auferatur, ratio ſcilicet ΔΓ ad ΓΘ: reliqua igitur ratio AE ad EZ ea-

οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς ΗΑ, διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ ΘΗΖ τῷ ὑπὸ ΑΗ, Κ· ἡ ΑΗ ἄρα πρὸς ΗΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΗΘ πρὸς ΗΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ, ἢ ἐλλείψει, ἢ κύκλου περιφερείᾳ εὐθεῖα καταχθῇ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ἀπὸ τῆς τεταγμένης καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἀναγραφῇ εἴδη παραλληλόγραμμα ἰσογώνια, ἔχῃ δὲ ἡ κατηγμένη πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν τοῦ εἴδους πλευρὰν τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς λοιπὴν τοῦ εἴδους πλευρὰν, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ εἴδους τῆς τομῆς ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν· τὸ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς κατηγμένης εἶδος, τὸ ὅμοιον τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἴδει, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἴδους τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἴδει· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἴδους, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἴδει.

ἘΣΤΩ ὑπερβολὴ, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἀπὸ τῶν ΕΑ, ΓΔ ἰσογώνια εἴδη ἀναγεγράφθω τὰ ΑΖ, ΔΗ, καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΗ τὸν συγκείμενον ἐχέτω λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν· λέγω ὅτι, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ εἶδος, τὸ ὅμοιον τῷ ΑΖ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ΑΖ, ΗΔ· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ, ὅμοιον τῷ ΑΖ, μετὰ τοῦ ΗΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΖ.

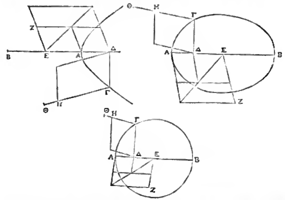
Πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ οὕτως ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΘ, ὡς δὲ ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔΑ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ τῷ ὑπὸ ΔΓΘ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τουτέστιν ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ· ἔστι δὲ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ λόγῳ, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς ΓΔ πρὸς ΓΘ· λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς ΑΕ

πρὸς

Digitized by Google

πρὸς ΕΖ λόγος λοιπῷ τῷ τῆς ΘΓ πρὸς ΓΗ λόγῳ ἐστὶν ὁ αὐτός. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΓΔ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΒΔΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΗΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΖ οὕτως τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΑ, ἰσογώνια γάρ ἐστι καὶ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τῆς ΗΓ πρὸς ΑΕ καὶ τῆς ΓΔ πρὸς ΕΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ πρὸς

dem eſt quæ reliqua ΘΓ ad ΓΗ. ut autem ΘΓ ad ΓΗ ita [per 1. 6.] rectangulum ΘΓΔ ad rectangulum ΗΓΔ; & ut ΑΕ ad ΕΖ ita quadratum ex ΑΕ ad rectangulum ΑΕΖ: ergo [per 11. 5.] ut rectangulum ΘΓΔ ad rectangulum ΗΓΔ ita quadratum ex ΑΕ ad rectangulum ΑΕΖ. ſed oſtenſum eſt rectangulum ΘΓΔ æquale eſſe rectangulo ΒΔΑ: ut igitur rectangulum ΒΔΑ ad rectangulum ΗΓΔ ita quadratum ex ΑΕ ad rectangulum ΑΕΖ; permutandoque [per 16. 5.] ut rectangulum ΒΔΑ ad quadratum ex ΑΕ ita rectangulum ΗΓΔ ad ipſum ΑΕΖ. ſed ut rectangulum ΗΓΔ ad ΑΕΖ rectangulum ita parallelogrammum ΔΗ ad parallelogrammum ΖΑ; parallelogramma enim [ex hyp.] æquiangula ſunt, & [per 22. 6.] rationem habent compoſitam ex ratione laterum ΗΓ ad ΑΕ & ΓΔ ad ΕΖ: quare ut rectangulum ΒΔΑ ad quadra-



τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ΗΔ πρὸς ΑΖ. λεκτέον τοίνυν ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς· ὡς τὸ ὑπὸ ΒΔΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, οὕτως τὰ ΗΔ, ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΔ εἶδος τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον τῷ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ· ὡς ἄρα τὰ ΗΔ, ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΔ εἶδος ὅμοιον τῷ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖ· τὸ ἀπὸ ΕΔ ἄρα εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ΑΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΗΔ, ΑΖ.

Ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἐροῦμεν· ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς ὅλον τὸ ΑΖ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΔΗ, καὶ λοιπόν ἐστι πρὸς λοιπὸν ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ἀπὸ δὲ τοῦ ἀπὸ ΕΑ ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπὸ ΒΔΑ, λοιπόν ἐστι τὸ ἀπὸ

tum ex ΑΕ ita parallelogrammum ΗΔ ad ipſum ΑΖ. itaque dicendum in hyperbola: ut rectangulum ΒΔΑ una cum quadrato ex ΑΕ ad quadratum ex ΑΕ, hoc eſt [per 6. 2.] quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ, ſic parallelogramma ΗΔ, ΑΖ ad parallelogrammum ΑΖ. ſed [per 20. 6.] ut quadratum ex ΕΔ ad quadratum ex ΕΑ ſic parallelogrammum quod fit ex ΕΔ, ſimile & ſimiliter deſcriptum ipſi ΑΖ, ad parallelogrammum ΑΖ: ut igitur parallelogramma ΔΗ, ΑΖ ad parallelogrammum ΑΖ, ſic parallelogrammum à ΕΔ deſcriptum & ſimile ipſi ΑΖ ad ΑΖ: ergo parallelogrammum à ΔΕ factum & ſimile ipſi ΑΖ æquale eſt parallelogrammis ΗΔ, ΑΖ.

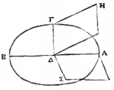
In ellipſi vero & circuli circumferentia dicemus. quoniam ut totum, quadratum ſcilicet ex ΑΕ, ad totum parallelogrammum ΑΖ, ſic ablatum rectangulum ΑΔΒ ad ablatum parallelogrammum ΔΗ: erit [per 19. 5.] reliquum ad reliquum ſicut totum ad totum. quod ſi à quadrato ex ΕΑ auferatur rectangulum ΒΔΑ, relinquetur [per

[per 5. 2.] quadratum ex ΔE: ut igitur quadratum ex ΔE ad exceſſum quo parallelogrammum AZ excedit parallelogrammum ΔH, ſic quadratum ex AB ad parallelogrammum AZ. ſed [per 23.6.] ut quadratum ex AE ad parallelogrammum AZ ſic quadratum ex ΔB ad parallelogrammum quod fit à ΔE ſimile ipſi AZ: ergo ut quadratum ex ΔB ad exceſſum quo parallelogrammum AZ excedit ipſum ΔH, ſic quadratum ex ΔE ad parallelogrammum ΔE ſimile ipſi AZ: parallelogrammum igitur ex ΔE ſimile AZ æquale eſt exceſſui quo parallelogrammum AZ excedit ΔH: quare [per 9. 5.] ſequitur parallelogrammum à ΔE, ſimile ipſi AZ, una cum parallelogrammo ΔH ipſi AZ æquale eſſe.

ΔΕ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει τὸ ΑΖ τοῦ ΔΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΖ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΑΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ εἶδος ὅμοιον τῷ ΑΖ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει τὸ ΑΖ τοῦ ΔΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ΑΖ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ εἶδος ὅμοιον τῷ ΑΖ τῇ ὑπεροχῇ ᾗ ὑπερέχει τὸ ΑΖ τοῦ ΔΗ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΔΕ εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ΑΖ μετὰ τοῦ ΔΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΖ.

EUTOCIUS.

Theorema hoc in hyperbola caſum non habet; in ellipſi vero, ſi applicata in centrum cadat & reliqua eodem modo diſponantur, parallelogrammum quod fit ab applicata parallelogrammo quod fit ab ea quæ ex centro æquale erit. ſit enim ellipſis cujus diameter AB, centrum Δ, ordinatimque applicetur ΓΔ, & ab ipſis ΓΔ, ΔA parallelogramma æquiangula deſcribantur ΔH, AZ; habeat autem ΔΓ ad ΓH rationem compoſitam ex ratione quam habet AΔ ad ΔZ & ex ea quam rectum figuræ latus habet ad tranſverſum: dico parallelogrammum AZ æquale eſſe parallelogrammo ΔH. quoniam enim in ſuperioribus oſtenſum eſt, ut quadratum ex AΔ ad parallelogrammum AZ ita eſſe rectangulum AΔB ad parallelogrammum ΔH: erit permutando, ut quadratum ex AΔ ad rectangulum AΔB ita parallelogrammum AZ ad parallelogrammum ΔH. ſed quadratum ex AΔ æquale eſt rectangulo AΔB: ergo parallelogrammum AZ parallelogrammo ΔH æquale erit.



Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς πτῶσιν οὐκ ἔχει. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως, ἐὰν ἡ καταγομένη ἐπὶ τὸ κέντρον πίπτῃ, καὶ τὰ λοιπὰ γένηται τὰ αὐτά, τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἶδος ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἴδει. ἔστω γὰρ ἔλλειψις, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Δ, καὶ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΓΔ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπό τε τῆς ΓΔ καὶ τῆς ΑΔ εἴδη ἰσογώνια, τὰ ΔΗ, ΑΖ, ἐχέτω δὲ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΔ πρὸς ΔΖ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν· λέγω ὅτι τὸ ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΗ. ἐπεὶ γὰρ ἐν τῷ ἑξῆς δέδεικται, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς τὸ ΔΗ· φημὶ ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ οὕτως τὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΔΗ· ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ ΑΔΒ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΑΖ τῷ ΔΗ.

Prop. XLII. *Theor.*

Si recta parabolam contingens cum diametro conveniat, & à tactu ad diametrum recta ordinatim applicetur; ſumpto autem quovis puncto in ſectione, applicentur ad diametrum duæ rectæ, altera quidem contingenti parallela, altera vero parallela ei quæ à tactu ordinatim applicata eſt: triangulum quod ab ipſis conſtituitur æquale erit parallelogrammo contento ab ordinatim à tactu applicata, & ea quæ interjicitur inter parallelam & verticem ſectionis.

SIT parabola, cujus diameter AB, ducaturque linea AΓ ſectionem contingens, & ΓΘ ordinatim applicetur; à quovis autem puncto Δ applicetur ΔZ, & per Δ quidem ducatur ΔE ipſi AΓ parallela, per Γ vero ΓH parallela ipſi BZ; denique per B ducatur BH ipſi ΘΓ parallela: dico triangulum ΔEZ æquale eſſe parallelogrammo ZH.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϐ.

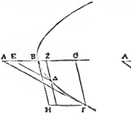
Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἀχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ληφθέντος δέ τινος ἐπὶ τῆς τομῆς σημείου καταχθῶσιν ἐπὶ τὴν διάμετρον δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένην· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον ἴσον ἔσται τῷ περιεχομένῳ παραλληλογράμμῳ ὑπό τε τῆς ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένης, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς παραλλήλου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς.

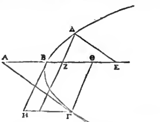
ΕΣΤΩ παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΑΓ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΓΘ, καὶ ἀπό τινος σημείου τυχόντος κατήχθω ἡ ΔΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΑΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΖ ἡ ΓΗ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΘΓ ἡ ΒΗ· λέγω ὅτι τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ τῆς τομῆς ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, καὶ τεταγμένως κατῆκται ἡ ΓΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΘ· διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῆς ΘΒ· τὸ ΑΘΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ, διὰ τὴν τομὴν, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ οὕτως τὸ ΑΓΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΔΖ

Quoniam enim ΑΓ ſectionem contingit, & ordinatim applicata eſt ΓΘ, erit [per 35. huj.] ΑΒ æqualis ipſi ΒΘ, & ΑΘ dupla ipſius ΘΒ; triangulum igitur ΑΘΓ [per 41. 1.] parallelogrammo ΒΓ eſt æquale. & quoniam [per 20. huj.] ut quadratum ex ΓΘ ad quadratum ex ΔΖ ita linea ΘΒ ad ipſam ΒΖ, propter ſectionem; ut autem quadratum ex ΓΘ ad quadratum ex ΔΖ ita [per





τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ οὕτως τὸ ΗΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΓΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον οὕτως τὸ ΘΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΓΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘ παραλληλόγραμμον οὕτως τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ ΑΓΘ τρίγωνον τῷ ΗΘ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ.

4. & 20. 6.] triangulum ΑΓΘ ad triangulum ΕΔΖ; & [per 1. 6.] ut ΘΒ ad ΒΖ ita parallelogrammum ΗΘ ad parallelogrammum ΗΖ: erit [per 11. 5.] ut triangulum ΑΓΘ ad triangulum ΕΔΖ ita ΘΗ parallelogrammum ad parallelogrammum ΗΖ; & permutando, ut ΑΓΘ triangulum ad parallelogrammum ΗΘ ita triangulum ΒΔΖ ad parallelogrammum ΗΖ. ſed triangulum ΑΓΘ æquale eſt parallelogrammo ΗΘ: ergo triangulum ΕΔΖ parallelogrammo ΗΖ æquale erit.

EUTOCIUS.

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἔχει πτώσεις ἕνδεκα, μίαν μὲν ἐὰν ἐσωτέρω λαμβάνηται τὸ Δ τοῦ Γ· δῆλον γὰρ ὅτι καὶ παράλληλοι ἐσωτέρω πίπτουσι τῶν ΑΓ, ΓΘ. ἑτέρας δὲ πέντε οὕτως, ἐὰν τὸ Δ ἐξωτέρω ληφθῇ τοῦ Γ, ἡ μὲν ΔΖ παράλληλος δηλονότι ἐξωτέρω πεσεῖται τῆς ΘΓ, ἡ δὲ ΔΕ ἢ μεταξὺ τῶν Α, Β, ἢ ἐπὶ τὸ Β, ἢ μεταξὺ τῶν Β, Θ, ἢ ἐπὶ τὸ Θ, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Θ· τὸ γὰρ Α ἐξωτέρω πεσεῖν αὐτὴν ἀδύνατον, ἐπειδὴ τὸ Δ ἐξωτέρω ἐστὶ τοῦ Γ, καὶ δῆλον ὅτι καὶ ἡ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀγομένη τῇ ΑΓ ἐσωτέρω τοῦ Α πεσεῖται. ἐὰν δὲ τὸ Δ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη περιληφθῇ τῆς τομῆς, ἢ ἀμφότεραι αἱ παράλληλοι μεταξὺ τῶν Β, Θ παρεμπεσοῦνται, ἢ μὲν ΔΖ ἐσωτέρω τῆς ΘΓ, τὸ δὲ Β ἐπὶ τὸ Θ· ἢ τῆς ΔΖ ὡσαύτως μενούσης, τὸ Ε ἐξωτέρω τοῦ Θ ἐλεύσεται. τοῦ δὲ Ε πάλιν ἐξωτέρω πίπτοντος, τὸ Ζ ἢ ἐπὶ τὸ Θ πεσεῖται, ὡς εἶναι τὴν ΓΘΔ μίαν εὐθεῖαν, (εἰ καὶ μὴ σώζεται κυρίως τότε τὸ τῆς παραλλήλου ἰδίωμα) ἢ ἐξωτέρω τοῦ Θ. δεῖ δὲ, ἐπὶ τῆς ἀποδείξεως τῶν τελευταίων πέντε πτώσεων, τὴν ΔΖ ἐκβάλλειν ἕως τῆς τομῆς καὶ τῆς ΗΓ παραλλήλου, καὶ οὕτως ποιεῖσθαι τὴν ἀπόδειξιν. δυνατὸν δὲ καὶ ἄλλην μίαν καταγραφὴν ἐπινοεῖν ἐκ τούτων, ὅταν διὰ λαμβανομένου ἑτέρου σημείου αἱ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖαι ποιῶσι τὸ λεγόμενον. ἀλλὰ τοῦτο θεώρημά ἐστιν, οὐ πτῶσις.

Hoc theorema undecim habet caſus, unum quidem ſi Δ intra Γ ſumatur; conſtat enim rectas parallelas cadere intra ipſas ΑΓ, ΓΘ. alios autem quinque caſus habet ſi Δ ſumatur extra Γ: nam recta parallela ΔΖ cadet extra ΘΓ, & ΔΕ vel inter Α & Β cadet, vel in ipſo Β, vel inter Β & Θ, vel in Θ, vel extra Θ; ut enim extra Α cadat fieri non poteſt, quoniam cum Δ ſit extra Γ, & quæ per ipſum rectæ ΑΓ parallela ducitur, intra Α cadet. quod ſi Δ ſumatur ex altera parte ſectionis; vel utræque parallelæ inter Β & Θ cadent, vel ΔΖ quidem cadet intra ΘΓ, punctum vero Β in Θ; vel, ΔΖ hunc ſitum retinente, punctum Β cadet extra Θ. puncto vero Ε cadente extra Θ, punctum Ζ vel in Θ cadet, ita ut ΓΘΔ ſit recta linea (quanquam tunc non exacte parallelarum proprietas ſervetur) vel extra Θ cadet. oportet autem in demonſtratione quinque caſuum poſtremorum rectam ΔΖ uſque ad ſectionem & ad ipſam parallelam ΗΓ producere, atque ſic demonſtrationem abſolvere. ſed ex his aliam quandam deſcriptionem mente concipere poſſumus; cum nempe per ſumptum aliud punctum, quæ in principio ſupponebantur rectæ efficiant rem propoſitam. ſed hoc theorema eſt, non caſus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ΄.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ,

Prop. XLIII. *Theor.*

Si hyperbolam, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam recta linea contin-

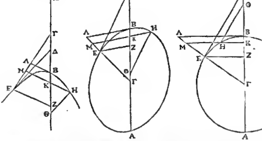
T gens

gens conveniat cum diametro; & à tactu ad diametrum recta ordinatim applicetur; huic vero parallela ducatur per verticem ſectionis, quæ cum recta per tactum & centrum ducta conveniat; & ſumpto aliquo puncto in ſectione, ab eo ad diametrum duæ rectæ ducantur, una quidem contingenti parallela, altera vero parallela ei quæ à tactu applicata eſt: triangulum ab ipſis factum in hyperbola minus erit quam triangulum, quod abſcindit linea per centrum & tactum ducta, triangulo facto ab ea quæ ex centro ſimilique abſciſſo; in ellipſi vero & circuli circumferentia, una cum triangulo abſciſſo ad centrum æquale erit triangulo quod ab ea quæ ex centro deſcribitur, ſimilique abſciſſo.

καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ταύτῃ διὰ τῆς κορυφῆς παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, ληφθέντος δέ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς, ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἐπὶ τῆς ἁφῆς κατηγμένην· τὸ γινόμενον ὑπ᾽ αὐτῶν τρίγωνον, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, τριγώνου, ὃ ἀποτέμνει ἡ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἁφῆς, ἔλασσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τριγώνῳ τῷ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, μετὰ τοῦ ἀποτεμνομένου πρὸς τῷ κέντρῳ τριγώνου ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ.

SIT hyperbola, vel ellipſis, vel circuli circumferentia, cujus diameter AB, centrumque Γ; ducaturque recta ΔE ſectionem contingens; & juncta ΓE, ordinatim applicetur EZ; ſumatur autem aliquod punctum in ſectione, quod ſit H; & ducatur recta HΘ contingenti parallela, & HKM ordinatim applicetur; per B vero ordinatim applicetur recta BΛ: dico triangulum KMΓ differre à triangulo ΓΛB triangulo HKΘ.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ AB, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔE, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓE, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ EZ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ H, καὶ τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἤχθω ἡ HΘ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ HKM, διὰ δὲ τοῦ B τεταγμένως ἀνήχθω ἡ BΛ· λέγω ὅτι τὸ KMΓ τρίγωνον τοῦ ΓΛB τριγώνου διαφέρει τῷ HKΘ τριγώνῳ.



Quoniam enim linea EΔ ſectionem contingit, ordinatim vero applicata eſt EZ; [per 39. huj.] habebit BZ ad ZΔ rationem compoſitam ex ratione ΓZ ad ZE, & ex ratione recti lateris ad tranſverſum. ſed [per 4. 6.] ut EZ ad ZΔ ita HK ad KΘ; & ut ΓZ ad ZB ita ΓB ad BΛ: ergo HK ad KΘ rationem habebit compoſitam ex ratione ΓB ad BΛ, & ex ratione recti lateris ad tranſverſum: quare, ex iis quæ in quadrageſimo primo theoremate oſtendimus, triangulum ΓKM à triangulo BΓΛ differt triangulo HΘK; etenim in parallelogrammis triangulorum iſtorum duplis hæc demonſtrata ſunt.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς τομῆς ἐφάπτεται μὲν ἡ EΔ, κατηγμένη δέ ἐστιν ἡ EZ· ἡ EZ πρὸς ZΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ τῆς ΓZ πρὸς ZE καὶ τοῦ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ EZ πρὸς ZΔ οὕτως ἡ HK πρὸς KΘ, ὡς δὲ ἡ ΓZ πρὸς ZE οὕτως ἡ ΓB πρὸς BΛ· ἔχει ἄρα ἡ HK πρὸς KΘ τὸν συγκείμενον λόγον, ἐκ τοῦ τῆς ΓB πρὸς BΛ καὶ τοῦ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ πρώτῳ θεωρήματι, τὸ ΓKM τρίγωνον τοῦ BΓΛ τριγώνου διαφέρει τῷ HΘK· καὶ γὰρ ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν παραλληλογράμμων τὰ αὐτὰ δέδεικται.

EU-

EUTOCIUS.

Ἐν τισι φέρεται ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου τοιαύτη.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐςὶ τὸ ὑπὸ ΖΓΔ τῷ ἀπὸ ΓΒ· ἔςιν ἄρα ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΒ οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς ΓΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΔ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτως τὸ ΕΓΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΖΓ πρὸς ΓΔ οὕτως τὸ ΕΖΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΓΔ τρίγωνον· ὡς ἄρα τὸ ΕΓΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ΕΓΖ πρὸς τὸ ΕΓΔ τρίγωνον· ἴσον ἄρα τὸ ΕΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΓΛ· ἔςιν ἄρα, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἀναςρέψαντι, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἀνάπαλιν καὶ διελόντι καὶ ἔτι ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ΕΖΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον οὕτως τὸ ΕΓΖ πρὸς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον· ἴσον ἄρα τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΕΛΒΖ τετραπλεύρῳ. [a] καὶ ἐπεί ἐςιν ὡς τὸ ἀπὸ ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτως τὸ ΕΓΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΓΒ τρίγωνον, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς διελόντι, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἀνάπαλιν καὶ ἀναςρέψαντι καὶ ἀνάπαλιν, ἔςιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ οὕτως τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΒΛΓ τρίγωνον· ὁμοίως καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚΒ οὕτως τὸ ΛΓΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΜΛΒΚ τετράπλευρον· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚΒ οὕτως τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΜΒΚΛ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ οὕτως τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΚ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΕΔΖ πρὸς τὸ ΗΘΚ οὕτως τὸ ΕΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΜΛΒΚ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΛΒΖ οὕτως τὸ ΗΘΚ πρὸς τὸ ΜΛΒΚ. ἴσον δὲ τὸ ΕΔΖ τῷ ΕΛΒΖ ἐδείχθη· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΘΚ τῷ ΜΛΒΚ τετραπλεύρῳ· τὸ ἄρα ΚΜΓ τρίγωνον τοῦ ΗΘΚ διαφέρει τῷ ΓΛΒ τριγώνῳ.

Ἐπιςῆσαι δεῖ ἐν ταύτῃ τῇ δείξει, (ὀλίγην γὰρ ἀσάφειαν ἔχει ἐν ταῖς ἀναλογίαις τῆς ἐλλείψεως) ἵνα τὰ διὰ τῆς συντομίας τοῦ ῥητοῦ ὑφ' ἓν λεγόμενα διῃρημένως ποιήσωμεν. οἷόν φησι [a] [Ἐπεί ἐςιν ὡς τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτως τὸ ΕΓΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΓΒ· ἀνάπαλιν καὶ ἀναςρέψαντι καὶ ἀνάπαλιν.] ἔςι γὰρ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ οὕτως τὸ ΛΒΓ πρὸς τὸ ΒΖΓ· ἀναςρέψαντι δὲ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ (τοῦτ' ἔςιν ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΖ, διὰ τὸ διχοτομίαν εἶναι τὸ Γ τῆς ΑΒ) οὕτως τὸ ΛΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΖΛ τετράπλευρον, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ οὕτως τὸ ΒΛΒΖ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΒΛΓ τρίγωνον. Ἔχει δὲ πτώσεις, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, ἕνδεκα, ὅσας εἶχε καὶ τὸ πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς παραβολῆς, καὶ ἄλλην μίαν ὅταν τὸ ἐπὶ τοῦ Η λαμβανόμενον σημεῖον τὸ αὐτὸ ᾖ τῷ Β. τότε γὰρ συμβαίνει τὸ ΕΔΖ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΛΒΓ ἴσον εἶναι τῷ ΓΒΖ· δέδεικται μὲν γὰρ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον ἴσον τῷ ΛΒΖΕ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΛΒΖΒ τοῦ ΓΒΚ τριγώνου διαφέρει τῷ ΛΒΓ. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως, ἢ τὸ αὐτό ἐςι τὸ Η τῷ Β, ἢ ἐσώτερον λαμβάνεται τοῦ Β· καὶ δῆλον ὅτι ἀμφότεραι αἱ παράλληλοι μεταξὺ πίπτουσι τῶν Δ, Ζ, ὡς

In aliquibus codicibus hujus theorematis talis legitur demonſtratio.

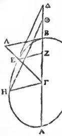
Quoniam enim [per 37. huj.] rectangulum ΖΓΔ æquale eſt quadrato ex ΓΒ; erit [per 17.6.] ut ΖΓ ad ΓΒ ita ΓΒ ad ΓΔ: quare [per 20. 6.] ut figura quæ fit ex ΓΖ ad figuram ex ΓΒ ita linea ΖΓ ad ΓΔ. ſed ut figura ex ΖΓ ad figuram ex ΓΒ ita ΕΓΖ triangulum ad triangulum ΒΓΑ, & ut linea ΖΓ ad ipſam ΓΔ ita [per 1. 6.] ΕΖΓ triangulum ad triangulum ΕΓΔ: ut igitur ΕΓΖ triangulum ad triangulum ΒΓΑ ita triangulum ΕΓΖ ad ipſum ΒΓΔ: propterea que [per 9. 5.] triangulum ΕΓΔ triangulo ΒΓΑ eſt æquale: ergo in hyperbola, per converſionem rationis; & in ellipſi, invertendo dividendoque & rurſus invertendo, ut ΕΖΓ triangulum ad quadrilaterum ΕΑΒΖ ita triangulum ΕΓΖ ad triangulum ΕΔΖ: quare triangulum ΕΔΖ æquale eſt quadrilatero ΕΑΒΖ. [a] & quoniam ut quadratum ex ΓΖ ad quadratum ex ΓΒ ita triangulum ΕΓΖ ad triangulum ΑΓΒ; in hyperbola quidem dividendo, in ellipſi autem invertendo, & per converſionem rationis & rurſus invertendo, erit ut rectangulum ΑΖΒ ad quadratum ex ΒΓ ita quadrilaterum ΕΑΒΖ ad triangulum ΒΑΓ; & ſimiliter ut quadratum ex ΓΒ ad rectangulum ΑΚΒ ita triangulum ΑΓΒ ad quadrilaterum ΜΑΒΚ: ergo ex æquali, ut rectangulum ΑΖΒ ad rectangulum ΑΚΒ ita ΕΑΒΖ quadrilaterum ad quadrilaterum ΜΒΚΑ. ut autem rectangulum ΑΖΒ ad rectangulum ΑΚΒ ita [per 21. huj.] quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex ΗΚ: & ut quadratum ex ΕΖ ad quadratum ex ΗΚ ita triangulum ΕΔΖ ad triangulum ΗΘΚ: quare ut triangulum ΕΔΖ ad triangulum ΗΘΚ ita quadrilaterum ΕΑΒΖ ad quadrilaterum ΜΑΒΚ; & permutando ut triangulum ΕΔΖ ad quadrilaterum ΕΑΒΖ ita triangulum ΗΘΚ ad quadrilaterum ΜΑΒΚ. ſed triangulum ΕΔΖ oſtenſum eſt [ſupra] æquale quadrilatero ΕΑΒΖ; ergo & triangulum ΗΘΚ quadrilatero ΜΑΒΚ eſt æquale: triangulum igitur ΚΜΓ à triangulo ΓΑΒ differt triangulo ΗΘΚ.

Sed cum hæc demonſtratio obſcuritatem quandam habeat in proportionibus ellipſeos, enitendum eſt ut ea quæ breviter dicta ſunt latius explicentur. [a] [Quoniam, *inquit*, ut quadratum ex ΖΓ ad quadratum ex ΓΒ ita triangulum ΕΓΖ ad triangulum ΑΓΒ, erit invertendo & per converſionem rationis rurſuſque invertendo.] eſt enim invertendo ut quadratum ΒΓ ad quadratum ex ΓΖ ita ΑΒΓ triangulum ad ΕΖΓ: & per converſionem rationis, ut quadratum ex ΒΓ ad rectangulum ΑΖΒ (hoc eſt, ad exceſſum quo quadratum ex ΓΒ excedit quadratum ex ΓΖ, quia punctum Γ lineam ΑΒ bifariam ſecat) ita triangulum ΑΒΓ ad quadrilaterum ΕΒΖΑ: & invertendo, ut rectangulum ΑΖΒ ad quadratum ex ΒΓ ita quadrilaterum ΕΑΒΖ ad ΒΑΓ triangulum. Habet autem in hyperbola caſus undecim, quot habebat præcedens theorema in parabola, & præterea alium quendam; cum ſcilicet punctum quod in Η ſumitur idem ſit quod Β. tunc enim contingit triangulum ΕΔΖ una cum triangulo ΑΒΓ æquale eſſe triangulo ΓΒΖ; etenim oſtenſum eſt triangulum ΕΔΖ quadrilatero ΑΒΖΕ æquale eſſe, quadrilaterum autem ΑΒΖΒ à triangulo ΓΕΖ ipſo ΑΒΓ triangulo differt. ſed in ellipſi vel punctum Η idem eſt quod Β vel intra Β ſumitur: & tunc utraſque parallelas inter Δ & Ζ cadere perſpicuum

ſpicuum eſt. quod ſi H ſumatur infra B, & ab eo ducta ipſi EZ parallela cadat inter Z & Γ, punctum Θ quinque caſus efficit: vel enim cadit inter Δ & B, vel in B, vel inter B & Z, vel in Z, vel inter Z & Γ.

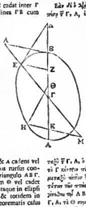
Si vero quæ per H ducitur applicatæ parallela in centrum Γ cadat, punctum Θ alios quinque efficit caſus. attendendum tamen eſt triangulum hic factum à lineis quæ ipſis BΔ, BZ ſunt parallelæ triangulo ABΓ æquale eſſe. quoniam enim ut quadratum ex BZ ad quadratum ex HΓ ita triangulum BΔZ ad triangulum HΘΓ, ſimilia enim triangula ſunt; & ut quadratum ex BZ ad quadratum ex HΓ ita rectangulum BZA ad rectangulum BΓA, hoc eſt ad quadratum ex BΓ: erit ut triangulum EΔZ ad ipſum HΘΓ ita rectangulum BZA ad quadratum ex BΓ. ut autem rectangulum BZA ad quadratum ex BΓ ita oſtenſum eſt eſſe quadrilaterum ABZE ad triangulum ABΓ: ut igitur triangulum EΔZ ad HΘΓ ita quadrilaterum ABZE ad triangulum ABΓ, & permutando ut triangulum EΔZ ad quadrilaterum ABZE ita triangulum HΘΓ ad triangulum ABΓ. ſed æquale eſt triangulum EΔZ quadrilatero ABZE: triangulum igitur HΘΓ triangulo ABΓ eſt æquale. poſſumus autem hæc etiam aliter probare, ſi dicamus in parallelogrammis triangulorum duplis eadem demonſtrata eſſe; videlicet in quadrageſimo primo theoremate

Quod ſi ducta per H parallela ipſi BZ cadat inter Γ & A, producatur quidem quouſque linea ΓB cum ipſa conveniat; & punctum Θ ſeptem caſus efficiet. vel enim inter B & Δ cadit, vel in B, vel inter B & Z, vel in Z, vel inter Z & Γ, vel in Γ, vel inter Γ & A: & in his caſibus contingit differentiam triangulorum ΛBΓ, HΘK conſtitui à rectis AΓ, ΓB infra Γ productis. ſi vero H ſumatur in altera parte ſectionis, & ea quæ per H ducitur ipſi EZ parallela inter B & Z cadat, producetur, ob demonſtrationem, quouſque ſecet ipſam AΓ; & punctum Θ faciet ſeptem caſus: vel inter B & Z cadens, vel in Z, vel inter Z & Γ, vel in Γ, vel inter Γ & A, vel in A, vel infra A. ſi vero HK cadat inter Z & Γ, punctum Θ quinque caſus efficiet. vel enim erit inter Z & Γ, vel in Γ, vel inter Γ & A, vel in A, vel infra A. ſed ſi HK in centrum Γ cadat, punctum Θ caſus efficiet tres: vel inter Γ & A cadens vel in A vel extra A. atque in his caſibus rurſus contingit triangulum HΘK æquale eſſe triangulo ABΓ. ſi vero HK cadat inter Γ & A, punctum Θ vel cadet inter Γ & A, vel in A, vel extra A. itaque in ellipſi caſus omnes erunt quadraginta duo, & totidem in circuli circumferentia; ita ut hujus theorematis caſus omnes ſint nonaginta ſex.



ἔχει ἐν τῷ ῥητῷ. εἰ δὲ ἐξωτέρω ληφθείη τὸ Η τοῦ Ε, καὶ ἡ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ΕΖ παράλληλος μεταξὺ πίπτῃ τῶν Ζ, Γ, τὸ Θ σημεῖον ποιεῖ πτώσεις πέντε· ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Δ, Β πίπτει, ἢ ἐπὶ τὸ Β, ἢ μεταξὺ τῶν Β, Ζ, ἢ ἐπὶ τὸ Ζ, ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ.

Ἐὰν δὲ ἡ διὰ τοῦ Η τῇ κατηγμένῃ παράλληλος ἐπὶ τὸ Γ κέντρον πίπτῃ, τὸ Θ πάλιν σημεῖον ποιήσει ἄλλας πέντε πτώσεις ὁμοίως. καὶ δεῖ ἐπὶ τούτου σημειώσασθαι ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων τῶν ΕΔ, ΕΖ γινόμενον τρίγωνον ἴσον γίνεται τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ οὕτως τὸ ΒΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΓ, ὅμοια γάρ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΑ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΓ· ὡς ἄρα τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΒΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ οὕτως ἐδείχθη ἔχον τὸ ΑΒΖΕ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΓ οὕτως τὸ ΑΒΖΕ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΕΔΖ πρὸς τὸ ΑΒΖΕ τετράπλευρον οὕτως τὸ ΗΘΓ πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ ΕΔΖ τῷ ΑΒΖΕ· ἴσον ἄρα ΗΘΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ. καὶ ἄλλως δὲ ταύτας δυνατὸν δεῖξαι, λέγοντας ὅτι ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν παραλληλογράμμων ταῦτα δέδεικται, ὥστε λόγῳ τοῦ μα΄. θεωρήματος.



Ἐὰν δὲ ἡ διὰ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος ἀγομένη μεταξὺ πίπτῃ τῶν Γ, Α, ἐκβληθήσεται μὲν ἕως ἂν ἡ ΓΕ αὐτῇ συμπέσῃ· τὸ δὲ Θ σημεῖον ποιήσει πτώσεις ἑπτά. ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Β, Δ, ἢ ἐπὶ τὸ Β πίπτει, ἢ μεταξὺ τῶν Β, Ζ, ἢ ἐπὶ τὸ Ζ, ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ, ἢ ἐπὶ τὸ Γ, ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α. καὶ ἐπὶ τούτων τῶν πτώσεων συμβαίνει τὴν διαφορὰν τῶν ΑΒΓ, ΗΘΚ τριγώνων κατασκευάζεσθαι ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ εὐθειῶν ὑπὸ τὸ Γ ἐκβαλλομένων. ἐὰν δὲ τὸ Η ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ληφθῇ τῆς τομῆς, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΕΖ παράλληλος μεταξὺ πίπτῃ τῶν Β, Ζ, ἐκβληθήσεται μὲν διὰ τὴν ἀπόδειξιν, ἕως ἂν τέμῃ τὴν ΑΓ· τὸ δὲ Θ σημεῖον ποιήσει ζ΄ πτώσεις· ἢ μεταξὺ τῶν Β, Ζ, ἢ ἐπὶ τὸ Ζ πίπτον, ἢ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ, ἢ ἐπὶ τὸ Γ, ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α, ἢ ἐπὶ τὸ Α, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ μεταξὺ πίπτῃ τῶν Ζ, Γ, τὸ Θ ποιήσει πτώσεις πέντε· ἢ γὰρ μεταξὺ τῶν Ζ, Γ πεσεῖται, ἢ ἐπὶ τὸ Γ, ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α, ἢ ἐπὶ τὸ Α, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ ἐπὶ τὸ Γ κέντρον πίπτῃ, τὸ Θ σημεῖον ποιήσει πτώσεις τρεῖς· ἢ μεταξὺ πίπτον τῶν Α, Γ, ἢ ἐπὶ τὸ Α, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. καὶ ἐπὶ τούτων τῶν πτώσεων συμβήσεται πάλιν τὸ ΗΘΚ τρίγωνον ἴσον γίνεσθαι τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ μεταξὺ πίπτῃ τῶν Γ, Α, τὸ Θ σημεῖον ἢ μεταξὺ τῶν Γ, Α πεσεῖται, ἢ ἐπὶ τὸ Α, ἢ ἐξωτέρω τοῦ Α. συμβαίνει οὖν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως τὰς πάσας πτώσεις εἶναι μβ΄, καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας τοσαύτας· ὥστε εἶναι τὰς πάσας πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος ϟϛ΄.

Prop. XLIV. *Theor.*

Si nnam oppoſitarum ſectionum recta linea contingens cum diametro conveniat, à tactu vero ad diametrum recta ordinatim applicetur; atque huic parallela ducatur per verticem alterius ſectionis, ita ut conveniat cum recta

*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ΄.

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ τις εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ταύτῃ διὰ τῆς κορυφῆς τῆς ἑτέρας τομῆς παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα τῇ διὰ

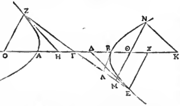
τῆς

τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένη εὐθεῖα, ληφθέντος δέ τινος ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ τυχόντος σημείου, καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν κατηγμένην ἀπὸ τῆς ἁφῆς τεταγμένως· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον τριγώνου, ὃ ἀποτέμνει ἡ κατηγμένη πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, ἔλασσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ.

per tactum & centrum ducta; ſumpto autem in ſectione quovis puncto, applicentur ad diametrum duæ rectæ, quarum altera contingenti ſit parallela, altera parallela ei quæ à tactu ordinatim applicata eſt: triangulum ab ipſis factum minus eſt quam triangulum quod abſcindit applicata ad centrum ſectionis, triangulo ſimili abſciſſo ab ea quæ ex centro.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΖ, ΒΕ, διάμετρος δὲ αὐτῶν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς ΖΑ τομῆς τοῦ Ζ ἐφαπτομένη ἤχθω τῆς τομῆς ἡ ΖΗ, τεταγμένως δὲ ἡ ΖΟ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΖ ἐκβεβλήσθω, ὡς ἡ ΓΕ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΖΟ παράλληλος ἡ ΒΛ, καὶ εἰλήφθω σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς ΒΕ τομῆς τὸ Ν, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν τεταγμένως κατήχθω ἡ ΝΘ, τῇ δὲ ΖΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΚ· λέγω ὅτι τὸ ΘΚΝ τρίγωνον τοῦ ΓΜΘ τριγώνου ἔλασσόν ἐστι τῷ ΓΒΛ τριγώνῳ.

SINT oppoſitæ ſectiones ΑΖ, ΒΕ, quarum diameter ΑΒ, centrum Γ; & ab aliquo puncto eorum quæ ſunt in ſectione ΖΑ, videlicet à puncto Ζ, ducatur recta ΖΗ ſectionem contingens; ordinatimque applicetur ΖΟ; & juncta ΖΓ producatur, ut ad Ε; per Β vero ducatur ΒΛ ipſi ΖΟ parallela; & ſumatur aliquod punctum in ſectione ΒΕ, quod ſit Ν; à quo ΝΘ ordinatim applicetur, atque ipſi ΖΗ parallela ducatur ΝΚ: dico triangulum ΘΚΝ minus eſſe quam triangulum ΓΜΘ, triangulo ΓΒΛ.



Διὰ γὰρ τοῦ Ε τῆς ΒΕ τομῆς ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΕΔ, τεταγμένως δὲ ἡ ΕΞ. [a] ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΖΑ, ΒΕ, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΓΕ, καὶ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΕΔ· τῇ ΖΗ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ. ἡ δὲ ΝΚ παράλληλός ἐστι τῇ ΖΗ· καὶ τῇ ΕΔ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΝΚ, ἡ δὲ ΜΘ τῇ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΒΕ, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, ἐφαπτομένη δὲ τῆς τομῆς ἡ ΔΕ, τεταγμένως δὲ κατηγμένη ἡ ΕΞ, καὶ τῇ ΕΞ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΛ, καὶ εἴληπται ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Ν, ἀφ' οὗ τεταγμένως μὲν κατῆκται ἡ ΝΘ, παράλληλος δὲ ἦκται τῇ ΔΕ ἡ ΚΝ· τὸ ἄρα ΝΘΚ τρίγωνον τοῦ ΘΜΓ τριγώνου ἔλασσόν ἐστι τῷ ΓΒΛ τριγώνῳ. τοῦτο γὰρ ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ τρίτῳ θεωρήματι δέδεικται.

Ducatur enim per Ε recta ΕΔ contingens ſectionem ΕΒ; & ΕΞ ordinatim applicetur. [a] itaq; quoniam oppoſitæ ſectiones ſunt ΖΑ, ΒΕ, quarum diameter ΑΒ; & recta ΖΓΕ per centrum ducitur; & ΖΗ, ΕΔ ſectiones contingunt: erit ΔΕ ipſi ΖΗ parallela. eſt autem [ex hyp.] ΝΚ parallela ipſi ΖΗ: ergo & ΝΚ ipſi ΕΔ; & ΜΘ ipſi ΒΛ parallela eſt. quoniam igitur hyperbola eſt ΒΕ, cujus diameter ΑΒ, centrum Γ; & recta ΔΕ ſectionem contingit, ordinatimque applicata eſt ΕΞ; & ipſi ΕΞ parallela eſt ΒΛ; ſumitur autem in ſectione punctum Ν, & ab eo ordinatim applicatur ΝΘ, & ipſi ΔΕ parallela ducitur ΚΝ: erit triangulum ΝΘΚ minus quam triangulum ΘΜΓ ipſo ΓΒΛ triangulo. hoc enim in quadrageſimo tertio theoremate oſtenſum eſt.

EUTOCIUS.

[a] Ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΖΑ, ΒΕ, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΓΕ, καὶ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΔΕ· παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΖΗ.] Ἐπεὶ γὰρ ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΖ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΖΗ, καὶ κατηγμένη ἡ ΖΟ· ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΟΓΗ τῷ ἀπὸ ΓΑ, διὰ τὸ λζ΄. θεώρημα. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΞΓΔ τῷ ἀπὸ ΓΒ ἐστὶν ἴσον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΟΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΞΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ ΟΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΟΓΗ τῷ ὑπὸ ΞΓΔ. καί ἐστιν ἡ ΟΓ τῇ ΓΞ ἴση· καὶ ἡ ΗΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΓ ἴση τῇ ΓΕ, διὰ τὸ λ΄·

[a] Itaque quoniam oppoſitæ ſectiones ſunt ΖΑ, ΒΕ, quarum diameter ΑΒ, & recta ΖΓΕ per centrum ducitur, & ΖΗ, ΔΕ ſectiones contingunt; erit ΔΕ ipſi ΖΗ parallela.] Quoniam enim hyperbola eſt ΑΖ, rectaque ΖΗ ſectionem contingit, & applicata eſt ΖΟ; erit rectangulum ΟΓΗ æquale quadrato ex ΓΑ, ex trigeſimo ſeptimo theoremate. & ſimiliter rectangulum ΞΓΔ quadrato ex ΓΒ æquale eſt: igitur ut rectangulum ΟΓΗ ad quadratum ex ΑΓ ita rectangulum ΒΓΔ ad quadratum ex ΒΓ; & permutando, ut rectangulum ΟΓΗ ad rectangulum ΞΓΔ ita quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ; quare rectangulum ΟΓΗ æquale eſt rectangulo ΒΓΔ. eſtque linea ΟΓ æqualis ipſi ΓΞ, ergo & ΗΓ ipſi ΓΔ. ſed ΖΓ ipſi ΓΕ eſt æqualis, ex trigeſimo theoremate: lineæ igi-

tur Δ Γ, Γ Η æquales ſunt ipſis Ε Γ, Γ Δ, anguloſque æquales continent ad Γ; ſunt enim ad verticem: quare & Ζ Η ipſi Ε Δ eſt æqualis, & angulus Γ Η Ζ angulo Γ Δ Ε. & alterni ſunt: ergo Ζ Η ipſi Ε Δ parallela eſt. Caſus hujus theorematis duodecim ſunt, quemadmodum in hyperbola diximus in quadrageſimo tertio theoremate, atque eadem eſt demonſtratio.

Prop. XLV. *Theor.*

Si hyperbolam, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum ſecunda diametro conveniat; & à tactu ad eandem diametrum recta applicetur diametro alteri parallela, & per tactum & centrum ducta recta producatur; ſumpto autem in ſectione quovis puncto, ad ſecundam diametrum ducantur duæ rectæ, quarum una contingenti, altera applicatæ ſit parallela: triangulum quod ab ipſis conſtituitur, in hyperbola quidem, majus eſt quam triangulum abſciſſum ab applicata ad centrum, triangulo cujus baſis eſt recta contingens & vertex centrum ſectionis; in ellipſi vero & circuli circumferentia, unà cum triangulo abſciſſo, æquale eſt triangulo cujus baſis recta contingens & vertex ſectionis centrum.

SIT hyperbola, vel ellipſis, vel circuli circumferentia Α Β Γ, cujus diameter Α Θ, ſecunda diameter Δ Θ Λ, & centrum Θ; recta vero Γ Μ Λ ſectionem contingat in Γ, ducaturque Γ Δ ipſi Α Θ parallela, & juncta Γ Θ producatur; ſumpto deinde in ſectione quovis puncto Β, ducantur ad ſecundam diametrum rectæ Β Ε, Β Ζ, quæ ipſis Λ Γ, Γ Δ ſint parallelæ: dico triangulum Β Ε Ζ, in hyperbola quidem, majus eſſe quam triangulum Η Θ Ζ triangulo Λ Γ Θ; in ellipſi vero & circulo, triangulum Β Ε Ζ unà cum Ζ Η Θ æquale eſſe triangulo Γ Λ Θ.

Ducantur enim Γ Κ, Β Ν parallelæ ipſi Δ Θ. & quoniam recta Γ Λ Μ ſectionem contingit; atque applicata eſt Γ Κ; habebit [per 39. huj.] Γ Κ ad Κ Θ rationem compoſitam ex ratione quam habet Μ Κ ac Κ Γ & ex ea quam rectum figuræ latus habet ad tranſverſum. ut autem Μ Κ ad Κ Γ ita [per 4. 6.] Γ Δ ad Δ Λ: ergo Γ Κ ad Κ Θ rationem compoſitam habet ex ratione Γ Δ ad Δ Λ & ex ratione recti lateris ad tranſverſum. atque eſt triangulum Γ Δ Λ figura quæ fit ex Κ Θ; & triangulum Γ Θ Κ, hoc eſt Γ Δ Θ, figura quæ fit ex Γ Κ, hoc eſt ex Δ Θ: quare triangulum Γ Δ Λ, in hyperbola quidem, majus eſt quam triangulum Γ Κ Θ, triangulo facto ex Α Θ, ſimili ipſi Γ Δ Λ; in ellipſi vero & circulo triangulum Γ Κ Θ una cum ipſo Γ Δ Λ eidem triangulo eſt æquale. hoc enim in parallelogrammis triangulorum duplis, in quadrageſimo primo theoremate, demonſtratum eſt. itaque quoniam triangulum Γ Δ Λ à triangulo Γ Κ Θ, vel Γ Δ Θ,

αἱ ἄρα Ζ Γ, Γ Η ἴσαι εἰσὶ ταῖς Ε Γ, Γ Δ. καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι τὰς πρὸς τῷ Γ, κατὰ κορυφὴν γάρ· ὥστε καὶ ἡ Ζ Η τῇ Ε Δ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ Γ Η Ζ γωνία τῇ ὑπὸ Γ Δ Ε. καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ Η τῇ Ε Δ. αἱ πτώσεις αὐτοῦ ιβʹ. εἰσί, καθάπερ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἐν τῷ μγʹ. ἐλέχθη, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτή.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μεʹ.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ τις εὐθεῖα ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ληφθέντος δὲ τυχόντος ἐπὶ τῆς τομῆς σημείου, ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν κατηγμένην· τὸ γινόμενον ὑπ᾽ αὐτῶν τρίγωνον, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, τριγώνου, ὃ ἀποτέμνει ἡ κατηγμένη πρὸς τῷ κέντρῳ, μεῖζόν ἐστι τῷ τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ ἐφαπτομένη, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς τομῆς· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, μετὰ τοῦ ἀποτεμνομένου ἴσον ἔσται τῷ τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ ἐφαπτομένη, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ Α Β Γ, ἧς διάμετρος μὲν ἡ Α Θ, δευτέρα δὲ Δ Θ Λ, κέντρον δὲ τὸ Θ, καὶ ἡ μὲν Γ Μ Λ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Γ, ἡ δὲ Γ Δ ἤχθω παρὰ τὴν Α Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Θ Γ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἤχθωσαν αἱ Β Ε, Β Ζ, παρὰ τὰς Λ Γ, Γ Δ, ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον· λέγω ὅτι, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, τὸ Β Ε Ζ τρίγωνον τοῦ Η Θ Ζ μεῖζόν ἐστι τῷ Λ Γ Θ· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, τὸ Β Ζ Ε τρίγωνον μετὰ τοῦ Ζ Η Θ ἴσον ἐστὶ τῷ Γ Λ Θ.

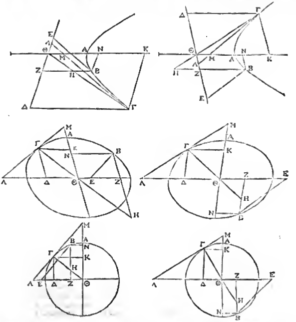
Ἤχθωσαν γὰρ αἱ Γ Κ, Β Ν παρὰ τὴν Δ Θ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ Γ Λ Μ, κατῆκται δὲ ἡ Γ Κ· ἡ Γ Κ πρὸς Κ Θ τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ Μ Κ πρὸς Κ Γ καὶ τοῦ ὃν ἔχει τοῦ εἴδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν. ὡς δὲ ἡ Μ Κ πρὸς Κ Γ οὕτως ἡ Γ Δ πρὸς Δ Λ· ἡ Γ Κ ἄρα πρὸς Κ Θ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον, ἐκ τοῦ τῆς Γ Δ πρὸς Δ Λ καὶ τοῦ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. καὶ ἐστι τὸ Γ Δ Λ τρίγωνον τὸ ἀπὸ τῆς Κ Θ εἶδος, τὸ δὲ Γ Κ Θ, τουτέστι τὸ Γ Δ Θ, τὸ ἀπὸ τῆς Γ Κ εἶδος, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Δ Θ· τὸ Γ Δ Λ ἄρα τρίγωνον τοῦ Γ Κ Θ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς Α Θ τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ Γ Δ Λ· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, τὸ Γ Κ Θ μετὰ τοῦ Γ Δ Λ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ. καὶ γὰρ ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν τοῦτο ἐδείχθη ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ πρώτῳ θεωρήματι. ἐπεὶ οὖν τὸ Γ Δ Λ τρίγωνον τοῦ Γ Κ Θ, ἤτοι τοῦ Γ Δ Θ,

διαφέρει

Digitized by Google

διαφέρει τῷ ἀπὸ τῆς ΛΘ τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ, διαφέρει δὲ καὶ τῷ ΓΘΛ τριγώνῳ· ἴσον ἄρα τὸ ΓΘΛ τρίγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΛΘ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ τριγώνῳ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΒΖΕ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΓΔΛ, τὸ δὲ ΗΖΘ τῷ ΓΔΘ· τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΖΕ

differt triangulo, quod fit ex ΛΘ ipſi ΓΔΛ ſimili; differt autem & triangulo ΓΘΛ: erit ΓΘΛ triangulum æquale ei quod fit ex ΛΘ ſimili ipſi ΓΔΛ. rurſus quoniam [per 4. 6.] triangulum ΒΖΕ ſimile eſt triangulo ΓΔΛ, & triangulum ΗΖΘ triangulo ΓΔΘ; ipſorum latera inter ſe eandem rationem habent. atque eſt triangulum



τὸ ἀπὸ τῆς ΝΘ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου, τὸ δὲ ΗΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΝ κατηγμένης, τουτέστι τῆς ΖΘ· καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα πρότερον τὸ ΒΖΕ τοῦ ΗΘΖ διαφέρει τῷ ἀπὸ τῆς ΛΘ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ, ὥστε καὶ τῷ ΓΛΘ.

ΒΖΕ, quod fit ex ΝΘ inter applicatam & centrum interjecta; triangulum vero ΗΖΘ, quod fit ex applicatâ ΒΝ, hoc eſt ex ΖΘ: igitur ex iis, quæ prius [ad 41. huj.] oſtenſa ſunt, triangulum ΒΖΕ à triangulo ΗΘΖ differt triangulo, quod fit ex ΛΘ, ſimili ipſi ΓΔΛ; quare & triangulo ΓΛΘ.

EUTOCIUS.

Ἐπιστῆσαι χρὴ ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο πλείους ἔχει πτώσεις. ἐπὶ μὲν γὰρ τῆς ὑπερβολῆς ἔχει εἴκοσι. τὸ γὰρ ἀντὶ τοῦ Β λαμβανόμενον σημεῖον ἢ ταὐτόν ἐστι τῷ Γ, ἢ ταὐτὸν τῷ Λ· καὶ τότε συμβαίνει τὸ ἀπὸ τῆς ΛΘ τρίγωνον ὅμοιον τῷ ΔΛΓ ταὐτὸν εἶναι τῷ ἀποτεμνομένῳ τριγώνῳ ὑπὸ τῶν παραλλήλων τῶν ΔΛ, ΛΓ. ἐὰν δὲ μεταξὺ ληφθῇ τὸ Β σημεῖον τῶν Λ, Γ, καὶ τὰ Δ, Λ ἀνωτέρω ὦσι τῶν περάτων τῆς δευτέρας διαμέτρου, γίνονται πτώσεις τρεῖς· τὰ γὰρ Ζ, Ε ἢ ἀνωτέρω τῶν περάτων φέρονται, ἢ ἐπ' αὐτά, ἢ κατωτέρω. ἐὰν δὲ τὰ Δ, Λ ἐπὶ τὰ πέρατα ὦσι τῆς δευτέρας διαμέτρου, τὰ Ζ, Ε κατωτέρω ἐπιζευχθήσονται. ὁμοίως

Attendendum eſt hoc theorema plures habere caſus: in hyperbola enim viginti habet. nam punctum quod pro Β ſumitur, vel idem eſt quod Γ, vel idem quod Λ; & tunc contingit, triangulum factum ex ΛΘ ſimile ipſi ΔΓΛ idem eſſe quod à lineis parallelis ipſi ΔΛ, ΛΓ abſcinditur. ſi vero Β ſumatur inter Λ, Γ, & puncta Δ, Λ ſint ſupra terminos ſecundæ diametri, fient tres caſus: nam puncta Ζ, Ε vel ſupra terminos ferentur, vel in ipſos, vel infra. ſi vero Δ, Λ ſint in terminis ſecundæ diametri, Ζ, Ε infra terminos erunt. Similiter ſi Β ſumatur

matur extra Γ; & ΘΓ ad H producatur, tres alios caſus fieri contingit; nempe ipſo Δ vel ſupra terminos ſecundæ diametri exiſtente, vel in ipſis, vel infra, & ſimiliter Z faciet tres caſus. ſin autem B ſumatur ex altera parte ſectionis, producetur ΓΘ ad H, propter demonſtrationem: & BZ, BE tres caſus efficient, quoniam Z, E vel ad terminos ſecundæ diametri ferentur, vel ſupra, vel infra. Ellipſis vero & circuli circumferentiæ varios caſus nunc non explicabimus, tot enim ſunt quot in præcedenti theoremate ſumuntur. erunt igitur hujus theorematis caſus omnes centum ſed poſſunt hæc eadem etiam in oppoſitis ſectionibus demonſtrari.

δὲ καὶ ἐὰν ἐξωτέρω ληφθῇ τοῦ Γ τὸ Β, καὶ ἡ ΘΓ ἐπὶ τὸ Η ἐκβληθήσεται, συμβαίνει δὲ οὕτως γίνεσθαι ἄλλας πτώσεις τρεῖς τοῦ γὰρ Δ σημείου ἢ ἀνωτέρω φερομένου τοῦ πέρατος τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἢ ἐπ' αὐτό, ἢ κατωτέρω· καὶ τὸ Ζ ὁμοίως φερόμενον ποιήσει τὰς τρεῖς πτώσεις. ἐὰν δὲ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς τομῆς ληφθῇ τὸ Β σημεῖον, ἡ μὲν ΓΘ ἐκβληθήσεται ἐπὶ τὸ Η, διὰ τὴν ἀπόδειξιν· αἱ δὲ ΒΖ, ΒΕ ποιοῦσι πτώσεις τρεῖς, ἐπειδὴ τὰ Ζ, Ε ἐπὶ τὸ πέρας φέρεται τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἢ ἀνωτέρω, ἢ κατωτέρω. τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἢ τὰ ποικίλα ἐροῦμεν· ὅσαι γὰρ ὅσα ἐν τῷ προλαβόντι θεωρήματι ληφθῇ. ὥστε εἰσὶ πάσαι πτώσεις τοῦ θεωρήματος τούτου ρʹ. δύναται δὲ ταῦτα προτείνεσθαι ὁμοίως καὶ ἐπὶ ἀντικειμένων.

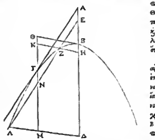
Prop. XLVI. *Theor.*

Si parabolam recta linea contingens cum diamatro conveniat: quæ per tactum ducitur diametro parallela ad eaſdem partes ſectionis, rectas in ſectione ductas contingenti parallelas bifariam ſecabit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μςʹ.

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, ἡ διὰ τῆς ἁφῆς παράλληλος ἀγομένη τῇ διαμέτρῳ ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ, τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην δίχα τέμνει.

SIT parabola, cujus diametar ΑΒΔ, & recta ΑΓ ſectionem contingat; per Γ vero ducatur ΘΓΜ parallela ΑΔ; &, ſumpto in ſectione quovis puncto Λ, ducatur ΛΝΖΒ ipſi ΑΓ parallela: dico ΛΝ ipſi ΝΖ æqualem eſſe.



Ducantur enim ordinatim ΒΘ, ΚΖΗ, ΛΜΔ. & quoniam ex iis, quæ in quadrageſimo ſecundo theoremate demonſtravimus, triangulum ΕΛΔ æquale eſt parallelogrammo ΒΜ, & triangulum ΕΖΗ parallelogrammo ΒΚ: parallelogrammum igitur reliquum ΗΜ æquatur quadrilatero ΛΖΗΔ. commune auferatur ΜΔΗΖΝ quinquelaterum: reliquum igitur triangulum ΚΖΝ reliquo ΛΜΝ erit æquale. ſed ΚΖ [ex hyp.] parallela eſt ipſi ΛΜ: ergo [per 4. 6. & 14. 5.] ΖΝ ipſi ΛΝ æqualis erit.

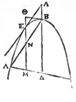
ΕΣΤΩ παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒΔ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΑΓ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΓΜ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Λ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΛΝΖΕ· λέγω ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΛΝ τῇ ΖΝ.

Ἤχθωσαν τεταγμένως αἱ ΒΘ, ΖΗΚ, ΛΜΔ. ἐπεὶ οὖν, διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μβʹ. θεωρήματι, ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΛΔ τρίγωνον τῷ ΒΜ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΕΖΗ τῷ ΒΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΜ παραλληλόγραμμον λοιπῷ τῷ ΛΖΗΔ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΜΔΗΖΝ πεντάπλευρον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΖΝ τρίγωνον τῷ ΛΜΝ ἴσον ἐστί. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ ΚΖ τῇ ΛΜ, ἴση ἄρα ἡ ΖΝ τῇ ΛΝ.

EUTOCIUS.

Hoc theorema plures caſus habet. demonſtrabimus autem habita ratione caſuum quadrageſimi ſecundi theorematis; ut exempli cauſa, ſi Ζ cadat in Β, ita dicemus. Quoniam triangulum ΒΛΔ [per 42. huj.] æquale eſt parallelogrammo ΘΒΔΜ, commune auferatur ΝΜΔΒ; erit reliquum ΛΜΝ triangulo ΘΝΒ æquale.

In reliquis autem ſic. Quoniam triangulum ΛΕΔ parallelogrammo ΘΒΔΜ eſt æquale, & triangulum ΗΖΕ parallelogrammo ΘΒΗΚ: erit reliquum ΖΛΔΗ æquale reliquo ΚΗΔΜ. commune auferatur ΝΜΔΗΖ. ac reliquum ΛΝΜ triangulo ΚΖΝ æquale eſt.



Τοῦτο τὸ θεώρημα πλείονας ἔχει πτώσεις. δείξομεν δὲ προσέχοντες ταῖς πτώσεσι τοῦ μβʹ. ὑποδείγματος δὲ χάριν, ἐὰν τὸ Ζ ἐπὶ τὸ Β πίπτῃ, οὕτως ἐροῦμεν. ἐπεὶ τὸ ΒΛΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΒΔΜ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΝΜΔΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΛΜΝ τῷ ΘΝΒ ἐστὶν ἴσον.

Ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν ἐροῦμεν. ἐπειδὴ τὸ ΛΕΔ τῷ ΘΒΔΜ ἐστὶν ἴσον, καὶ τὸ ΗΖΕ τῷ ΘΒΗΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛΔΗ λοιπῷ τῷ ΚΗΔΜ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΝΜΔΗΖ· καὶ τὸ λοιπὸν τὸ ΛΝΜ τῷ λοιπῷ ΚΖΝ ἴσον ἐστί.

ΠΡΟ-

Digitized by Google

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ΄.

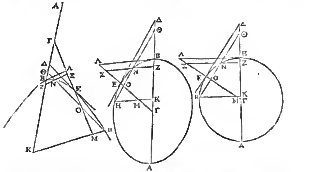
Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἀχθῇ ἐπὶ ταὐτὰ τῆς τομῆς· δίχα τεμεῖται τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην.

Prop. XLVII. *Theor.*

Si hyperbolam, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conveniat; & per tactum & ceotrum ducatur recta ad eaſdem partes ad quas ſectio: rectas quæ in ſectione ducuntur contingenti parallelas bifariam ſecabit.

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, ἐφαπτομένη δὲ τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΝΟΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ.

SIT hyperbola, vel ellipſis, vel circuli circumferentia, cujus diameter ΑΒ, centrum Γ, ducaturque ΔΕ ſectionem contingens, & juncta ΓΕ producatur; ſumpto autem in ſectione quovis puncto Ν, ducatur per Ν linea ΘΝΟΗ ipſi ΔΕ parallela: dico ΝΟ ipſi ΟΗ æqualem eſſe.

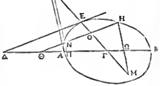


Κατήχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΞΝΖ, ΒΛ, ΗΜΚ· διὰ τὰ δεδειγμένα ἄρα ἐν τῷ μγ΄. θεωρήματι, ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΘΝΖ τρίγωνον τῷ ΛΒΖΞ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΗΘΚ τρίγωνον τῷ ΛΒΚΜ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΝΗΚΖ τετράπλευρον λοιπῷ τῷ ΜΚΖΞ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΟΝΖΚΜ πεντάπλευρον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΟΜΗ τρίγωνον λοιπῷ τῷ ΝΞΟ ἐστὶν ἴσον. καί ἐστι παράλληλος ἡ ΜΗ τῇ ΝΞ· ἴση ἄρα ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ.

Applicentur enim ordinatim ΞΝΖ, ΒΛ, ΗΜΚ: ergo, ex demonſtratis in quadrageſimo tertio theoremate, triangulum ΘΝΖ æquale erit quadrilatero ΛΒΖΞ, & ΗΘΚ triangulum quadrilatero ΛΒΚΜ: reliquum igitur ΝΗΚΖ quadrilaterum reliquo ΜΚΖΞ eſt æquale. commune auferatur ΟΝΖΚΜ quinquelaterum: atque erit reliquum triangulum ΟΜΗ æquale reliquo ΟΞΝ. atque eſt ΜΗ parallela ipſi ΝΞ: ergo [per 4.6. & 14.5.] ΝΟ ipſi ΟΗ eſt æqualis.

EUTOCIUS.

Τοῦτο τὸ θεώρημα ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς πτώσεις ἔχει ὅσας τὸ πρὸ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς παραβολῆς εἶχε· τὰς δὲ ἀποδείξεις αὐτῶν ποιησόμεθα, προσέχοντες ταῖς πτώσεσι τοῦ μγ΄. θεωρήματος· καὶ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως τὰς ἀποδείξεις ἐκ τῶν πτώσεων τοῦ μγ΄. οἷον ἐπὶ τῆς ὑποκειμένης καταγραφῆς, τοῦ Η σημείου ἐκτὸς εἰλημμένου. ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΑΓ τρίγωνον τοῖς ΘΗΩ, ΩΓΜ,



Hoc theorema in hyperbola tot habet caſus quot habebat præcedens in parabola: demonſtrationes autem eorum faciemus, attendentes ad caſus quadrageſimi tertii theorematis: pariterque in ellipſi, ut in ſubjecta figura, cum punctum Η extra ſumitur. quoniam triangulum ΛΑΓ æquale eſt triangulis ΘΗΩ, ΩΓΜ, hoc eſt triangu-

lis Ο Θ Γ, Ο Η Μ; atque eſt idem triangulum Λ Α Γ æquale triangulo Ξ Π Γ & quadrilatero Λ Α Π Ξ, ſive triangulo Ν Θ Π, ex iis quæ demonſtrata ſunt in quadrageſimo tertio theoremate: erunt igitur triangula Ξ Π Γ, Ν Θ Π æqualia triangulis Ο Θ Γ, Ο Μ Η. commune auferatur triangulum Θ Ο Γ: reliquum igitur triangulum Ξ Ο Ν æquale eſt reliquo Η Ο Μ. & eſt Ν Ξ parallela ipſi Μ Η; ergo Ν Ο ipſi Ο Η eſt æqualis.

τουτ᾽ ἔστι τοῖς Ο Θ Γ, Ο Η Μ τριγώνοις, τὸ δὲ Λ Α Γ ἴσον ἐστὶ τῷ τε Ξ Π Γ τριγώνῳ καὶ τῷ Λ Α Π Ξ τετραπλεύρῳ, τουτέστι τῷ Ν Θ Π τριγώνῳ, διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μγ΄. θεωρήματι· καὶ τὰ Ξ Π Γ, Ν Θ Π ἄρα τρίγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς Ο Θ Γ, Ο Μ Η τριγώνοις. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ Θ Ο Γ τρίγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ Ξ Ο Ν τῷ Η Ο Μ ἴσον ἐστί. καὶ παράλληλος ἡ Ν Ξ τῇ Μ Η· ἴση ἄρα ἡ Ν Ο τῇ Ο Η.

Prop. XLVIII. *Theor.*

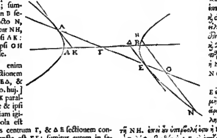
Si unam oppoſitarum ſectionum recta linea contingens cum diametro conveniat, & per tactum & centrum producta recta ſecet alteram ſectionem: quæ in altera ſectione ducta fuerit contingenti parallela à recta producta bifariam ſecabitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη΄.

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθεῖσα τέμνῃ τὴν ἑτέραν τομήν· ἥτις ἂν ἀχθῇ ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐκβληθείσης.

Sint oppoſitæ ſectiones, quarum diameter Α Β, centrumque Γ, & Κ Λ ſectionem Λ contingat, junctaque Λ Γ producatur; ſumpto autem in Β ſectione puncto Ν, per Ν ducatur Ν Η, parallela ipſi Λ Κ: dico Ν Ο ipſi Ο Η æqualem eſſe.

Ducatur enim per Ε ſectionem contingens Ε Δ, & erit [ex 30. huj.] Ε Δ ipſi Λ Κ parallela; quare & ipſi Ν Η. quoniam igitur hyperbola eſt Β Ε Ν, cujus centrum Γ, & Δ Ε ſectionem contingit, & juncta eſt Γ Ε; ſumitur autem in ſectione punctum Ν, per quod ipſi Δ Ε parallela ducta eſt Ν Η: ex iis quæ in hyperbola [per propoſitionem præced.] oſtendimus, erit Ν Ο ipſi Ο Η æqualis.



Ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος μὲν ἡ Α Β, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ τῆς Λ τομῆς ἐφαπτέσθω ἡ Κ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Λ Γ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ Λ Κ παράλληλος ἤχθω ἡ Ν Η· λέγω ὅτι ἡ Ν Ο τῇ Ο Η ἐστὶν ἴση.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ε ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ Ε Δ· ἡ Ε Δ ἄρα τῇ Λ Κ παράλληλός ἐστιν, ὥστε καὶ τῇ Ν Η. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ Β Ε Ν, ἧς κέντρον τὸ Γ καὶ ἐφαπτομένη ἡ Δ Ε, καὶ ἐπέζευκται ἡ Γ Ε, καὶ εἴληπται ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Ν, καὶ δι᾽ αὐτοῦ παράλληλος ἦκται ἡ Ν Η· διὰ τὸ προδεδειγμένον ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς, ἴση ἐστὶν ἡ Ν Ο τῇ Ο Η.

EUTOCIUS.

Hujus etiam theorematis caſus ita ſe habent, ut in quadrageſimo ſeptimo theoremate dictum eſt de hyperbolæ deſcriptione.

Καὶ τούτου αἱ πτώσεις ὡσαύτως ἔχουσι ταῖς προειρημέναις ἐπὶ τοῦ μζ΄. κατὰ τὴν τῆς ὑπερβολῆς καταγραφήν.

Prop. XLIX. *Theor.*

Si parabolam recta linea contingens cum diametro conveniat, & per tactum ducatur recta diametro parallela; à vertice vero ducatur parallela ordinatim applicatæ; & fiat ut portio contingentis inter applicatam & tactum interjecta ad portionem parallelæ itidem inter tactum & applicatam interjectæ, ita quædam recta ad duplam contingentis: quæ à ſectione ducta fuerit parallela contingenti, ad

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ΄.

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ μὲν τῆς ἁφῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ διαμέτρῳ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀχθῇ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ ποιηθῇ ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀνηγμένης καὶ τῆς ἁφῆς πρὸς τὸ τμῆμα τῆς παραλλήλου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, οὕτως εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ,

Digitized by Google

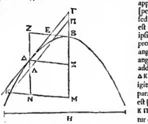
μθύη, ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένην εὐθεῖαν παράλληλον τῇ διαμέτρῳ, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς πεπορισμένης εὐθείας καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ.

rectam quæ per tactum ducitur diametro parallelam, poterit rectangulum contentum ſub inventa linea & ea quæ inter ipſam & tactum interjicitur.

ΕΣΤΩ παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΜΒΓ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΔΝ, τεταγμένως δὲ ἀνήχθω ἡ ΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ οὕτως εὐθεῖά τις ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Κ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΚΛΠ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς Η καὶ τῆς ΔΛ, τουτέστιν ὅτι, διαμέτρου οὔσης τῆς ΔΛ, ὀρθία ἐστὶν ἡ Η.

SIT parabola cujus diameter ΜΒΓ; & ΓΔ ſectionem contingat; per Δ vero ipſi ΒΓ parallela ducatur ΖΔΝ; & ΖΒ ordinatim applicetur; fiatque ut ΕΔ ad ΔΖ ita quædam recta Η ad duplam ipſius ΓΔ; &, ſumpto in ſectione puncto Κ, ducatur per Κ ipſi ΓΔ parallela ΚΛΠ: dico quadratum ex ΚΛ æquale eſſe rectangulo ſub Η & ΔΛ; hoc eſt, diametro exiſtente ΔΛ, lineam Η eſſe rectum latus.

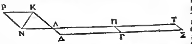
Κατήχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΔΞ, ΚΝΜ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΔ ἐφάπτεται τῆς τομῆς, τεταγμένως δὲ κατῆκται ἡ ΔΞ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΞ. ἡ δὲ ΒΞ τῇ ΖΔ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ΓΒ ἄρα τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ τὸ ΕΓΒ τρίγωνον τῷ ΕΖΔ τριγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΕΒΜΝ σχῆμα· τὸ ἄρα ΔΓΜΝ τετράπλευρον τῷ ΖΜ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον, τουτέστι τῷ ΚΠΜ τριγώνῳ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΛΠΜΝ τετράπλευρον· [a] λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΛΝ τρίγωνον τῷ ΓΛ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΔΛΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΛΝ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τοῦ ὑπὸ ΛΔΓ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΛΝ, ὡς δὲ ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΔΓ οὕτω τὸ ὑπὸ Η, ΔΛ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ ΓΔΛ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΛΝ οὕτως τὸ ὑπὸ Η, ΔΛ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ ΓΔΛ, καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δὲ ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τῷ δὶς ὑπὸ ΓΔΛ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΚΛ τῷ ὑπὸ Η, ΔΛ.



Applicentur enim ordinatim ΔΞ, ΚΝΜ. & quoniam ΓΔ ſectionem contingit, ordinatim vero applicata eſt ΔΞ; erit [per 4.6.] ΓΒ æqualis ΒΞ. ſed [per 35. huj.] ΒΞ eſt æqualis ΖΔ: ergo ΓΒ ipſi ΖΔ æqualis erit; & propterea [per 33. 1.] triangulum ΕΓΒ æquale triangulo ΕΖΔ. commune addatur, figura ſcilicet ΔΚΒΜΝ: quadrilaterum igitur ΔΓΜΝ æquale eſt parallelogrammo ΖΜ, hoc eſt [per 42.huj.] triangulo ΚΠΜ. commune auferatur quadrilaterum ΛΠΜΝ: [a] ergo reliquum triangulum ΚΛΝ parallelogrammo ΛΓ eſt æquale. angulus autem ΔΛΠ [per 15.1.] æqualis eſt angulo ΚΛΝ. quare [per *Pappi* lem. 8.] rectangulum ΚΛΝ duplum eſt rectanguli ΛΔΓ: quoniam igitur [ex hyp.] ut ΕΔ ad ΔΖ ita eſt linea Η ad duplam ipſius ΓΔ, & [per 4. 6.] ut ΕΔ ad ΔΖ ita ΚΛ ad ΛΝ; erit ut Η ad duplam ΓΔ ita ΚΛ ad ΛΝ. ſed [per 1. 6.] ut ΚΛ ad ΛΝ ita quadratum ex ΚΛ ad rectangulum ΚΛΝ; & ut Η ad duplam ΓΔ ita rectangulum ſub Η & ΔΛ ad duplum rectanguli ΓΔΛ: quare ut quadratum ex ΚΛ ad rectangulum ΚΛΝ ita rectangulum ſub Η & ΔΛ ad duplum ipſius ΓΔΛ rectanguli; & [per 16. 5.] permutando. eſt autem [ex modo oſtenſis] ΚΛΝ rectangulum æquale duplo rectanguli ΓΔΛ: ergo [per 14. 5.] quadratum ex ΚΛ rectangulo ſub Η & ΔΛ æquale erit.

EUTOCIUS.

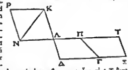
[a] Λοιπὸν ἄρα ΚΛΝ τρίγωνον τῷ ΔΛΠΓ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΛΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΛΝ γωνίᾳ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τοῦ ὑπὸ ΛΔΓ.] ἐκκείσθω γὰρ χωρὶς τὸ ΚΛΝ τρίγωνον, καὶ τὸ ΔΛΠΤ παραλληλόγραμμον. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛΝ τρίγωνον τῷ ΔΠ παραλληλογράμμῳ, ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΛΚ παράλληλος ἡ ΝΡ, διὰ δὲ τοῦ Κ τῇ ΛΝ ἡ ΚΡ· παραλλη-



[a] Ergo reliquum triangulum ΚΛΝ parallelogrammo ΔΛΠΓ eſt æquale. angulus autem ΔΛΠ æqualis eſt angulo ΚΛΝ: quare rectangulum ΚΛΝ duplum eſt rectanguli ΛΔΓ.] Triangulum enim ΚΛΝ ſeorſim deſcribatur, itemque parallelogrammum ΔΛΠΓ. & quoniam triangulum ΚΛΝ æquale eſt parallelogrammo ΔΠ, ducatur per Ν ipſi ΛΚ parallela ΝΡ, & per Κ ducatur ΚΡ parallela ipſi ΛΝ: parallelogrammum igitur

tur eſt ΛΡ, & duplum trianguli ΚΛΝ; quare & parallelogrammi ΔΠ duplum. producantur ΔΓ, ΛΠ ad puncta Σ, Τ, ponaturque ipſi ΔΓ æqualis ΓΣ, & ΠΤ æqualis ipſi ΛΠ, & jungatur ΣΤ: ergo ΔΤ parallelogrammum eſt duplum ipſius ΔΠ, & idcirco ΛΡ parallelogrammum æquale parallelogrammo ΛΣ eſt autem & æquiangulum, quoniam anguli ad Λ ſecundum verticem ſunt æquales ſed [per 14.6.] æqualium & æquiangulorum parallelogrammorum latera quæ circa æquales angulos ſunt reciproce proportionalia. ergo ut ΚΛ ad ΛΤ, hoc eſt ad ΔΣ, ita ΔΛ ad ΛΝ; proptereaque [per 16 6.] rectangulum ΚΛΝ æquale eſt rectangulo ΛΔΣ. & cum ΔΣ dupla ſit ipſius ΔΓ, rectangulum ΚΛΝ rectanguli ΛΔΓ duplum erit.

At ſi recta quidem ΔΓ ipſi ΛΠ ſit parallela, ΓΠ vero non ſit parallela ipſi ΛΔ; erit ΔΓΠΛ trapezium: & tunc dico rectangulum ΚΛΝ æquale eſſe ei quod ſub ΔΛ & utraque ipſarum ΓΔ, ΛΠ continetur. ſi enim parallelogrammum ΛΡ compleatur ſicuti prius, producanturque ΔΓ, ΛΠ, ita ut ipſi ΛΠ æqualis ponatur ΓΣ, & ipſi ΔΓ æqualis ΠΤ, & jungatur ΣΤ; fiet ΔΤ parallelogrammum duplum ipſius ΔΠ, & eadem erit demonſtratio. hoc autem utile eſt ad ea quæ ſequuntur.



διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΡ, καὶ διπλάσιον τοῦ ΚΛΝ τριγώνου ὥστε καὶ τοῦ ΔΠ παραλληλογράμμου. ἐκβεβλήσθωσαν δὲ αἱ ΔΓ, ΛΠ ἐπὶ τὰ Σ, Τ, καὶ κείσθω τῇ ΔΓ ἴση ἡ ΓΣ, τῇ δὲ ΛΠ ἡ ΠΤ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΣΤ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΤ διπλάσιον τοῦ ΔΠ· ὥστε ἴσον τὸ ΛΡ τῷ ΛΣ. ἔστι δὲ τοῦτο καὶ ἰσογώνιον, διὰ τὸ τὰς πρὸς τῷ Λ γωνίας κατὰ κορυφὴν οὔσας ἴσας εἶναι. τῶν δὲ ἴσων ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραί· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΤ, τουτέστι πρὸς τὴν ΔΣ, οὕτως ἡ ΔΛ πρὸς ΛΝ, καὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΔΣ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΣ τῆς ΔΓ, τὸ ὑπὸ ΚΛΝ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΛΔΓ.

Ἐὰν δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΛΠ ἐστὶ παράλληλος, ἡ δὲ ΓΠ τῇ ΛΔ μὴ ἐστι παράλληλος, τραπέζιον μὲν γίνεται ἐστὶ τὸ ΔΓΠΛ· καὶ οὕτως δέ φημι, ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΛ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΓΔ, ΛΠ. ἐὰν γὰρ τὸ μὲν ΛΡ ἀναπληρωθῇ, ὡς προείρηται, ἐκβληθῶσι δὲ καὶ ΔΓ, ΛΠ, καὶ τεθῇ τῇ μὲν ΛΠ ἴση ἡ ΓΣ, τῇ δὲ ΔΓ ἡ ΠΤ, καὶ ἐπιζευχθῇ ἡ ΣΤ· παραλληλόγραμμον ἔσται τὸ ΔΤ διπλάσιον τοῦ ΔΠ, καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ ἁρμόσει. χρησόμεθα δὲ τούτῳ εἰς τὰ ἑξῆς.

Prop. L. *Theor.*

Si hyperbolam, vel ellipſim, vel circuli circumferentiam recta linea contingens cum diametro conveniat; & per tactum & centrum recta producatur; à vertice autem ordinatim applicata conveniat cum ea quæ ducitur per tactum & centrum; fiatque ut portio contingentis inter tactum & applicatam interjecta ad portionem ductæ per tactum & centrum, quæ itidem inter tactum & applicatam interjicitur, ita quædam recta ad duplam contingentis: quæ à ſectione ducitur contingenti parallela ad rectam per tactum & centrum ductam, poterit ſpatium rectangulum quod adjacet inventæ rectæ, latitudinem habens interjectam inter ipſam & tactum; in hyperbola quidem excedens figurâ ſimili contentæ ſub duplâ ejus quæ eſt inter centrum & tactum & inventâ lineâ; in ellipſi vero & circulo, eâdem deficiens.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀναχθεῖσα εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην συμπίπτῃ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, καὶ ποιηθῇ ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης πρὸς τὸ τμῆμα τῆς ἠγμένης διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, οὕτως εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένην, δυνήσεται τὸ χωρίον ὀρθογώνιον παρακείμενον παρὰ τὴν πορισθεῖσαν, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς διπλασίας τῆς μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς πορισθείσης εὐθείας, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου, ἐλλεῖπον.

SIT hyperbola, vel ellipſis, vel circuli circumferentia, cujus diameter ΑΒ, centrum Γ; & ΔΕ ſectionem contingat; juncta vero ΓΕ producatur ad utraſque partes; ponaturque ΓΚ ipſi ΕΓ æqualis; & per Β ordinatim applicetur ΒΖΗ; deinde per Ε ad rectos angulos ipſi ΕΓ ducatur ΕΘ; fiatque ut ΖΕ ad ΕΗ ita ΕΘ ad duplam ipſius ΕΔ, & juncta ΘΚ

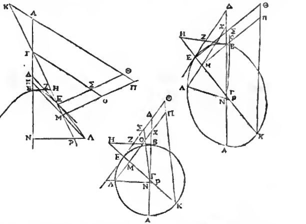
ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἢ ἔλλειψις, ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΔΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΕ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ κείσθω τῇ ΕΓ ἴση ἡ ΓΚ, καὶ διὰ τοῦ Β τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΒΖΗ, διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΕΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΘ, καὶ γινέσθω ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΕΔ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα

παρεκβληθεῖσα ἡ ΘΚ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Λ, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ ΕΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΜΞ, τῇ ΒΗ ἡ ΛΝΡ, τῇ δὲ ΕΘ ἡ ΜΠ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ ΛΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΜΠ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ ΚΠ παράλληλος ἡ ΓΣΟ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΚΓ, ὡς δὲ ἡ ΕΓ πρὸς ΚΓ οὕτως ἡ ΕΣ πρὸς ΣΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΣ τῇ ΣΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΕΔ, καί ἐστι τῆς ΕΘ ἡμίσεια ἡ ΕΣ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ οὕτως ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. ὡς δὲ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς ΜΡ· ὡς ἄρα

producatur; ſumpto denique in ſectione puncto Λ, per ipſum ducatur ΛΜΞ ipſi quidem ΕΔ parallela; ΛΝΡ vero parallela ipſi ΒΗ; ipſique ΕΘ parallela ΜΠ: dico quadratum ex ΛΜ rectangulo ΕΜΠ æquale eſſe.

Ducatur enim per Γ recta ΓΣΟ parallela ipſi ΚΠ. itaque quoniam ΕΓ æqualis eſt ipſi ΚΓ, & [per 2. 6.] ut ΕΓ ad ΓΚ ita ΕΣ ad ΣΘ; erit ΕΣ ipſi ΣΘ æqualis. & quoniam [ex hyp.] ut ΖΕ ad ΕΗ ita ΘΕ ad duplam ΕΔ, atque eſt ipſius ΕΘ dimidia ΕΣ: erit ut ΖΕ ad ΕΗ ita ΣΕ ad ΕΔ. ut autem ΖΕ ad ΕΗ ita [per 4. 6.] ΛΜ ad ΜΡ: ergo ut ΛΜ ad ΜΡ ita



ἡ ΛΜ πρὸς ΜΡ οὕτως ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΡΝΓ τρίγωνον τοῦ ΗΒΓ τριγώνου, τουτέστι τοῦ ΓΔΕ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς μεῖζον ἐδείχθη, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου ἔλασσον τοῦ ΛΝΞ· κοινῶν ἀφαιρεθέντων, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τοῦ τε ΕΓΔ τριγώνου καὶ τοῦ ΝΡΜΞ τετραπλεύρου, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου τοῦ ΜΞΓ τριγώνου· τὸ ΛΜΡ τρίγωνον τῷ ΜΕΔΞ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον. καί ἐστι παράλληλος ἡ ΜΞ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΜΡ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΜΞ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΛΜΡ τῷ ὑπὸ ΕΜ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΕΔ, ΜΞ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ οὕτως ἥ τε ΜΞ πρὸς ΔΕ καὶ ἡ ΜΟ πρὸς ΕΣ· ὡς ἄρα ἡ ΜΟ πρὸς ΕΣ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΔΕ· καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ ΜΟ, ΕΣ πρὸς ΣΕ οὕτω συναμφότερος ἡ ΜΞΕΔ πρὸς ΕΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΜΟ, ΣΕ πρὸς συναμφότερον τὴν ΞΜ, ΕΔ οὕτως ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. ἀλλ' ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΜΟ, ΕΣ πρὸς συναμφότερον τὴν ΜΞ, ΔΕ οὕτως τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ καὶ τῆς ΕΜ πρὸς τὸ ὑπὸ

ΣΕ ad ΕΔ. ſed cum demonſtratum ſit [in 43. 1. huj.] triangulum ΡΝΓ in hyperbola quidem majus eſſe quam triangulum ΗΒΓ, hoc eſt quam triangulum ΓΔΕ; in ellipſi vero & circulo minus, ipſo ΛΝΞ triangulo: communibus ablatis, in hyperbola ſcilicet triangulo ΕΓΔ & ΝΡΜΞ quadrilatero, in ellipſi autem & circulo, triangulo ΜΞΓ; erit ΛΜΡ triangulum quadrilatero ΜΕΔΞ æquale. atque eſt [ex hyp.] ΜΞ parallela ipſi ΔΕ, & [per 15. 1.] angulus ΛΜΡ æqualis angulo ΕΜΞ; ergo [ex lem. *Pappi* 8.] rectangulum ΛΜΡ æquale eſt rectangulo ſub ΕΜ & utraque ipſarum ΕΔ, ΜΞ contento. & quoniam [per 4. 6.] ut ΜΓ ad ΓΕ ita & ΜΞ ad ΔΕ & ΜΟ ad ΕΣ: ut igitur ΜΟ ad ΕΣ ita ΜΞ ad ΔΕ; & componendo [per 18. 5.] ut utraque ΜΟ, ΣΕ ad ΕΣ ita utraque ΜΞ, ΔΕ ad ΕΔ: quare permutando, ut utraque ΜΟ, ΣΕ ad utramque ΞΜ, ΕΔ ita ΣΕ ad ΕΔ. ſed ut utraque ΜΟ, ΣΕ ad utramque ΜΞ, ΔΕ ita [per 1. 6.] rectangulum ſub utraque ΜΟ, ΣΕ & ipſa ΕΜ ad contentum ſub utraque

M Ξ, E Δ & E M. ut autem Σ E ad E Δ ita [ut ſupra oſtenſum] Z E ad E H, hoc eſt [per 4. 6.] Λ M ad M P; atque adeo [per 1. 6.] quadratum ex Λ M ad rectangulum Λ M P: quare ut rectangulum contentum ſub utraque M O, E Σ & M E ad contentum ſub utraque M Ξ, Δ E & E M, ita quadratum ex Λ M ad rectangulum Λ M P; & permutando, ut rectangulum contentum ſub utraque M O, E Σ & E M ad quadratum ex M Λ, ita contentum ſub utraque M Ξ, Δ E & E M ad Λ M P rectangulum. eſt autem [ut ſupra oſtenſum] rectangulum Λ M P æquale rectangulo ſub M E & utraque M Ξ, Δ E: ergo quadratum ex Λ M æquale eſt rectangulo ſub E M & utraque M O, Σ E. eſt autem Σ E ipſi Σ Θ æqualis, & [per 33. 1.] Σ Θ ipſi O Π: quadratum igitur ex Λ M rectangulo E M Π æquale erit.

συναμφοτέρου τῆς Μ Ξ, Ε Δ καὶ τῆς Ε Μ. ὡς δὲ ἡ Σ Ε πρὸς Ε Δ οὕτως ἡ Ζ Ε πρὸς Ε Η, τουτέστιν ἡ Λ Μ πρὸς Μ Ρ, τουτέστι τὸ ἀπὸ Λ Μ πρὸς τὸ ὑπὸ Λ Μ Ρ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς Μ Ο, Ε Σ καὶ τῆς Μ Ε πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς Μ Ξ, Δ Ε καὶ τῆς Ε Μ οὕτως τὸ ἀπὸ Λ Μ πρὸς τὸ ὑπὸ Λ Μ Ρ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς Μ Ο, Ε Σ καὶ τῆς Μ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Λ Μ, οὕτως τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς Μ Ξ, Ε Δ καὶ τῆς Μ Ε πρὸς τὸ ὑπὸ Λ Μ Ρ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ Λ Μ Ρ τῷ ὑπὸ τῆς Μ Ε καὶ συναμφοτέρου τῆς Μ Ξ, Ε Δ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ Λ Μ τῷ ὑπὸ Ε Μ καὶ συναμφοτέρου τῆς Μ Ο, Ε Σ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν Σ Ε τῇ Σ Θ ἴση, ἡ δὲ Σ Θ τῇ Ο Π· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ Λ Μ τῷ ὑπὸ Ε Μ Π.

EUTOCIUS.

Caſus hujus theorematis ita ſe habent ut in quadrageſimo tertio, ſicut & caſus ſubſequentis theorematis quinquageſimi primi.

Πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος ὡσαύτως ἔχουσι τῷ τοῦ μγ'. ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ να'.

Prop. LI. *Theor.*

Si quamlibet oppoſitarum ſectionum recta linea contingens cum diametro conveniat, & per tactum & centrum recta producatur uſque ad alteram ſectionem; à vertice vero ducatur recta parallela ordinatim applicatæ, convenienſque cum recta per tactum & centrum ducta; & fiat ut portio contingentis inter applicatam & tactum ad portionem ductæ per tactum & centrum quæ inter tactum & applicatam interjicitur, ita quædam recta ad duplam contingentis: quæ in altera ſectione ducitur parallela contingenti ad rectam per tactum & centrum ductam, poterit rectangulum quod adjacet inventæ lineæ, latitudinem habens interceptam inter ipſam & tactum, excedens vero figura ſimili ei quæ ſub linea inter oppoſitas ſectiones interjectâ & inventâ rectâ continetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

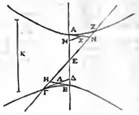
Ἐὰν ὁποτερασοῦν τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἐκβληθῇ τις εὐθεῖα ἕως τῆς ἑτέρας τομῆς, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς εὐθεῖα ἀναχθῇ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ συμπίπτῃ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, καὶ γενηθῇ ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀνηγμένης καὶ τῆς ἁφῆς πρὸς τὸ τμῆμα τῆς ἠγμένης διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, οὕτως εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης· ἥτις ἂν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν τομῶν ἀχθῇ ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένην εὐθεῖαν παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, δυνήσεται τὸ παρακείμενον ὀρθογώνιον παρὰ τὴν προσπορισθεῖσαν, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων καὶ τῆς προσπορισθείσης εὐθείας.

Sint oppoſitæ ſectiones, quarum diameter A B, centrum E; & ducatur Γ Δ ſectionem B contingens, junctaque Γ E producatur; ordinatim vero applicetur B Λ H, & fiat ut Λ Γ ad Γ H ita quædam recta K ad duplam Γ Δ: itaque perſpicuum eſt [ex præced.] in ſectione B Γ lineas parallelas ipſi Γ Δ, quæ ducuntur ad rectam E Γ productam, poſſe ſpatia adjacentia rectæ K, latitudinemque habentia lineam quæ eſt inter ipſas & tactum, & excedentia figura ſimili contentæ ſub linea Γ Z & K; dupla eſt enim Z Γ ipſius Γ E. dico igitur idem evenire in ſectione Z A.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος ἡ Α Β, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἤχθω τῆς Β τομῆς ἐφαπτομένη ἡ Γ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ Ε καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἤχθω τεταγμένως ἡ Β Λ Η, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ Λ Γ πρὸς Γ Η οὕτως εὐθεῖά τις ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Γ Δ· ὅτι μὲν οὖν αἱ ἐν τῇ Β Γ τομῇ παράλληλοι τῇ Γ Δ ἐπὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ Ε Γ δύνανται τὰ παρὰ τὴν Κ παρακείμενα χωρία, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῇ ἁφῇ, ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ Γ Ζ, Κ, φανερόν· διπλασία γάρ ἐστιν ἡ Ζ Γ τῆς Γ Ε. λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐν τῇ Ζ Α τομῇ τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

Ἤχθω

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένη τῆς ΑΖ τομῆς ἡ ΜΖ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΑΞΝ. καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΒΓ, ΑΖ, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΓΔ, ΜΖ· ἴση ἄρα καὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΜΖ. ἴση δὲ καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΕΖ· καὶ ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΕΜ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, τουτέστι τῆς ΜΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς ΖΝ οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΜΖ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΖ, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΜΖ, καὶ τεταγμένως ἦκται ἡ ΑΝ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΖΝ οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΖΜ· ὅσαι ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς παράλληλοι τῇ ΖΜ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ ΕΖ, δυνήσονται τὸ παρακείμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς Κ εὐθείας καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ Ζ σημείῳ, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΓΖ, Κ.



Ducatur per Z linea MZ quæ ſectionem AZ contingat; ordinatimque applicetur AΞN. & quoniam oppoſitæ ſectiones ſunt BΓ, AZ, atque ipſas contingunt ΓΔ, MZ; erit [ex 30. huj.] ΓΔ ipſi MZ æqualis & parallela. eſt autem ΓE æqualis ipſi EZ: ergo & EΔ ipſi EM. ſed quoniam ut AΓ ad ΓH ita [ex hyp.] linea K ad duplam ipſius ΓΔ, ſive MZ; erit ut ΞZ ad ZN ita K ad duplam MZ. cùm autem AZ hyperbola eſt, cujus diameter AB, & MZ ipſam contingit; ordinatim vero applicata eſt AN; & ut ΞZ ad ZN ita K ad duplam ZM: ergo [per 50. huj.] quæcunque à ſectione ducuntur parallelæ ipſi MZ ad EZ in directum productam, poterunt rectangulum contentum ſub linea K & interjecta inter ipſas & punctum Z, excedenſque figura ſimili ei quæ ſub ΓZ & K continetur.

Πόρισμα.

Δεδειγμένων δὲ τούτων συμφανὲς ὅτι ἐν μὲν τῇ παραβολῇ ἑκάστη τῶν παρὰ τὴν ἐκ τῆς γενέσεως διάμετρον ἀγομένων εὐθειῶν διάμετρός ἐστιν· ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ, καὶ τῇ ἐλλείψει, καὶ ταῖς ἀντικειμέναις ἑκάστη τῶν διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένων εὐθειῶν· καὶ διότι ἐν μὲν τῇ παραβολῇ, αἱ καταγόμεναι ἐφ' ἑκάστην τῶν διαμέτρων παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα ὀρθογώνια δυνήσονται· ἐν τῇ ὑπερβολῇ καὶ ταῖς ἀντικειμέναις τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα χωρία καὶ ὑπερβάλλοντα τῷ αὐτῷ εἴδει· ἐν δὲ τῇ ἐλλείψει τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα καὶ ἐλλείποντα τῷ αὐτῷ εἴδει· καὶ διότι πάντα ὅσα προδέδεικται περὶ τὰς τομὰς συμβαίνοντα, συμπαραλαμβανομένων τῶν ἀρχικῶν διαμέτρων, καὶ τῶν ἄλλων διαμέτρων παραλαμβανομένων τὰ αὐτὰ συμβήσεται.

Corollarium.

Itaque his demonſtratis perſpicuum eſt [per 46. huj.] in parabola unamquamque rectarum, quæ diametro ex generatione ducuntur parallelæ, diametrum eſſe; in hyperbola vero, ellipſi, & oppoſitis ſectionibus, [per 47. & 48. huj.] unamquamque earum quæ per centrum ducuntur: ideoq; in parabola quidem [per 49. huj.] applicatas ad unamquamque diametrum parallelas contingentibus poſſe rectangula ipſi adjacentia; in hyperbola & oppoſitis ſectionibus [per 50. & 51. huj.] poſſe rectangula adjacentia ipſi quæ excedunt eâdem figurâ; in ellipſi autem [per 50. huj.] quæ eâdem deficiunt: igitur quæcunque circa ſectiones adhibitis principalibus diametris demonſtrata ſunt, & aliis diametris aſſumptis eadem quoque contingent.

EUTOCIUS.

Τὴν ἐκ τῆς γενέσεως διάμετρον λέγει τὴν γενομένην ἐν τῷ κώνῳ κοινὴν τομὴν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου· ταύτην δὲ καὶ ἀρχικὴν διάμετρον λέγει. καὶ φησιν ὅτι πάντα τὰ δεδειγμένα συμπτώματα τῶν τομῶν ἐν τοῖς προειρημένοις θεωρήμασιν, ὑποτεθεισῶν τῶν ἀρχικῶν διαμέτρων, συμβαίνειν δύναται καὶ τῶν ἄλλων πασῶν διαμέτρων ὑποτιθεμένων.

Diametrum ex generatione vocat communem ſectionem plani ſecantis & trianguli per axem quæ in ipſo cono efficitur; quam & principalem diametrum appellat. dicit autem omnia accidentia ſectionum, quæ in ſuperioribus theorematibus demonſtrata ſunt competere principalibus diametris, & aliis quibuſcunque diametris aſſumptis etiam contingere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϐ.

Εὐθείας δοθείσης ἐν ἐπιπέδῳ κατὰ ἓν σημεῖον πεπερασμένης, εὑρεῖν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κώνου τομὴν τὴν καλουμένην παραβολήν, ἧς διάμετρος ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, κορυφὴ δὲ τὸ πέρας τῆς εὐθείας· ἥτις δὲ ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς καταχθῇ ἐπὶ τὴν διάμετρον ἐν δοθείσῃ γωνίᾳ, δυνήσεται τὸ πα-

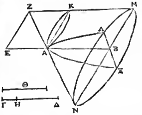
Prop. LII. *Probl.*

Rectâ datâ in plano ad unum punctum terminatâ, invenire in plano coni ſectionem quæ parabola appellatur, cujus diameter erit data recta & vertex rectæ terminus; quæ vero à ſectione ad diametrum in dato angulo applicatur, poterit rectangulum

gulum contentum ſub rectâ quæ eſt inter ipſam & verticem ſectionis & alterâ quadam data rectâ.

SIT recta data poſitione AB ad A punctum terminata, altera autem magnitudine data ſit ΓΔ; & datus angulus primum ſit rectus: oporteat autem in ſubjecto plano invenire parabolam, ita ut ejus diameter ſit AB; & vertex A, rectum autem figuræ latus ΓΔ, ordinatim ductis in recto angulo applicatis, hoc eſt, ut AB ſit axis.

Producatur AB ad E, ſumaturque ipſius ΓΔ quarta pars ΓH; & ſit EA major quam ΓH, inter ipſas autem ΓΔ, EA media proportionalis ſit Θ: eſt igitur [per cor. 20. 6.] ut ΓΔ ad EA ita quadratum ex Θ ad quadratum ex EA, ſed ΓΔ eſt minor quam quadrupla ipſius EA: ergo & quadratum ex Θ quadrati ex EA minus eſt quam quadruplum; & propterea Θ minor quam dupla ipſius EA. cum igitur duæ rectæ EA majores ſint quam Θ; fieri poteſt [per 22. 1.] ut ex Θ & duabus EA triangulum conſtituatur. igitur [per 22. 1.] ſuper EA conſtituatur triangulum EAZ [per prop. 12. 11.] rectum ad ſubjectum planum, ita ut EA æqualis ſit AZ & Θ æqualis ZE; ducaturque [per 31. 1.] AK parallela ipſi EZ, & ZK ipſi EA. deinde intelligatur conus, cujus vertex Z punctum, baſis autem circulus circa diametrum KA, rectus ad planum quod per AZK tranſit: erit igitur conus ille rectus, quoniam AZ æqualis eſt ZK. itaque ſecetur conus plano quod circulo KA æquidiſtet; faciatque [per 4. huj.] ſectionem circulum MNΞ, rectum videlicet ad planum tranſiens per MZN: & ſit circuli MNΞ & trianguli MZN communis ſectio MN: quare MN circuli diameter eſt. communis autem ſectio plani ſubjecti & circuli ſit ΞΛ. quoniam igitur circulus MNΞ rectus eſt ad triangulum MNΞ, rectumque eſt ſubjectum planum ad triangulum MZN; communis ipſorum ſectio ΞΛ [per 19. 11.] ad triangulum MZN, hoc eſt ad KZA, perpendicularis erit: quare & ad omnes rectas lineas quæ in triangulo ipſam contingunt, adeoque ad utramque ipſarum MN, AB. rurſus quoniam conus baſim habens circulum MNΞ, verticem vero punctum Z, ſecatur plano ad triangulum MZN recto, quod ſectionem facit circulum MNΞ; & ſecatur altero plano ſubjecto ſecante baſim coni ſecundum rectam ΞΛ perpendicularem ipſi MN, quæ communis eſt ſectio circuli MNΞ & trianguli MZN: communis autem ſectio ſubjecti plani & trianguli MZN, videlicet AB, parallela eſt lateri coni ZKM: erit [per 11. huj.] coni ſectio in ſubjecto plano facta parabola, cujus diameter AB, & rectæ à ſectione



περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ὑπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς καὶ ἑτέρας τινὸς δοθείσης εὐθείας.

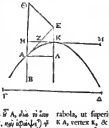
ΕΣΤΩ θέσει δοθεῖσα ἡ ΑΒ πεπερασμένη κατὰ τὸ Α, ἑτέρα δὲ ἡ ΓΔ τῷ μεγέθει, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω πρότερον ὀρθή· δεῖ δὴ εὑρεῖν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ παραβολήν, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, κορυφὴ δὲ τὸ Α, ὀρθία δὲ ἡ ΓΔ, αἱ δὲ καταγόμεναι τεταγμένως ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται, τουτέστιν ἵνα ἄξων ᾖ ἡ ΑΒ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ εἰλήφθω τῆς ΓΔ τέταρτον μέρος ἡ ΓΗ, τῆς δὲ ΓΗ μείζων ἔστω ἡ ΕΑ, καὶ τῶν ΓΔ, ΕΑ μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΕΑ οὕτως τὸ ἀπὸ Θ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ. ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΕΑ ἐλάττων ἐστὶν ἢ τετραπλασία, καὶ τὸ ἀπὸ Θ τοῦ ἀπὸ ΕΑ ἔλαττόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον· ἡ Θ ἄρα τῆς ΕΑ ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΕΑ τῆς Θ μείζονές εἰσι· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῆς Θ καὶ δύο τῶν ΕΑ τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τοίνυν ἐπὶ τῆς ΕΑ τρίγωνον τὸ ΕΑΖ ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΕΑ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ Θ τῇ ΖΕ· καὶ ἤχθω τῇ μὲν ΖΕ παράλληλος ἡ ΑΚ, τῇ δὲ ΕΑ ἡ ΖΚ. νοείσθω κῶνος, οὗ κορυφὴ τὸ Ζ σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΚΑ κύκλος, ὀρθὸς ὢν πρὸς τὸ διὰ τῶν ΑΖΚ ἐπίπεδον· ἔσται δὴ ὀρθὸς ὁ κῶνος, ἴση γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΖΚ. τετμήσθω δὲ ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ ΚΑ κύκλῳ, καὶ ποιείτω τομὴν τὸν ΜΝΞ κύκλον, ὀρθὸν δηλονότι πρὸς τὸ διὰ τῶν ΜΖΝ ἐπίπεδον, καὶ ἔστω τοῦ ΜΝΞ κύκλου καὶ τοῦ ΜΖΝ τριγώνου κοινὴ τομὴ ἡ ΜΝ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ τοῦ κύκλου. ἔστω δὲ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ ΞΛ. ἐπεὶ οὖν ὁ ΜΝΞ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ ΜΖΝ τρίγωνον, ὀρθὸν δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον πρὸς τὸ ΜΖΝ τρίγωνον· ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ ΞΛ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΜΖΝ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΚΖΑ· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τριγώνῳ, ὀρθή ἐστιν· ὥστε καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΜΝ, ΑΒ. πάλιν ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΜΝΞ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, τέτμηται ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ ΜΖΝ τρίγωνον, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸν ΜΝΞ κύκλον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν ΞΛ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΜΝ, ἣ κοινή ἐστι τομὴ τοῦ τε ΜΝΞ κύκλου καὶ τοῦ ΜΖΝ τριγώνου· ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΜΖΝ τριγώνου ἡ ΑΒ παράλληλός ἐστι τῇ ΖΚΜ πλευρᾷ τοῦ κώνου· ἡ ἄρα γινομένη ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ τομὴ τοῦ κώνου παραβολή ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΑΒ, αἱ δὲ καταγόμεναι

Digitized by Google

γόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΑΒ τεταγμένως, ἐν ὀρθῇ καταχθήσονται γωνίᾳ, παράλληλοι γάρ εἰσι τῇ ΞΑ πρὸς ὀρθὰς οὔσῃ τῇ ΑΒ. καὶ ἐπεὶ αἱ τρεῖς ἀνάλογόν εἰσι, αἱ ΓΔ, Θ, ΕΑ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΑ τῇ ΑΖ καὶ τῇ ΖΚ, ἡ δὲ Θ τῇ ΕΖ καὶ τῇ ΑΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΑΚ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΑΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΑΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΖΚ· ὀρθία ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς τομῆς. τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ ἑνδεκάτῳ θεωρήματι.

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, μὴ ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία ὀρθή. καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΕ, καὶ τῆς ΓΔ ἔστω ἡμίσεια ΑΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΑΕ κάθετος ἤχθω ἡ ΘΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΘ παράλληλος ἡ ΕΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΕΛ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΛ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΛ δίχα κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ τῇ ΕΛ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΚΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Ζ, Η, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΛ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ ΛΚΜ, καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΛΚ, ΚΜ, τῆς μὲν ΚΛ θέσει πεπερασμένης κατὰ τὸ Κ, τῆς δὲ ΚΜ μεγέθει, καὶ γωνίας ὀρθῆς, γεγράφθω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΚΛ, κορυφὴ δὲ τὸ Κ, ὀρθία δὲ ἡ ΚΜ, ὡς προδέδεικται· ἥξει δὴ διὰ τοῦ Α, διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ ΑΛ τῷ ὑπὸ ΛΚΜ, καὶ ἐφάψεται τῆς τομῆς ἡ ΕΑ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΕΚ τῇ ΚΛ, καὶ ἔστιν ἡ ΘΑ τῇ ΕΚΛ παράλληλος· ἡ ΘΑΒ ἄρα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς, καὶ αἱ ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τῆς τομῆς καταγόμεναι παράλληλοι τῇ ΑΕ δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς ΑΒ, καταχθήσονται δὲ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΑΕ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΖ, κοινὴ δὲ ἡ πρὸς τὸ Α· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘΕ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ· ὡς ἄρα ἡ ΘΑ πρὸς ΕΑ οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ΑΗ· ὡς ἄρα ἡ διπλασία τῆς ΑΘ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΕ οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς ΑΗ. ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΘΑ διπλῆ· ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΕ, διὰ δὴ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ ἐννάτῳ θεωρήματι ὀρθία ἐστὶν ἡ ΓΔ.



ad ipſam AB ordinatim ductæ, in recto angulo applicabuntur; parallelæ enim ſunt rectæ ΞA quæ eſt ad AB perpendicularis. & quoniam tres rectæ ΓΔ, Θ, EA proportionales ſunt; æqualis autem [per 33. 1.] EA ipſi AZ & ipſi ZK, atque Θ æqualis EZ & AK: erit ut ΓΔ ad AK ita AK ad AZ. quare [per cor. 20. 6.] ut ΓΔ ad AZ ita quadratum ex AK ad quadratum ex AZ, hoc eſt ad id quod ſub AZK continetur: ergo rectum ſectionis latus eſt ΓΔ; illud enim in undecimo theoremate demonſtratum fuit.

IISDEM poſitis, non ſit datus angulus rectus; ponaturque illi æqualis ΘAB angulus; & [per 2. & 10. 1.] ſit AΘ dimidia ipſius ΓΔ; à Θ vero [per 12. 1.] ducatur ΘE ad AE perpendicularis, perque E [per 31. 1.] ipſi BΘ parallela ducatur EΛ, & ab A ad EΛ perpendicularis AΛ: deinde [per 10. 1.] ſecta EΛ bifariam in K, ab ipſo K ducatur KM [per 11. 1.] ad rectos angulos ipſi EΛ; & ad puncta Z, H producatur; & [ope 11. 6.] quadrato ex AΛ æquale ſit rectangulum ΛKM, atque duabus rectis lineis ΛK, KM datis, ΛK quidem poſitione & ad K terminata, KM vero magnitudine; &, dato angulo recto, deſcribatur parabola, ut ſuperius dictum eſt, cujus diameter KΛ, vertex K, & rectum latus KM: tranſibit autem ea per A [per 11. huj.] propterea quod quadratum ex AΛ rectangulo ΛKM eſt æquale; & [per 33. huj.] linea EA ſectionem continget, quoniam KΛ æqualis eſt EK, & ΘA eſt parallela ipſi EKΛ: ergo [per 46. huj.] ΘAB diameter erit ſectionis; & à ſectione ad eam applicatæ ipſi AE parallelæ bifariam dividentur à linea AB; & [per 29. 1.] in angulo ΘAE applicabuntur. quoniam igitur angulus AEΘ æqualis eſt angulo AHZ, & communis qui ad A; triangulum AΘE ſimile eſt [per 4. 6.] AHZ triangulo: ut ergo ΘA ad EA ita ZA ad AH; & ideo ut dupla AΘ ad duplam AE ita ZA ad AH. ſed cum ΓΔ ſit dupla ipſius ΘA, erit ut ZA ad AH ita ΓΔ ad duplam ipſius AE: quare, per ea quæ in theoremate quadrageſimo nono oſtenſa ſunt, erit ΓΔ rectum ſectionis latus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, τῆς ἑτέρας ἐκβαλλομένης ἐπὶ ταὐτὰ τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ· εὑρεῖν ἐπὶ τῆς προσεκβληθείσης κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολὴν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ταῖς εὐθείαις, ὅπως ἡ μὲν προσεκβληθεῖσα διάμετρος ᾖ τῆς τομῆς, κορυφὴ δὲ τὸ πρὸς τῇ γωνίᾳ σημεῖον, ἥτις δὲ ἂν καταχθῇ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον, γωνίαν ποιοῦσα ἴσην τῇ δοθείσῃ, δυνήσεται παρακείμενον

Prop. LIII. *Probl.*

Datis duabus rectis terminatis quæ ad rectos inter ſe angulos conſtituantur, & altera producta ad eaſdem partes ad quas angulus rectus: invenire in recta producta coni ſectionem quæ hyperbola dicitur, in eodem plano in quo ſunt datæ rectæ, ita ut producta diameter ſectionis ſit, & vertex punctum quod ad angulum conſiſtit; quæ vero à ſectione ad diametrum applicatur, angulum faciens æqualem dato, poſſit

Z rectangulum

ctangulum quod adjaceat alteri rectæ, latitudinem habens rectam interjectam inter applicatam & verticem ſectionis, excedens vero figura ſimili & ſimiliter poſita ei quæ datis à principio rectis continetur.

SINT datæ rectæ terminatæ AB, BΓ ad rectos inter ſe angulos, & producatur AB ad Δ: oportet igitur in plano, quod per ABΓ tranſit, invenire hyperbolam; ita ut ejus diameter ſit ABΔ, vertex B punctum, & rectum figuræ latus BΓ; quæ vero à ſectione ad BΔ in dato angulo applicentur, poſſint rectangula adjacentia ipſi BΓ, quæ latitudines habeant lineas interjectas inter ipſas & punctum B, excedantque figura ſimili & ſimiliter poſita ei quæ ſub rectis AB, BΓ continetur.

Sit datus angulus primum rectus, [a] & ſuper AB planum erigatur [ope 12. 11.] rectum ad ſubjectum planum, in quo circa AB circulus deſcribatur AEBZ; ita ut pars diametri circuli, quæ in portione AEB comprehenditur ad partem comprehenſam in portione AZB non majorem rationem habeat quam AB ad BΓ; & [per 30.3.] ſecetur AEB circumferentia bifariam in E; ducaturque [per 10. 1.] à puncto E ad AB perpendicularis EK, quæ ad Λ producatur: ergo EΛ diameter eſt circuli. quod ſi ut AB ad BΓ ita fuerit EK ad KΛ, uſi eſſemus puncto Λ: ſin minus, fiat [per 12.6.] ut AB ad BΓ ita EK ad minorem ipſâ KΛ, quæ ſit KM; & per M [per 31. 1.] ducatur MZ parallela ipſi AB; junctiſque AZ, EZ, ZB, per B ducatur BΞ ipſi ZE parallela. itaque quoniam angulus AZE æqualis eſt [per 27. 3.] angulo EZB; angulus autem AZE [per 29. 1.] angulo AΞB, & EZB ipſi ΞBZ: erit & ΞBZ ipſi ZΞB æqualis; quare [per 6. 1.] & ZB æqualis ipſi ZΞ. intelligatur conus cujus vertex Z, & baſis circulus circa diametrum BΞ, rectus ad ZBΞ triangulum: erit itaque is conus rectus, quia ZB æqualis eſt ZΞ. producantur ZB, ZΞ, MZ; & ſecetur conus plano, quod circulo BΞ æquidiſtet; erit igitur [per 4. huj.] ea ſectio circulus, qui ſit HΠΘP, cujus circuli diameter eſt HΘ. communis autem ſectio circuli HΘ & ſubjecti plani ſit ΠΔP: erit igitur ΠΔP ad utramque ipſarum HΘ, ΔB perpendicularis: (uterque enim circulorum ΞB, ΘH rectus eſt ad triangulum ZHΘ; ſed & ſubjectum planum ad ZHΘ rectum eſt: ergo [per 19. 11.] communis ipſorum ſectio ΠΔP erit & ad ZHΘ perpendicularis, ac proinde ad omnes rectas,

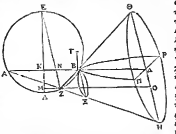
*

ὀρθογώνιοι παρὰ τὴν ἑτέραν εὐθεῖαν, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῇ κορυφῇ, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν.

ΕΣΤΩΣΑΝ αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πεπερασμέναι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Δ· δεῖ δὴ εὑρεῖν ἐν τῷ διὰ τῆς ΑΒΓ ἐπιπέδῳ ὑπερβολήν, ἧς διάμετρος μὲν ἔσται ἡ ΑΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ Β, ὀρθία δὲ ἡ ΒΓ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΒΔ ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν ΒΓ παρακείμενα, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ Β, ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία πρότερον ὀρθή, [a] καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἐν αὐτῷ περὶ τὴν ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΒΖ, ὥστε τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, τὸ ἐν τῷ ΑΕΒ τμήματι, πρὸς τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου, τὸ ἐν τῷ ΑΖΒ, μὴ μείζονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ· καὶ τετμήσθω ἡ ΑΕΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἡ ΕΚ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Λ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΛ. εἰ μὲν οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς ΚΛ, τῷ Λ ἂν ἐχρησάμεθα· εἰ δὲ μή, γενέσθω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΚΛ τὴν ΚΜ, καὶ διὰ τοῦ Μ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΕΖ, ΖΒ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΖΕ παράλληλος ἡ ΒΞ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΒ, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΖΕ τῇ ὑπὸ ΑΞΒ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΖΒ τῇ ΞΒΖ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΞΒΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΞΒ ἐστιν ἴση· καὶ ἄρα ἡ ΖΒ τῇ ΖΞ. νοείσθω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Ζ σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν ΒΞ διάμετρον κύκλος, ὀρθὸς ὢν πρὸς τὸ ΒΖΞ τρίγωνον· ἔσται δὴ ὁ κῶνος ὀρθός, ἴση γὰρ ἡ ΖΒ τῇ ΖΞ. ἐκβεβλήσθωσαν δὲ αἱ ΖΒ, ΖΞ, ΜΖ, καὶ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ ΒΞ κύκλῳ· ἔσται δὴ ἡ τομὴ κύκλος. ἔστω ὁ ΗΠΘΡ· ὥστε διάμετρός ἐστι τοῦ κύκλου ἡ ΗΘ· κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ ΗΘ κύκλου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου ἔστω ἡ ΠΔΡ· ἔσται δὴ ἡ ΠΔΡ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ, ΑΒΔ ὀρθή· (ἑκάτερος γὰρ τῶν ΞΒ, ΘΗ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ ΖΗΘ τρίγωνον, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ΖΗΘ· καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ ΠΔΡ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΖΗΘ. καὶ πρὸς πάσας

ἄρα



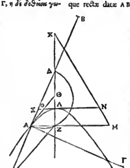
Digitized by Google

ἄρα τὰς ἐφαπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας· τέτμηται ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ ΖΗΘ τρίγωνον, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸν ΝΠΘΡ κύκλον.) καὶ ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ, τέτμηται καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν ΠΔΡ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΝΔΘ, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ τε ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΗΖΘ, τουτέστιν ἡ ΔΒ, ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Β συμπίπτει τῇ ΗΖ κατὰ τὸ Α· ὑπερβολὴ ἄρα ἐστὶ, διὰ τὰ προδεδειγμένα, ἡ τομὴ ἡ ΠΒΡ, ἧς κορυφὴ μὲν ἔσται τὸ Β σημεῖον, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΒΔ τεταγμένως ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται, παράλληλοι γάρ εἰσι τῇ ΠΔΡ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς ΚΜ, ὡς δὲ ἡ ΕΚ πρὸς ΚΜ οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΕΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΕΝΖ τῷ ὑπὸ ΑΝΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΓΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΑΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τε τῆς ΑΝ πρὸς ΝΖ καὶ τῆς ΒΝ πρὸς ΝΖ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΝ πρὸς ΝΖ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ καὶ ἡ ΖΟ πρὸς ΟΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΝ πρὸς ΝΖ οὕτως ἡ ΖΟ πρὸς ΟΘ· ἡ ἄρα ΑΒ πρὸς ΒΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τε οὗ ἔχει ἡ ΖΟ πρὸς ΟΗ καὶ ἡ ΖΟ πρὸς ΟΘ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΟΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΟΘ. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ ΖΟ τῇ ΑΔ· πλαγία ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΒΓ· ταῦτα γὰρ ἐν τῷ δωδεκάτῳ θεωρήματι δέδεικται.

ΜΗ ἔστω δὴ ἡ δεδομένη γωνία ὀρθή, καὶ ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι ἡ ΑΒ, ΑΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἴση τῇ ὑπὸ τῶν ΒΑΘ· δεῖ δὴ γράψαι ὑπερβολὴν, ἧς διάμετρος μὲν ἔσται ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΑΓ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐν τῇ ὑπὸ ΘΑΒ γωνίᾳ τεταγμένως καταχθήσονται.

Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ, [b] καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΔ, καὶ ἤχθω εἰς τὸ ἡμικύκλιον παράλληλος τῇ ΑΘ ἡ ΖΗ, ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΑΓ πρὸς ΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘΔ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῶν ΖΔ, ΔΘ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΔΛ, καὶ κείσθω τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΔΚ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ ΑΖΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΜ, καὶ διὰ τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἤχθω τῇ ΚΖ ἡ ΑΝ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Ο, Ξ· καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν



quæ ipſam contingunt atque in eodem plano conſiſtunt, rectos facit angulos; ſecatur igitur plano triangulo ΖΗΘ recto, ſectionemque facit circulum ΗΠΘΡ.) quoniam vero conus, cujus baſis eſt circulus ΗΘ & vertex Ζ, ſecatur plano ſubjecto ſecante baſim coni ſecundum rectam lineam ΠΔΡ perpendicularem ad ΗΔΘ: & communis ſectio ſubjecti plani & trianguli ΗΖΘ, videlicet ΔΒ, producta ad partes Β convenit cum ΗΖ in puncto Α: erit ex iis, quæ [ad 12. huj.] demonſtrata ſunt, ſectio ΠΒΡ hyperbola, cujus vertex Β, & ordinatim ductæ ad diametrum ΒΔ in recto angulo applicabuntur; parallelæ etenim ſunt ipſi ΠΔΡ.

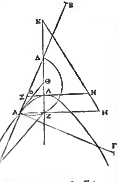
Quoniam autem ut ΑΒ ad ΒΓ ita [per conſtr.] eſt ΒΚ ad ΚΜ; & [per 2. 6.] ut ΕΚ ad ΚΜ ita ΒΝ ad ΝΖ, hoc eſt [per 1. 6.] rectangulum ΕΝΖ ad quadratum ex ΝΖ: erit ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΕΝΖ rectangulum ad quadratum ex ΝΖ. ſed [per 35. 3.] ΕΝΖ rectangulum æquale eſt rectangulo ΑΝΒ: ergo ut ΑΒ ad ΓΒ ita rectangulum ΑΝΒ ad quadratum ex ΝΖ. rectangulum autem ΑΝΒ ad quadratum ex ΝΖ rationem habet compoſitam ex ratione ΑΝ ad ΝΖ & ex ratione ΒΝ ad ΝΖ; ſed [per 4. 6.] ut ΑΝ ad ΝΖ, ita ΑΔ ad ΔΗ ut & ΖΟ ad ΟΗ; & ut ΒΝ ad ΝΖ ita ΖΟ ad ΟΘ: quare ΑΒ ad ΒΓ rationem compoſitam habet ex ratione ΖΟ ad ΟΗ & ex ratione ΖΟ ad ΟΘ; hoc eſt [per 23. 6.] ex ratione quadrati ex ΖΟ ad rectangulum ΗΟΘ: eſt igitur ut ΑΒ ad ΒΓ ita quadratum ex ΖΟ ad ΗΟΘ rectangulum. atque [per conſtr.] eſt ΖΟ parallela ipſi ΑΔ: ſequitur ergo ΑΒ eſſe tranſverſum figuræ latus & ΒΓ rectum; etenim hæc in duodecimo theoremate oſtenſa ſunt.

Non ſit autem datus angulus rectus, ſintque rectæ datæ ΑΒ, ΑΓ; & datus angulus æqualis ſit angulo ΒΑΘ: oportet igitur deſcribere hyperbolam, ita ut ejus diameter ſit ΑΒ, & rectum latus ΑΓ, ductæ vero ordinatim ad diametrum in angulo ΘΑΒ applicentur.

Secetur [per 10. 1.] ΑΒ bifariam in Δ: & [b] ſuper ΑΔ deſcribatur ſemicirculus ΑΖΔ, & ducatur quædam recta ΖΗ ad ſemicirculum parallela ipſi ΑΘ; ita ut fiat ratio quadrati ex ΖΗ ad rectangulum ΔΗΑ eadem quam habet recta ΑΓ ad rectam ΑΒ; & juncta ΖΘΔ producatur; inter ipſas autem ΖΔ, ΔΘ media proportionalis ſit [per 13. 6.] recta ΔΑ, ponaturque ipſi ΑΔ æqualis ΔΚ; & [ope 11. 6.] quadrato ex ΑΖ æquale fiat rectangulum ΑΖΜ, & jungatur ΚΜ; deinde per Α ad rectos angulos ipſi ΚΖ ducatur ΑΝ ad quæ Ο, Ξ producatur: datis autem duabus

rectis

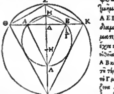
rectis terminatis K A, A N, ad rectos inter ſe angulos, deſcribatur [ex ſuperius oſtenſis] hyperbola, cujus tranſverſum quidem latus ſit B A, rectum vero A N; & à ſectione ad diametrum ductæ in recto angulo applicentur, & poſſint rectangula adjacentia lineæ A N, quæ latitudines habeant interjectas inter ipſas & punctum A, excedantque figura ſimili ipſi B A N: tranſibit igitur ſectio per A, cum [ex hyp.] quadratum ex A Z æquale ſit rectangulo A Z M; & linea A Θ [per 37. huj.] ſectionem continget, rectangulum enim Z Δ Θ quadrato ex Δ A eſt æquale: ac propterea A B diameter eſt ſectionis. quoniam vero [ex conſtr.] ut Γ A ad duplam A Δ, hoc eſt ad A B, ita quadratum ex Z H ad rectangulum Δ H A; & Γ A ad duplam A Δ compoſitam rationem habet ex ratione Γ A ad duplam A Θ & ex ratione duplæ A Θ ad duplam Δ A, hoc eſt ex ratione A Θ ad Δ A ſive [per 4. 6.] Z H ad H Δ: habebit Γ A ad A B rationem compoſitam ex ratione Γ A ad duplam A Θ & ex ratione Z H ad H Δ. habet autem & quadratum ex Z H ad rectangulum Δ H A rationem compoſitam ex ratione Z H ad H Δ & ex ratione Z H ad H A: ratio igitur compoſita ex ratione Γ A ad duplam A Θ & ex ratione Z H ad H Δ, eadem eſt ac ratio compoſita ex ratione Z H ad H Δ & ex ratione Z H ad H A. communis auferatur ratio Z H ad H Δ: ergo ut Γ A ad duplam A Θ ita Z H ad H A, & [per 4. 6.] ut Z H ad H A ita O A ad A Ξ: ut igitur Γ A ad duplam A Θ ita O A ad A Ξ. quod cum ita ſit, erit A Γ ea juxta quam poſſunt quæ à ſectione ducuntur: hoc enim in quinquageſimo theoremate demonſtratum eſt.



περατουμένων, πρὸς ὀρθὰς τε ἀλλήλαις, τῶν Κ Α, Α Ν, γεγράφθω ὑπερβολή, ἧς πλαγία πλευρὰ ἔστω ἡ Κ Α, ὀρθία δὲ ἡ Α Ν, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀπὸ τῆς τομῆς ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται, καὶ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν Α Ν παρακείμενα ὀρθογώνια, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ᾽ αὐτῶν πρὸς τὸ Α, ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ Κ Α Ν· ἥξει δὴ ἡ τομὴ διὰ τοῦ Α, ἴσον γάρ ἐστι τὸ ἀπὸ Α Ζ τῷ ὑπὸ Α Ζ Μ, καὶ ἐφάψεται αὐτῆς ἡ Α Θ, τὸ γὰρ ὑπὸ Ζ Δ Θ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Δ Α· ὥστε ἡ Α Β διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ Α πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Δ, τουτέστι τὴν Α Β, οὕτως τὸ ἀπὸ Ζ Η πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Η Α· ἀλλ᾽ ἡ μὲν Γ Α πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Δ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε οὗ ἔχει ἡ Γ Α πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Θ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ διπλασία τῆς Α Θ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Δ Α, τουτέστιν ἡ Α Θ πρὸς Δ Α, τουτέστιν ἡ Ζ Η πρὸς Η Δ· ἡ Γ Α ἄρα πρὸς Α Β τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ τῆς Γ Α πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Θ καὶ τοῦ τῆς Ζ Η πρὸς Η Δ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ Ζ Η πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Η Α τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε οὗ ἔχει ἡ Ζ Η πρὸς Η Δ καὶ ἡ Ζ Η πρὸς Η Α· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ τῆς Γ Α πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Θ καὶ τοῦ τῆς Ζ Η πρὸς Η Δ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ, ἔκ τε τοῦ τῆς Ζ Η πρὸς Η Α καὶ τοῦ τῆς Ζ Η πρὸς Η Δ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς Ζ Η πρὸς Η Δ λόγος· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Γ Α πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Θ οὕτως ἡ Ζ Η πρὸς Η Α. ὡς δὲ ἡ Ζ Η πρὸς Η Α οὕτως ἡ Ο Α πρὸς Α Ξ· ὡς ἄρα ἡ Γ Α πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Θ οὕτως ἡ Ο Α πρὸς Α Ξ. ὅπου δὲ τοῦτο ᾖ, παρ᾽ ἣν δύνανται ἐστὶν ἡ Α Γ· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ ν΄. θεωρήματι.

EUTOCIUS.

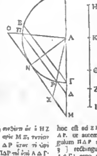
* Et ſuper A B planum erigatur, rectum ad ſubjectum planum, in quo circa A B deſcribatur circulus A E B Z, ita ut pars diametri circuli, quæ in portione A E B comprehenditur, ad partem comprehenſam in portione A Z B non majorem rationem habeat quam A B ad B Γ.] Sint duæ rectæ lineæ A B, B Γ, & oporteat circa A B circulum deſcribere, cujus diameter à linea A B ita dividatur, ut pars ipſius, quæ eſt ad Γ, ad reliquam partem non majorem rationem habeat, quam A B ad B Γ. ponatur jam eandem habere; ſeceturque A B bifariam in Δ, & per Δ ad rectos angulos ipſi A B ducatur E Δ Z, & fiat ut A B ad B Γ ita E Δ ad Δ Z; atque E Z bifariam ſecetur. conſtat ergo, ſi



* Καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῆς Α Β ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἐν αὐτῷ περὶ τὴν Α Β γεγράφθω κύκλος ὁ Α Ε Β Ζ, ὥστε τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, τὸ ἐν τῷ Α Ε Β τμήματι, πρὸς τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, τὸ ἐν τῷ Α Ζ Β τμήματι, μὴ μείζονα λόγον ἔχειν οὗ ἔχει ἡ Α Β πρὸς Β Γ.] Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α Β, Β Γ, καὶ δέον ἔστω περὶ τὴν Α Β κύκλον γράψαι, ὥστε τὴν διάμετρον αὐτοῦ τεμνομένην ὑπὸ τῆς Α Β οὕτως ὥστε τὸ πρὸς τὸ Γ μέρος αὐτῆς πρὸς τὸ λοιπὸν μὴ μείζονα λόγον ἔχειν τοῦ τῆς Α Β πρὸς Β Γ. ὑποκείσθω δὲ νῦν τὸν αὐτὸν ἔχειν, καὶ τετμήσθω ἡ Α Β δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ πρὸς ὀρθὰς τῇ Α Β ἤχθω ἡ Ε Δ Ζ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Α Β πρὸς Β Γ οὕτως ἡ Ε Δ πρὸς Δ Λ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ Ε Ζ· φανερὸν

καὶ δῆλον ὅτι, εἰ μὲν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ ἴση ἐστὶ, καὶ ἡ ΕΗ τῇ ΔΖ, ἡ διχοτομία ἔσται τῆς ΕΖ τὸ Δ· εἰ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ μείζων καὶ ἡ ΕΔ τῆς ΔΖ, ἡ διχοτομία κατωτέρω ἔσται τοῦ Δ· εἰ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ ἐλάσσων, ἀνωτέρω. ἔστω οὖν τίνος κατωτέρω ὡς τὸ Η, καὶ κέντρῳ τῷ Η, διαστήματι τῷ ΗΖ κύκλος γεγράφθω. δεῖ δὴ διὰ τῶν Α, Β σημείων ἥξειν, ἢ ἐξωτέρω, ἢ ἐσωτέρω. καὶ εἰ μὲν διὰ τῶν Α, Β σημείων ἔρχεται, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. ἐρχέσθω δὲ ἐκτὸς τῶν Α, Β, καὶ ἐκβληθεῖσα ἐφ' ἑκάτερα ἡ ΑΒ συμπιπτέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὰ Θ, Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΘ, ΘΕ, ΕΚ, ΚΖ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β τῇ μὲν ΖΚ παράλληλος ἡ ΜΒ, τῇ δὲ ΚΕ ἡ ΒΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΑ, ΑΛ· ἔσονται δὴ καὶ αὗται παράλληλοι ταῖς ΖΘ, ΘΕ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΔ τῇ ΔΒ, τὴν δὲ ΔΘ τῇ ΔΚ, καὶ πρὸς ὀρθὰς εἶναι τὴν ΕΔΖ τῇ ΘΚ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Κ γωνία, καὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ ΜΒ, ΒΛ ταῖς ΖΚ, ΚΕ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Β. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α· ὥστε ὁ περὶ τὴν ΜΛ κύκλος γραφόμενος ἥξει διὰ τῶν Α, Β. γεγράφθω, ὡς ὁ ΜΑΛΒ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΜΒ τῇ ΖΚ, ἔστιν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΜ οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΔΒ, ὁμοίως δὴ καὶ ὡς ἡ ΚΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΛ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ οὕτως ἡ ΛΔ πρὸς ΔΜ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΛΔ πρὸς ΔΜ. ὁμοίως δὴ καὶ εἰ ὁ γραφόμενος ὑπὸ τῆς ΖΕ κύκλος τέμνει τὴν ΑΒ, τὸ αὐτὸ δειχθήσεται.

b Καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΔ, καὶ ἤχθω εἰς τὸ ἡμικύκλιον παράλληλος τῇ ΑΘ ἡ ΖΗ, ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ.] Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ ἐπὶ διαμέτρου τῆς ΑΓ, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος ὁ τῆς ΕΖ πρὸς ΖΗ, καὶ δέον ἔστω ποιῆσαι τὰ προκείμενα. κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ τετμήσθω ἡ ΘΗ δίχα κατὰ τὸ Κ, καὶ ἤχθω ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ τυχοῦσα εὐθεῖα ἡ ΓΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· καὶ ἀπὸ τοῦ Λ κάθετος ἤχθω ἐπ' αὐτὴν κάθετος, καὶ ἐκβληθεῖσα συμβαλλέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΜ· ἐφάψεται ἄρα τοῦ κύκλου. καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΖΘ πρὸς ΘΚ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΝΞ, καὶ κείσθω τῇ ΝΞ ἴση ἡ ΝΟ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ, ΛΟ τέμνουσαι τὸ ἡμικύκλιον κατὰ τὰ Ρ, Π, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΡΔ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΝΞ τῇ ΝΟ, κοινή τε καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΝΛ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΛΟ τῇ ΛΞ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΠ ἴση τῇ ΛΡ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΠΟ τῇ ΡΞ ἐστὶν ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΡΔ τῇ ΜΟ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΖΘ πρὸς ΘΚ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΝΞ, ὡς δὲ ἡ ΘΚ πρὸς ΘΗ οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς ΞΟ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΘΖ πρὸς ΘΗ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΞΟ. καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΟΞ πρὸς ΞΜ· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΗΖ πρὸς ΖΘ, τουτέστι πρὸς ΖΕ, οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς ΜΞ, τουτέστιν ἡ ΠΔ πρὸς ΔΡ. ὡς δὲ ἡ ΠΔ πρὸς ΔΡ οὕτως τὸ ὑπὸ ΠΔΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΡ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΠΔΡ τῷ ὑπὸ ΑΔΓ· ὡς ἄρα ἡ ΗΖ πρὸς ΖΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΡ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΖΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΓ.



quidem AB ſit æqualis BΓ, & EΔ ipſi ΔZ æqualem eſſe, & ideo punctum Δ rectam EZ bifariam ſecare: ſi vero AB ſit major BΓ & EΔ ipſâ ΔZ, punctum quod bifariam ſecat EZ infra Δ cadet: & ſi minor ſit, cadet ſupra. jam cadat infra ut in H; & centro quidem H, intervallo autem HZ circulus deſcribatur. neceſſarium autem eſt eum vel per puncta A, B tranſire, vel extra, vel intra. & ſi tranſeat per A, B, factum jam erit quod oportebat. verum cadat extra A, B, & producatur AB in utramque partem, et conveniat cum circumferentia circuli in punctis Θ, K; junctiſque ZΘ, ΘE; EK, KZ, ducatur per B linea MB parallela ZK, & BΛ parallela ipſi KE, & jungantur MA, AΛ: quæ ipſis EΘ, ΘZ parallelæ erunt, propterea quod æquales inter ſe ſint AΔ, ΔB, itemque ΔΘ, ΔK, & EΔZ ſit ad rectos angulos ipſi ΘK. quoniam igitur [per 31. 3.] angulus K rectus eſt, & MB, BΛ parallelæ ipſis ZK, KE, erit & qui ad B rectus, & eadem ratione qui ad A: quare circulus circa MΛ deſcriptus per puncta A, B tranſibit. deſcribatur ille, ſitque MAΛB. & quoniam MB parallela eſt ipſi ZK; erit [per 4. 6.] ut ZΔ ad ΔM ita KΔ ad ΔB, & ſimiliter ut KΔ ad ΔB ita EΔ ad ΔΛ, & permutando ut EΔ ad ΔZ ita ΛΔ ad ΔM: ergo ut AB ad BΓ ita ΛΔ ad ΔM. quod ſi circulus circa ZE deſcriptus ſecet AB, idem nihilominus demonſtrabitur.

b Et ſuper AΔ deſcribatur ſemicirculus AZΔ, & ducatur quædam recta ZH ad ſemicirculum parallela ipſi AΘ; faciens rationem quadrati ex ZH ad rectangulum ΔHA eandem quam habet ΓA ad AB.] Sit ſemicirculus ABΓ circa diametrum AΓ, data autem ratio ſit EZ ad ZH, & oporteat facere ea quæ propoſita ſunt. ponatur ipſi EZ æqualis ZΘ, & ΘH in puncto K bifariam dividatur, ducaturque in ſemicirculo quæpiam recta ΓB in angulo AΓB, & à centro Λ ad ipſam perpendicularis ducatur, quæ producta occurrat circuli circumferentiæ in N, & per N ipſi ΓB parallela ſit NM: ergo [per 16. 3.] NM circulum continget. itaque fiat [per 10. 6.] ut ZΘ ad ΘK ita MΞ ad NΞ, & ipſi NΞ æqualis ponatur NO; jungantur autem ΛΞ, ΛO quæ ſemicirculum in punctis P, Π ſecent, & ducatur ΠPΔ. quoniam igitur NΞ æqualis eſt NO, communiſque & ad rectos angulos NΛ; erit [per 4. 1.] ΛO ipſi ΛΞ æqualis. ſed ΛΠ eſt æqualis ΛP; ergo & reliqua ΠO reliquæ PΞ; & propterea [per 2. 6.] ΠPΔ ipſi MO eſt parallela. eſt autem ut ZΘ ad ΘK ita MΞ ad ΞN, & ut ΘK ad ΘH ita NΞ ad ΞO; ex æquali igitur ut ΘZ ad ΘH ita MΞ ad ΞO, invertendoque ut HΘ ad ΘZ ita OΞ ad ΞM; & componendo erit ut HZ ad ZΘ, hoc eſt ad ZE, ita OM ad MΞ, hoc eſt ΠΔ ad ΔP. ut autem ΠΔ ad ΔP ita [per 1. 6.] rectangulum ΠΔP ad quadratum ex ΔP. ſed [per 36. 3.] rectangulum ΠΔP æquale eſt rectangulo AΔΓ: ergo ut HZ ad ZE ita AΔΓ rectangulum ad quadratum ex ΔP, & invertendo ut ZE ad ZH ita quadratum ex ΔP ad rectangulum AΔΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις· εὑρεῖν περὶ διάμετρον τὴν ἑτέραν αὐτῶν κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ἔλλειψιν, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ταῖς εὐθείαις, ἧς κορυφὴ

Prop. LIV. *Probl.*

Datis duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter ſe angulos: invenire, circa alteram ipſarum tanquam diametrum coni, ſectionem quæ ellipſis appellatur, in eodem plano in

quo ſunt datæ rectæ; ita ut vertex ſit punctum ad rectum angulum, & rectæ à ſectione ad diametrum ſub angulo dato poſſint applicatæ rectangula adjacentia alteri datæ, quæ latitudinem habeant rectam inter ipſas & verticem ſectionis interjectam, deficiantque figurâ ſimili & ſimiliter poſitâ ei quæ ſub datis rectis continetur.

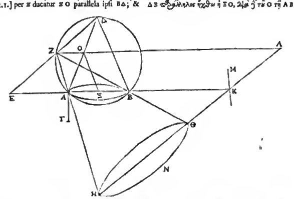
ἔσται τὸ πρὸς τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ σημεῖον, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ἐν γωνίᾳ δοθείσῃ δυνήσονται τὰ παρακείμενα ὀρθογώνια παρὰ τὴν ἑτέραν εὐθεῖαν, πλάτος ἔχοντα τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, ἐλλείποντα εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν περιεχομένῳ.

SINT datæ rectæ ΑΒ, ΑΓ ad rectos angulos conſtitutæ, quarum major ΑΒ: oportet vero in ſubjecto plano deſcribere ellipſim, ita ut ejus diameter ſit ΑΒ, vertex Α, & rectum latus ΑΓ; ductæ vero à ſectione ad ΑΒ in dato angulo applicentur, & poſſint ſpatia adjacentia ipſi ΑΓ, quæ latitudines habeant lineas interjectas inter ipſas & punctum Α, deficiantque figurâ ſimili & ſimiliter poſitâ ei quæ ſub ΒΑ, ΑΓ continetur.

ΕΣΤΩΣΑΝ αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν μείζων ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ γράψαι ἔλλειψιν, ἧς διάμετρος μὲν ἔσται ἡ ΑΒ, κορυφὴ δὲ τὸ Α, ὀρθία δὲ ἡ ΑΓ, αἱ δὲ καταγόμεναι καταχθήσονται ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, καὶ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν ΑΓ παρακείμενα, πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ Α, ἐλλείποντα εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.

Sit datus angulus primum rectus; & [per 12.11.] juxta ΑΒ planum attollatur rectum ad ſubjectum planum, atque in ipſo ſuper ΑΒ circuli portio ΑΔΒ deſcripta [per 30. 3.] bifariam dividatur in Δ, & jungantur ΔΑ, ΔΒ: ponatur autem ipſi ΑΓ æqualis ΑΞ, & [per 31.1.] per Ξ ducatur ΞΟ parallela ipſi ΒΔ; &

Ἔστω δὲ ἡ δοθεῖσα γωνία πρότερον ὀρθή, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ ἐν αὐτῷ ἐπὶ τῆς ΑΒ τμῆμα κύκλου γεγράφθω τὸ ΑΔΒ, οὗ διχοτομία ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ, ΔΒ, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΞ, καὶ διὰ τοῦ Ξ τῇ ΔΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΞΟ, διὰ δὲ τοῦ Ο τῇ ΑΒ

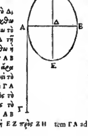


per Ο ipſi ΑΒ parallela ΟΖ; junctaque ΔΖ conveniat cum ΑΒ producta in puncto Ε: erit igitur [per 7. 5.] ut ΒΑ ad ΑΓ ita ΒΑ ad ΑΞ, hoc eſt ΔΑ ad ΑΟ, hoc eſt [per 2. 6.] ΔΕ ad ΕΖ; deinde jungantur ΑΖ, ΖΒ & producantur, ſumaturque in ΖΑ quodvis punctum Η, & [per 31. 1.] per Η ipſi ΔΕ parallela ducatur ΗΛ, quæ cum ΑΒ producta conveniat in Κ; denique producatur ΖΟ, & conveniat cum ΗΚ in Λ. quoniam igitur circumferentia ΑΔ æqualis eſt ipſi ΔΒ; & [per 27. 3.] angulus ΑΒΔ angulo ΔΖΒ æqualis erit. & quo-

παράλληλος ἡ ΟΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ, καὶ συμπιπτέτω τῇ ΑΒ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Ε· ἔσται δὴ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΞ, τουτέστιν ἡ ΔΑ πρὸς ΑΟ, τουτέστιν ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΒ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΖΑ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΛ, καὶ συμπιπτέτω τῇ ΑΒ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Κ· ἐκβεβλήσθω δὲ ἡ ΖΟ καὶ συμπιπτέτω τῇ ΗΚ κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ περιφέρεια τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ.

ΔΖΒ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΑ γωνία δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΖΑΔ, ΖΔΑ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΖΑΔ τῇ ὑπὸ ΖΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΔΑ τῇ ὑπὸ ΖΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΒΑ ἐστὶν ἴση, τουτέστι τῇ ὑπὸ ΒΖΔ. ἔστι δὲ καὶ παράλληλος ἡ ΔΕ τῇ ΑΗ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΖΑ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἐστὶν ἴση. ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΒ τῇ ὑπὸ ΖΘΗ· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΖΗΘ τῇ ὑπὸ ΖΘΗ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΖΘ ἐστὶν ἴση. γεγράφθω δὴ περὶ τὴν ΘΗ κύκλος ὁ ΗΘΝ ὀρθὸς πρὸς τὸ ΘΗΖ τρίγωνον, καὶ νοείσθω κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΗΘΝ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον· ἔσται δὴ ὁ κῶνος ὀρθὸς διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΗΖ τῇ ΖΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΗΘΝ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ ΘΗΖ ἐπίπεδον, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ διὰ τῶν ΗΘΖ ἐπίπεδον· καὶ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἄρα πρὸς τὸ διὰ τῶν ΗΘΖ ἐπίπεδον ὀρθὴ ἔσται. ἔστω δὲ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ ΚΜ· ἡ ΚΜ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ, ΚΗ. καὶ ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΗΘΝ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸ ΗΘΖ τρίγωνον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΑΚ, ΚΜ, ὅ ἐστι τὸ ὑποκείμενον, κατ' εὐθεῖαν τὴν ΚΜ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΗΚ, καὶ τὸ ἐπίπεδον συμπίπτει ταῖς ΖΗ, ΖΘ πλευραῖς τοῦ κώνου· ἡ ἄρα γινομένη τομὴ ἔλλειψίς ἐστιν, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, αἱ δὲ καταγόμεναι καταχθήσονται ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ, παράλληλοι γάρ εἰσι τῇ ΚΜ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΕΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΒΕΑ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ· τὸ δὲ ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΕ πρὸς ΕΖ καὶ τοῦ τῆς ΑΕ πρὸς ΕΖ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΘ, τουτέστιν ἡ ΖΑ πρὸς ΑΘ, ὡς δὲ ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΗ, τουτέστιν ἡ ΖΑ πρὸς ΑΗ· ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς ΑΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΑ πρὸς ΑΗ καὶ τοῦ τῆς ΖΑ πρὸς ΑΘ· ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΖΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΑΘ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά ἐστιν ἡ ΑΓ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ δεκάτῳ τρίτῳ θεωρήματι.

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω ἡ ΑΒ ἐλάσσων τῆς ΑΓ· καὶ δέον ἔστω περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ γράψαι ἔλλειψιν, ὥστε ὀρθίαν εἶναι τὴν ΑΓ.



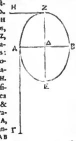
Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΔΖ, καὶ τῷ ὑπὸ ΒΑΓ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ ΖΕ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ΖΔ τῇ ΔΕ, καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΗ· καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τῆς ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΓΑΒ τῷ ἀπὸ ΕΖ· ἔστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, καὶ τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ. ὡς δὲ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ· ὡς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ

niam angulus ΕΖΑ æqualis eſt [per 32. 1.] duobus angulis ΖΑΔ, ΖΔΑ; atque eſt [per 27. 3.] ΖΑΔ angulus æqualis angulo ΖΒΔ, ut etiam ΖΔΑ ipſi ΖΒΑ: erit angulus ΕΖΑ æqualis angulo ΔΒΑ, hoc eſt [per 27. 3.] ΒΖΔ. verum ΔΕ parallela eſt ipſi ΑΗ: igitur angulus ΕΖΑ æqualis eſt [per 29. 1.] angulo ΖΗΘ. at ΔΖΒ ipſi ΖΘΗ: quare ſequitur ΖΗΘ angulum angulo ΖΘΗ eſſe æqualem, & [per 6. 1.] lineam ΖΗ lineæ ΖΘ. itaque circa ΗΘ deſcribatur circulus ΗΘΝ, rectus ad triangulum ΘΗΖ; & intelligatur conus, cujus baſis circulus ΗΘΝ & vertex punctum Ζ: erit igitur is conus rectus, ob ΗΖ æqualem ipſi ΖΘ. & quoniam circulus ΗΘΝ rectus eſt ad ΘΗΖ planum; eſt autem & planum ſubjectum rectum ad planum quod per ΗΘΖ tranſit: ideo [per 19. 11.] communis ipſorum ſectio ad planum per ΗΘΖ perpendicularis erit. communis autem ſectio ſit linea ΚΜ: ergo ΚΜ perpendicularis eſt ad utramque ipſarum ΑΚ, ΚΗ. rurſus quoniam conus, cujus baſis eſt circulus ΗΘΝ & vertex Ζ, ſecatur plano per axem, quod facit ſectionem triangulum ΗΘΖ; ſecatur autem & altero plano per ΑΚ, ΚΜ tranſeunte, quod eſt ſubjectum planum, ſecundum rectam lineam ΚΜ perpendicularem ad ΗΚ, & planum illud occurrit ipſis ΖΗ, ΖΘ lateribus coni: erit [per 13. huj.] ſectio genita ellipſis, cujus diameter ΑΒ, ductæ vero à ſectione ad ΑΒ in recto angulo applicabuntur; ſunt enim [per 13. huj.] ipſi ΚΜ parallelæ. quoniam vero ut ΔΕ ad ΕΖ ita [per 1. 6.] rectangulum ΔΕΖ, hoc eſt [per 36. 3.] ΒΕΑ, ad quadratum ex ΕΖ; rectangulum autem ΒΕΑ [per 23. 6.] ad quadratum ex ΕΖ compoſitam rationem habet ex ratione ΒΕ ad ΕΖ & ex ratione ΑΕ ad ΕΖ; atque ΒΕ ad ΕΖ ita [per 4. 6.] ΒΚ ad ΚΘ, hoc eſt ΖΑ ad ΑΘ, & ut ΑΕ ad ΕΖ ita ΑΚ ad ΚΗ, hoc eſt ΖΑ ad ΑΗ: habebit igitur ΒΑ ad ΑΓ rationem compoſitam ex ratione ΖΑ ad ΑΗ & ex ratione ΖΑ ad ΑΘ. quæ quidem ratio eadem eſt [per 23. 6.] quam habet quadratum ex ΖΑ ad ΗΑΘ rectangulum: ergo ut ΒΑ ad ΑΓ ita quadratum ex ΖΑ ad rectangulum ΗΑΘ. quod cum ita ſit, ΑΓ erit rectum figuræ latus, ut oſtenſum eſt in 13. theoremate.

IISDEM poſitis, ſit linea ΑΒ minor ipſa ΑΓ: & oporteat circa diametrum ΑΒ ellipſim deſcribere, ita ut ΑΓ ſit rectum figuræ latus.

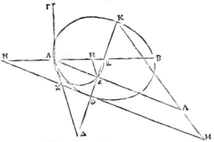
Secetur ΑΒ bifariam in Δ; à quo ad rectos angulos ipſi ΑΒ ducatur ΕΔΖ: & rectangulo ΒΑΓ æquale ſit [ope 13. 6.] quadratum ex ΖΕ, & ΖΔ æqualis ſit ipſi ΔΕ; ipſi vero ΑΒ parallela ducatur ΖΗ, & fiat [per 12. 6.] ut ΑΓ ad ΑΒ ita ΕΖ ad ΖΗ: major eſt igitur ΕΖ quam ΖΗ. & quoniam rectangulum ΓΑΒ æquale eſt quadrato ex ΕΖ; ut ΓΑ ad ΑΒ ita eſt [per cor. 20. 6.] quadratum ex ΖΕ ad quadratum ex ΑΒ, & quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΑΔ. ut autem ΓΑ ad ΑΒ ita ΕΖ ad ΖΗ: ergo ut ΕΖ ad ΖΗ ita

ita quadratum ex ZΔ ad quadratum ex ΔA. ſed quadratum ex ZΔ æquale eſt rectangulo ZΔE: quare ut EZ ad ZH ita rectangulum EΔZ ad quadratum ex AΔ. duabus igitur rectis terminatis EZ, ZH aptatiſque ad rectos inter ſe angulos, quarum [per præc. caſ.] major eſt EZ, deſcribatur ellipſis, ita ut EZ diameter ſit & ZH rectum figuræ latus: tranſibit itaque ſectio per A, quoniam ut rectangulum ZΔE ad quadratum ex ΔA ita eſt EZ ad ZH. atque eſt AΔ æqualis ΔB: tranſibit igitur etiam per B, ac propterea ellipſis circa AB deſcripta erit. & quoniam ut ΓA ad AB ita quadratum ex ZΔ ad quadratum ex ΔA, atque eſt quadratum ex ΔA rectangulo AΔB æquale: erit ut ΓA ad AB ita quadratum ex ΔZ ad rectangulum AΔB: quare AΓ eſt rectum figuræ latus.



οὕτως τὸ ἀπὸ ZΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔA. τὸ δὲ ἀπὸ ZΔ ἴσον ἐςὶ τῷ ὑπὸ ZΔE· ὡς ἄρα ἡ EZ πρὸς ZH οὕτως τὸ ὑπὸ EΔZ πρὸς τὸ ἀπὸ AΔ. δύο ἄρα εὐθειῶν πεπερασμένων τῶν EZ, ZH πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κειμένων, καὶ μείζονος οὔσης τῆς EZ, γεγράφθω ἔλλειψις ἧς διάμετρος μὲν ἡ EZ, ὀρθία δὲ ἡ ZH· ἥξει δὴ ἡ τομὴ διὰ τοῦ A, διὰ τὸ εἶναι ὡς τὸ ὑπὸ ZΔE πρὸς τὸ ἀπὸ ΔA οὕτως ἡ EZ πρὸς ZH. καὶ ἔστιν ἴση ἡ AΔ τῇ ΔB· ἐλεύσεται ἄρα καὶ διὰ τοῦ B, γεγραμμένη ἂν ἔλλειψις περὶ τὴν AB. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓA πρὸς AB οὕτως τὸ ἀπὸ ZΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔA, τὸ δὲ ἀπὸ ΔA ἴσον τῷ ὑπὸ AΔB· ὡς ἄρα ἡ ΓA πρὸς AB οὕτως τὸ ἀπὸ ΔZ πρὸς τὸ ὑπὸ AΔB· ὥστε ὀρθία ἐστὶν ἡ AΓ.

Sed non ſit datus angulus rectus, ſitque ipſi æqualis BAΔ, & ſecta AB bifariam in E circa AE ſemicirculus AEZ deſcribatur; in quo ipſi AΔ parallela ducatur ZH, ita ut faciat rationem quadrati ex ZH ad rectangulum AHE eandem quam habet ΓA ad ipſam AB; & junctæ AZ, EZ producantur, & ſumatur [per 13. 6] inter ipſas ΔE, EZ media proportionalis EΘ, cui æqualis ponatur EK; fiat autem [per 12. 6.] quadrato ex AZ æquale rectangulum ΘZΛ, jungaturque KΛ; & per Θ ipſi ΘZ ad rectos angulos ducatur MΘΞ parallela ipſi AZΛ, rectus eſt enim [per 31. 3.] angulus qui ad Z; atque datis duabus rectis terminatis & ad rectos inter ſe angulos KΘ, ΘM, deſcribatur ellipſis [per caſ. præc.] cujus diameter tranſverſa KΘ, & rectum figuræ latus ΘM; ductæ vero à ſectione ad ΘK in recto angulo applicentur: tranſibit igitur ſectio per A, quia quadratum ex ZA rectangulo ΘZΛ eſt æquale. & quoniam ΘE æqualis eſt EK, & AE ipſi EB; etiam per B tranſibit ſectio, cujus centrum erit E & diameter AEB, & [per prop. 37. vel 38. huj.] ΔA ſectionem continget, propterea quod rect-



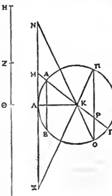
Μὴ δὲ μὴ ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία ὀρθή, καὶ ἔστω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ BAΔ, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E, καὶ ἐπὶ τῆς AE γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ AEZ, καὶ ἐν αὐτῷ τῇ AΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ZH ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ὑπὸ AHE λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓA πρὸς τὴν AB, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ AZ, EZ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τῶν ΔE, EZ μέση ἀνάλογον ἡ EΘ, καὶ τῇ EΘ ἴση κείσθω ἡ EK, καὶ πεποιήσθω τῷ ἀπὸ AZ ἴσον τὸ ὑπὸ ΘZΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ KΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ τῇ ΘZ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΘMΞ, παράλληλος γινομένη τῇ AZΛ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Z· καὶ δύο δοθεισῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῶν KΘ, ΘM, γεγράφθω ἔλλειψις, ἧς διάμετρος πλαγία ἡ KΘ, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘM, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΘK ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ κατηχθήσονται· ἥξει δὴ ἡ τομὴ διὰ τοῦ A, διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ ZA τῷ ὑπὸ ΘZΛ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΘE τῇ EK, ἡ δὲ AE τῇ EB, ἥξει καὶ διὰ τοῦ B ἡ τομή· καὶ ἔσται κέντρον μὲν τὸ E, διάμετρος δὲ ἡ AEB, καὶ ἐφάψεται τῆς τομῆς ἡ ΔA, διὰ τὸ ἴσον

ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ ΔΕΖ τῷ ἀπὸ ΕΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ, ἀλλ' ἡ μὲν ΓΑ πρὸς ΑΒ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΔΑ καὶ ἐκ τοῦ τῆς διπλασίας τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΑΒ, τουτέστι τοῦ ΔΑ πρὸς ΑΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΕ καὶ ἐκ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΑ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ καὶ ἐκ τοῦ τῆς ΔΑ πρὸς ΑΕ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΕ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ· κοινοῦ ἄρα ἀφαιρεθέντος τούτου τοῦ λόγου, ἔσται ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ, τουτέστιν ἡ ΞΑ πρὸς ΑΝ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά ἐστιν ἡ ΑΓ.

angulum ΔΕΖ æquale eſt quadrato ex ΕΘ, & quoniam [per conſtr.] ut ΓΑ ad ΑΒ ita quadratum ex ΖΗ ad rectangulum ΑΗΕ; ſed ΓΑ ad ΑΒ rationem habet compoſitam ex ratione ΓΑ ad duplam ΔΑ & ex ratione duplæ ΑΔ ad ΑΒ, hoc eſt [per 15. 5.] ex ratione ΔΑ ad ΑΕ; quadratum vero ex ΖΗ ad rectangulum ΑΗΕ [per 24. 6.] compoſitam rationem habet ex ratione ΖΗ ad ΗΕ & ex ratione ΖΗ ad ΗΑ: ergo ratio compoſita ex ratione ΓΑ ad duplam ΑΔ & ex ratione ΔΑ ad ΑΕ eadem eſt quæ componitur ex ratione ΖΗ ad ΗΕ & ratione ΖΗ ad ΗΑ. ſed ut ΔΑ ad ΑΕ ita [per 4. 6.] ΖΗ ad ΗΕ: ergo, ſublata communi hac ratione, erit ut ΓΑ ad duplam ΑΔ ita ΖΗ ad ΗΑ; hoc eſt ΞΑ ad ΑΝ. quando autem hoc ita ſit, linea ΑΓ [per 50. huj.] eſt rectum figuræ latus.

EUTOCIUS.

[a] Καὶ ἐπὶ τῆς ΑΕ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ ΑΕΖ, καὶ τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἐν αὐτῷ ἡ ΖΗ, λόγον ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ.] Ἔστω ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, καὶ κείσθωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΖ ἐπὶ τὸ Η, καὶ τῇ ΔΕ ἴση κείσθω ἡ ΖΗ, καὶ τετμήσθω ὅλη ἡ ΕΗ δίχα κατὰ τὸ Θ καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Κ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἤχθω, καὶ συμβαλλέτω τῇ περιφερείᾳ κατὰ τὸ Λ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΜ, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΚΑ συμβαλλέτω τῇ ΛΜ κατὰ τὸ Μ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΘΖ πρὸς ΖΗ οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς ΜΝ, καὶ τῇ ΑΝ ἴση ἔστω ἡ ΑΞ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΝΚ, ΚΞ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ ἀναπληρωθεὶς ὁ κύκλος τεμνέτω αὐτὰς κατὰ τὰ Ο, Π, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΡΠ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΞΘ πρὸς ΖΗ οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς ΜΝ· συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΖ οὕτως ἡ ΛΝ πρὸς ΝΜ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΝΛ. ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΝΞ· καὶ διελόντι ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΖΕ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΜΞ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΝΑ τῇ ΑΞ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΚ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΝ τῇ ΚΞ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΟ τῇ ΚΠ ἴση· παράλληλος ἄρα ἡ ΝΞ τῇ ΟΠ· ὅμοιον ἄρα τὸ ΚΜΝ τρίγωνον τῷ ΚΡΟ τριγώνῳ, καὶ τὸ ΚΜΞ τῷ ΠΡΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΜ πρὸς ΚΡ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΡΟ. ἀλλὰ καὶ ὡς αὐτὴ ἡ ΚΜ πρὸς ΚΡ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΠΡ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΜ πρὸς ΡΟ οὕτως ἡ ΜΞ πρὸς ΠΡ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΝΜ πρὸς ΜΞ οὕτως ἡ ΟΡ πρὸς ΡΠ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΝΜ πρὸς ΜΞ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΖΕ, τουτέστιν ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΟΡ πρὸς ΡΠ οὕτως τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΟΡΠ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΟΡΠ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΟΡΠ τῷ ὑπὸ ΑΡΓ· ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΟΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΡΓ.



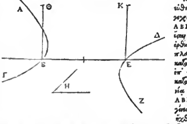
[a] Et circa ΑΕ ſemicirculus ΑΕΖ deſcribatur, in quo ipſi ΑΔ parallela ducatur ΖΗ, ita ut faciat rationem quadrati ex ΖΗ ad rectangulum ΑΗΕ eandem quam habet ΓΑ ad ipſam ΑΒ.] Sit ſemicirculus ΑΒΓ in quo recta quæpiam ΑΒ, ponanturque duæ rectæ inæquales ΔΕ, ΕΖ, & producatur ΕΖ ad Η, & ſit ΖΗ æqualis ipſi ΔΕ, & tota ΕΗ in Θ bifariam dividatur; ſumpto autem circuli centro Κ, ab eo ducatur perpendicularis ad ΑΒ, quæ circumferentiæ circuli occurrat in Λ, perque Λ ipſi ΑΒ parallela ducatur ΛΜ, & ΚΑ producta conveniat cum ΛΜ in puncto Μ, & fiat ut ΘΖ ad ΖΗ ita ΛΜ ad ΜΝ, atque ipſi ΑΝ æqualis ſit ΑΞ, & junctæ ΝΚ, ΚΞ producantur, adeo ut à completo circulo ſecentur in punctis Ο, Π, & jungatur ΟΡΠ. quoniam igitur ut ΞΘ ad ΖΗ ita eſt ΛΜ ad ΜΝ; componendo erit ut ΘΗ ad ΗΖ ita ΛΝ ad ΝΜ, & invertendo ut ΖΗ ad ΗΘ ita ΝΜ ad ΝΛ. ut autem ΖΗ ad ΗΕ ita ΜΝ ad ΝΞ, & dividendo ut ΖΗ ad ΖΕ ita ΝΜ ad ΜΞ. & quoniam ΝΑ æqualis eſt ΑΞ, communiſque & ad rectos angulos ΑΚ; erit & ΚΝ æqualis ΚΞ. & eſt ΚΟ ipſi ΚΠ æqualis: parallela igitur eſt [per 2. 6.] ΝΞ ipſi ΟΠ, atque ob id triangulum ΚΜΝ ſimile triangulo ΚΡΟ, & triangulum ΚΜΞ ipſi ΠΡΚ; erit ut ΚΜ ad ΚΡ ita ΜΝ ad ΡΟ. ſed ut eadem ΚΜ ad ΚΡ ita ΜΞ ad ΠΡ: quare ut ΝΜ ad ΡΟ ita ΜΞ ad ΠΡ, & permutando ut ΝΜ ad ΜΞ ita ΟΡ ad ΡΠ. ſed ut ΗΜ ad ΜΞ ita ΖΗ ad ΖΕ, hoc eſt ΔΕ ad ΕΖ; ut autem ΟΡ ad ΡΠ ita [per 1. 6.] quadratum ex ΟΡ ad rectangulum ΟΡΠ, ut igitur ΔΕ ad ΕΖ ita quadratum ex ΟΡ ad rectangulum ΟΡΠ. ſed [per 35. 3.] eſt rectangulum ΟΡΠ rectangulo ΑΡΓ æquale: ut igitur ΔΕ ad ΕΖ ita quadratum ex ΟΡ ad rectangulum ΑΡΓ.

Prop. LV. *Probl.*

Datis duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter ſe angulos: invenire oppoſitas ſectiones, quarum diameter ſit una datarum rectarum, & vertices ejuſdem lineæ termini; ita ut applicatæ ab utraque ſectione in dato angulo poſſint ſpatia adjacentia alteri rectæ, excedentia vero figurâ ſimili ei quæ ſub datis rectis continetur.

SINT datæ rectæ terminatæ ad rectos inter ſe angulos B E, B Θ, & datus angulus ſit H: oportet utique circa unam rectarum B E, B Θ ſectiones oppoſitas deſcribere, ita ut ordinatim applicatæ in angulo H applicentur.

Datis igitur duabus rectis B E, B Θ, deſcribatur hyperbola A B Γ, cujus diameter tranſverſa ſit B E, & rectum figuræ latus Θ B; ductæ vero ad illam quæ in directum ipſi B E conſtituitur, applicentur in angulo H. ſit ea B Γ; quod quomodo fieri oporteat, jam [ad 53. huj.] dictum eſt; ducatur per E recta E K ad rectos angulos ipſi B E, quæ ſit æqualis B Θ; & deſcribatur ſimiliter alia hyperbola Δ E Z, ita ut ejus diameter ſit B E, rectum figuræ latus E K, & ductæ à ſectione ordinatim applicentur in angulo qui angulo H æqualis ſit: conſtat igitur B, E ſectiones eſſe oppoſitas, quarum diameter una eademque eſt, atque latera recta inter ſe æqualia.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε΄.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις πεπερασμένων εὑρεῖν ἀντικειμένας, ὧν διάμετρος ἔσται μία τῶν εὐθειῶν, κορυφαὶ δὲ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐν ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν ἑτέραν παρακείμενα, καὶ ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν περιεχομένῳ.

ΕΣΤΩΣΑΝ αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις πεπερασμέναι, αἱ Β Ε, Β Θ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἡ Η· δεῖ γράψαι ἀντικειμένας περὶ μίαν τῶν Β Ε, Β Θ, ὥστε τὰς καταγομένας κατῆχθαι ἐν γωνίᾳ τῇ Η.

Καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Β Ε, Β Θ, γεγράφθω ὑπερβολὴ Α Β Γ, ἧς διάμετρος ἔσται πλαγία ἡ Β Ε, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ Θ Β, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ Β Ε καταχθήσονται ἐν γωνίᾳ τῇ Η. καὶ ἔστω ἡ Α Β Γ, τοῦτο γὰρ ὡς δεῖ γενέσθαι προγέγραπται· ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Ε τῇ Β Ε πρὸς ὀρθὰς ἡ Ε Κ, ἴση οὖσα τῇ Β Θ, καὶ γεγράφθω ὁμοίως ἄλλη ὑπερβολὴ ἡ Δ Ε Ζ, ἧς διάμετρος μὲν ἡ Β Ε, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ Ε Κ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς τεταγμένως καταχθήσονται ἐν τῇ γωνίᾳ τῇ Η· φανερὸν δὴ ὅτι αἱ Β, Ε εἰσὶν ἀντικείμεναι, διάμετρος δὲ αὐτῶν μία ἐστί, καὶ ὀρθίαι ἴσαι.

Prop. LVI. *Probl.*

Datis duabus rectis lineis ſeſe bifariam ſecantibus: circa utramque ipſarum ſectiones oppoſitas deſcribere; ita ut rectæ datæ ſint conjugatæ earum diametri, & ut quarumlibet oppoſitarum ſectionum diameter poſſit figuram aliarum oppoſitarum.

SINT datæ duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecantes A Γ, Δ E: oportet jam circa utramque ipſarum quaſi diametrum oppoſitas ſectiones deſcribere, ita ut A Γ, Δ E conjugatæ ſint inter ſe, nempe ut Δ E quidem poſſit figuram earum quæ circa A Γ ſunt, A Γ vero figuram earum poſſit quæ circa Δ E.

Sit [ope 11.6.] quadrato ex Δ E æquale rectangulum A Γ Λ, ſitque A Γ ipſi Γ Λ ad rectos angulos; & duabus datis rectis ad rectos inter ſe angulos conſtitutis A Γ, Γ Λ, deſcriban-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛ΄.

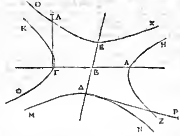
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δίχα τεμνουσῶν ἀλλήλας γράψαι περὶ ἑκατέραν αὐτῶν ἀντικειμένας τομάς, ὥστε εἶναι αὐτῶν συζυγεῖς διαμέτρους τὰς εὐθείας, καὶ τὴν τῶν δύο ἀντικειμένων διάμετρον τὸ τῶν ἑτέρων ἀντικειμένων δύνασθαι εἶδος.

ΕΣΤΩΣΑΝ αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι, δίχα τέμνουσαι ἀλλήλας, αἱ Α Γ, Δ Ε· δεῖ δὴ περὶ ἑκατέραν αὐτῶν διάμετρον γράψαι ἀντικειμένας, ἵνα ὦσιν αἱ Α Γ, Δ Ε συζυγεῖς ἐν αὐταῖς, καὶ ἡ μὲν Δ Ε τὸ τῶν περὶ τὴν Α Γ εἶδος δύνηται, ἡ δὲ Α Γ τὸ τῶν περὶ τὴν Δ Ε.

Ἔστω τῷ ἀπὸ Δ Ε ἴσον τὸ ὑπὸ Α Γ Λ, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἔστω ἡ Α Γ τῇ Γ Λ, καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῶν Α Γ, Γ Λ, γεγράφθωσαν

φθωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΖΑΗ, ΘΓΚ, ὧν διάμετρος μὲν ἔστω πλαγία ἡ ΓΑ, ὀρθία δὲ ἡ ΓΑ, αἱ δὲ κατηγμέναι ἀπὸ τῶν τομῶν ἐπὶ τὴν ΓΑ καταχθήσονται ἐν τῇ γωνίᾳ τῇ δοθείσῃ τῇ ὑπὸ τῶν ΔΒΓ· ἔσται δὴ ἡ ΔΕ δευτέρα διάμετρος τῶν ἀντικειμένων, μέση τε γὰρ λόγον ἔχει τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν, καὶ παρὰ τεταγμένως κατηγμένη οὖσα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Β. ἔστω δὴ πάλιν τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΔΡ, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἔστω ἡ ΔΡ τῇ ΔΕ, καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κειμένων τῶν ΕΔ, ΔΡ, γεγράφθωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΜΔΝ, ΟΕΞ, ὧν διάμετρος μὲν πλαγία ἡ ΔΕ, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΔΡ, αἱ δὲ κατηγμέναι ἀπὸ τῶν τομῶν καταχθήσονται ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ· ἔσται δὴ καὶ τῶν ΜΔΝ, ΞΕΟ δευτέρα διάμετρος ἡ ΑΓ, ὥστε ἡ μὲν ΑΓ τὰς τῇ ΔΕ παραλλήλους μεταξὺ τῶν ΖΑΗ, ΘΓΚ τομῶν δίχα τέμνει, ἡ δὲ ΔΕ τὰς τῇ ΑΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. καλείσθωσαν δὲ αἱ τοιαῦται τομαὶ Συζυγεῖς.

tur [per praeced.] oppoſitæ ſectiones ΖΑΗ, ΘΓΚ, quarum diameter tranſverſa ſit ΓΑ, & rectum latus ΓΑ, ductæ autem à ſectionibus ad ΓΑ in dato angulo ΔΒΓ applicentur: erit [ex def. 2ᵈᵃ diam.] ipſa ΔΕ ſecunda diameter oppoſitarum ſectionum, quia eſt media proportionalis inter latera figuræ, & ordinatim applicatæ parallela eſt, & ad Β bifariam ſecatur. Sit rurſus [ope 11.6.] quadrato ex ΑΓ æquale rectangulum ΕΔ,ΔΡ; & ſit ΔΡ ad rectos angulos ipſi ΔΕ: itaque datis duabus rectis ad rectos inter ſe angulos, ΕΔ,ΔΡ, ſectiones oppoſitæ ΜΔΝ, ΟΕΞ [per 55. huj.] deſcribantur, quarum tranſverſa diameter ΔΕ & ΔΡ rectum figuræ latus; ductæ vero à ſectionibus applicentur ad ΔΕ in dato angulo: recta igitur ΑΓ ſecunda diameter erit ſectionum ΜΔΝ, ΞΕΟ; ergo ΑΓ parallelas ipſi ΔΕ, inter ſectiones ΖΑΗ, ΘΓΚ ductas, bifariam ſecat; ΔΕ vero parallelas ipſi ΑΓ: quod erat faciendum. vocentur autem hujuſmodi ſectiones CONJUGATÆ.



EUTOCIUS.

Ἐγράφη ἡμῖν, ἐν τοῖς μετὰ τὸ ι΄ θεώρημα σχολίοις, ὁ σκοπὸς τῶν ιγ΄ πρώτων θεωρημάτων· καὶ ἐν τοῖς εἰς τὸ ἑκκαιδέκατον, ὁ τῶν ἑξῆς τριῶν. δεῖ δὲ εἰδέναι ὅτι ἐν μὲν τῷ ιζ΄ φησίν, ὅτι ἡ διὰ τῆς κορυφῆς παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη ἐκτὸς πίπτει· ἐν δὲ τῷ ιη΄ φησίν, ὅτι ἡ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγομένη τεμεῖ τὴν τομήν· ἐν τῷ ιθ΄ ὅτι ἡ ἀπό τινος σημείου διὰ τῆς διαμέτρου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη συμπίπτει τῇ τομῇ· ἐν τῷ κ΄ καὶ κα΄ τὰς παρὰ τεταγμένως κατηγμένας ζητεῖ τῶν τομῶν, ὅπως ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας, καὶ τὰ τῆς διαμέτρου ὑπ᾽ αὐτῶν γινόμενα τμήματα· ἐν τῷ κβ΄ καὶ κγ΄ λέγει περὶ τῆς εὐθείας τῆς κατὰ δύο σημεῖα τῇ τομῇ συμπιπτούσης· ἐν τῷ κδ΄ καὶ κε΄ περὶ τῆς εὐθείας καθ᾽ ἓν τῇ τομῇ συμπιπτούσης, τουτέστιν ἐφαπτομένης· ἐν τῷ κς΄ περὶ τῆς ἀγομένης παραλλήλου τῇ διαμέτρῳ τῆς παραβολῆς καὶ τῆς ὑπερβολῆς· ἐν τῷ κζ΄ περὶ τῆς τεμνούσης τὴν διάμετρον τῆς παραβολῆς, ὅτι καθ᾽ ἑκάτερα μέρη συμπίπτει τῇ τομῇ· ἐν τῷ κη΄ περὶ τῆς ἀγομένης παραλλήλου τῇ ἐφαπτομένῃ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων· ἐν τῷ κθ΄ περὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῶν ἀντικειμένων ἐκβαλλομένης· ἐν τῷ λ΄ φησίν, ὅτι διχοτομεῖται ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἐκβαλλομένη τῆς ἐλλείψεως καὶ τῶν ἀντικειμένων· ἐν τῷ λα΄ φησίν, ὅτι ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἡ ἐφαπτομένη τὴν διάμετρον τέμνει μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ κέντρου· ἐν τῷ λβ΄ καὶ γ΄ καὶ δ΄ καὶ ε΄ καὶ ς΄ περὶ τῶν ἐφαπτομένων ποιεῖται τὸν λόγον· ἐν τῷ λζ΄ περὶ τῶν ἐφαπτομένων, καὶ τῶν ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένων τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς ὑπερβολῆς· ἐν τῷ λη΄ περὶ τῶν ἐφαπτομένων τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως, ὅπως ἔχουσι πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον· ἐν τῷ λθ΄ καὶ μ΄ περὶ τῶν αὐτῶν ποιεῖται τὸν λόγον, τοὺς συγκειμένους ἐκ τούτων λόγους ἐπιζητῶν· ἐν τῷ μα΄ περὶ τῶν ἀναγραφομένων παραλληλογράμμων ἀπὸ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλ-

Scripſimus, in commentariis poſt decimum theorema, quodnam fuerit propoſitum *Apollonio* in primis tredecim theorematibus; & in commentariis in ſextum decimum de tribus ſequentibus dictum eſt. Scire vero oportet quod in ſeptimo decimo aſſerit rectam, quæ per verticem ducitur ordinatim applicatæ parallela, extra ſectionem cadere: in decimo octavo rectam, quæ utcunque contingenti parallela intra ſectionem ducitur, ipſam ſecare: in decimo nono rectam, quæ ducitur ab aliquo puncto diametri ordinatim applicatæ parallela, cum ſectione convenire: in vigeſimo & vigeſimo primo rectas in ſectionibus ordinatim applicatas inquirit, quomodo inter ſeſe habeant, itemque diametri portiones quæ ab ipſis fiunt: in vigeſimo ſecundo & vigeſimo tertio tractat de recta quæ in duobus punctis ſectioni occurrit: in vigeſimo quarto & vigeſimo quinto de ea quæ ipſi occurrit in uno puncto tantum, hoc eſt de recta quæ ſectionem contingit: in vigeſimo ſexto de ea quæ diametro parabolæ & hyperbolæ parallela ducitur: in vigeſimo ſeptimo de recta ſecante parabolæ diametrum, nempe quod ex utraque parte ſectioni occurrat: in vigeſimo octavo de ea quæ parallela ducitur contingenti unam oppoſitarum ſectionum: in vigeſimo nono de ea quæ per centrum oppoſitarum tranſiens producitur: in trigeſimo dicit, quod recta quæ tranſit per centrum ellipſeos & oppoſitarum ſectionum bifariam dividitur: in trigeſimo primo quod ea recta, quæ hyperbolam contingit, diametrum ſecat inter centrum & verticem ſectionis: in 32. 33 34 35. 36. de proprietatibus rectarum contingentium agitur: in trigeſimo ſeptimo de contingentibus & de iis quæ à tactu applicantur in hyperbola & ellipſi: in trigeſimo octavo de contingentibus hyperbolam & ellipſim, quo modo ſe habeant ad ſecundam diametrum: in trigeſimo nono & quadrageſimo de iiſdem agit, rationes ex hiſce compoſitas inquirens: in quadrageſimo primo de parallelogrammis deſcriptis ab applicata & ab ea quæ ex centro hyperbolæ

&

&c ellipſeos: in quadrageſimo ſecundo aſſerit triangulum in parabola ex contingente & applicata factum æquale eſſe parallelogrammo, quod cum eo æqualem altitudinem habet & in dimidia baſi conſtituitur: in quadrageſimo tertio inquirit, in hyperbola & ellipſi, quomodo ſe habeant inter ſe triangula quæ à contingentibus & applicatis fiunt: in quadrageſimo quarto idem inquirit in oppoſitis ſectionibus: in quadrageſimo quinto idem in ſecunda diametro hyperbolæ & ellipſeos: in quadrageſimo ſexto de aliis parabolæ diametris quæ ſunt poſt diametrum principalem: in quadrageſimo ſeptimo de aliis diametris hyperbolæ & ellipſeos: in quadrageſimo octavo de aliis diametris oppoſitarum ſectionum: in quadrageſimo nono de rectis juxta quas poſſunt applicatæ ad alias parabolæ diametros: in quinquageſimo de iiſdem in hyperbola & ellipſi: in quinquageſimo primo de iiſdem in oppoſitis ſectionibus. itaque his præmiſſis ſubjungit, ad inſtar epilogi cujuſdam, in quinquageſimo ſecundo problema, quo oſtendit quomodo parabola in plano deſcribatur: in quinquageſimo tertio, quomodo deſcribatur hyperbola: in quinquageſimo quarto, quomodo ellipſis: in quinquageſimo quinto, quomodo oppoſitæ ſectiones: in quinquageſimo ſexto de conjugatis ſectionibus agit.

ἐλλείψεως· ἐν τῷ μβʹ. ἐπὶ τῆς παραβολῆς λέγει ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς κατηγμένης καταλαμβανόμενον τρίγωνον τῷ ἰσοϋψεῖ αὐτῷ παραλληλογράμμῳ ἡμίσειαν ἔχοντι βάσιν· ἐν τῷ μγʹ. ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως ζητεῖ πῶς ἔχουσι πρὸς ἄλληλα τὰ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῶν κατηγμένων ἀπολαμβανόμενα τρίγωνα· ἐν τῷ μδʹ. τὸ αὐτὸ ἐν ταῖς ἀντικειμέναις· ἐν τῷ μεʹ τὸ αὐτὸ ἐπὶ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως· ἐν τῷ μςʹ. περὶ τῶν μετὰ τὴν ἀρχικὴν διαμέτρων τῆς παραβολῆς ἑτέρων· ἐν τῷ μζʹ. περὶ τῶν ἑτέρων διαμέτρων τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως· ἐν τῷ μηʹ. περὶ τῶν ἑτέρων διαμέτρων τῶν ἀντικειμένων· ἐν τῷ μθʹ. περὶ τῶν παρ' ἃς δύνανται αἱ κατηγμέναι ἐπὶ τὰς ἑτέρας διαμέτρους τῆς παραβολῆς· ἐν τῷ νʹ. περὶ τῶν αὐτῶν τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως· ἐν τῷ ναʹ. περὶ τῶν αὐτῶν τῶν ἀντικειμένων. ταῦτα εἰπὼν καὶ προσθεὶς τοῖς εἰρημένοις ἐπίλογόν τινα, ἐν τῷ νβʹ. δεικνύει πρόβλημα, πῶς δυνατὸν ἐν ἐπιπέδῳ γράψαι τὴν παραβολήν· ἐν τῷ νγʹ. λέγει πῶς δεῖ γράψαι τὴν ὑπερβολήν· ἐν τῷ νδʹ. πῶς δεῖ γράψαι τὴν ἔλλειψιν· ἐν τῷ νεʹ. λέγει πῶς δεῖ γράψαι ἀντικειμένας· ἐν τῷ νςʹ. περὶ τῶν συζυγῶν ἀντικειμένων.

ΠΑΠ-

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΛΗΜΜΑΤΑ
ΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA
IN SECUNDUM LIBRUM CONICORUM
APOLLONII PERGÆI.

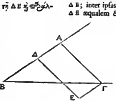
ΛΗΜΜΑ α'.

Δύο δοθεισῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ εὐθείας τῆς ΔΕ· εἰς τὰς ΑΒ, ΒΓ ἐναρμόσαι εὐθεῖαν ἴσην τῇ ΔΕ καὶ παράλληλον αὐτῇ.

LEMMA I.

Datis duabus rectis lineis ΑΒ, ΒΓ, & data recta ΔΕ; inter ipſas ΑΒ, ΒΓ coaptare rectam ipſi ΔΕ æqualem & parallelam.

Τοῦτο δὲ φανερόν. ἐὰν γὰρ διὰ τοῦ Ε τῇ ΑΒ παράλληλον ἀγάγωμεν τὴν ΕΓ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΔΕ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΓΑ· ἔσται, διὰ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ ΑΓΕΔ, ἡ ΑΓ ἴση τῇ ΔΕ καὶ παράλληλος, καὶ ἐνήρμοσται εἰς τὰς δοθείσας εὐθείας τὰς ΑΒ, ΒΓ.



HOC autem manifeſtum eſt. nam ſi per Ε ducatur ΕΓ parallela ΑΒ, & per Γ ipſi ΔΕ parallela ΓΑ; erit, propter ΑΓΕΔ parallelogrammum, [per 34. 1.] ΑΓ ipſi ΔΕ æqualis & parallela, & inter datas rectas ΑΒ, ΒΓ coaptata eſt.

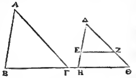
ΛΗΜΜΑ β'.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, καὶ παράλληλος ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ· ὅτι καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἐστὶ παράλληλος.

LEMMA II.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ; ſitque ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, & ΑΒ quidem ſit parallela ΔΕ, ΒΓ vero ipſi ΕΖ: dico & ΑΓ ipſi ΔΖ parallelam eſſe.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ καὶ συμπιπτέτω ταῖς ΔΕ, ΔΖ κατὰ τὰ Η, Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΖ, καί εἰσιν ἴσαι αἱ Β, Ε γωνίαι, διὰ τὸ τὰς δύο παρὰ δύο· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, τουτέστι τῇ Θ, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΕΖ, ΗΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΘ.



PRoducatur ΒΓ; & conveniat cum ΔΕ, ΔΖ in punctis Η, Θ. itaque quoniam eſt ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, & anguli ad Β, Ε æquales, quia duæ rectæ ſunt duabus parallelæ; erit [per 6.6.] angulus Γ æqualis angulo Ζ, hoc eſt angulo Θ, propter parallelas ΕΖ, ΗΘ: ergo ΑΓ ipſi ΔΘ eſt parallela.

ΛΗΜΜΑ γ'.

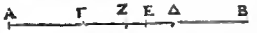
Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ μεταξὺ τῶν Γ, Δ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ.

LEMMA III.

Sit recta ΑΒ, ſintque æquales ΑΓ, ΔΒ, & inter Γ & Δ ſumatur quodvis punctum Ε: dico rectangulum ΑΔΒ una cum rectangulo ΓΕΔ æquale eſſe rectangulo ΑΕΒ.

Digitized by Google

Secetur enim recta ΓΔ bifariam in puncto Ζ, quomodocunque ſe habuerit punctum Ε, & quoniam [per 5. 2.] rectangulum ΑΔΒ una cum quadrato ex ΖΔ æquale eſt quadrato ex ΖΒ; ſed quadrato quidem ex ΖΔ rectangulum ΓΕΔ una cum quadrato ex ΖΕ eſt æquale, quadrato vero ex ΖΒ æquale rectangulum ΑΕΒ una cum quadrato ex ΖΕ: erit igitur rectangulum ΑΔΒ una cum rectangulo ΓΕΔ & quadrato ex ΖΕ æquale rectangulo ΑΕΒ & quadrato ex ΖΕ. commune auferatur quadratum ex ΖΕ: reliquum igitur ΑΔΒ rectangulum una cum rectangulo ΓΕΔ æquale eſt rectangulo ΑΕΒ.



Τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα, ὅπως ἂν ἔχῃ τὸ πρὸς τὸ Ε σημεῖον, κατὰ τὸ Ζ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΒ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΓΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΕ, τῷ δὲ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΕΔ καὶ τοῦ ἀπὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΑΕΒ καὶ τῷ ἀπὸ ΖΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔΒ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΒ.

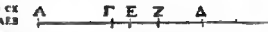
LEMMA IV.

Sit recta ΑΒ, & æquales ſint ΑΓ, ΔΒ, & inter Γ, Δ ſumatur quodvis punctum Ε: dico rectangulum ΑΕΒ æquale eſſe rectangulo ΓΕΔ una cum rectangulo ΔΑΓ.

ΛΗΜΜΑ δ΄.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ μεταξὺ τῶν ΓΔ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΓΕΔ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΑΓ.

Secetur enim recta ΓΔ bifariam in puncto Ζ, quomodocunque ſe habuerit punctum Ε: quare tota ΑΖ ipſi ΖΒ eſt æqualis: rectangulum igitur ΑΕΒ una cum quadrato ex ΕΖ æquale eſt [per 5. 2.] quadrato ex ΑΖ: rectangulum autem ΑΕΒ cum quadrato ex ΕΖ æquale eſt rectangulo ΔΑΓ una cum quadrato ex ΓΖ. ſed & quadratum ex ΓΖ eſt æquale rectangulo ΓΕΔ una cum quadrato ex ΕΖ. auferatur commune quadratum ex ΕΖ; erit igitur reliquum rectangulum ΑΕΒ æquale rectangulo ΓΕΔ una cum rectangulo ΔΑΓ.



Τετμήσθω γὰρ ἡ ΓΔ δίχα, ὅπως ἂν ἔχῃ τὸ πρὸς τὸ Ε σημεῖον, κατὰ τὸ Ζ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ ἴση ἐστίν. τὸ μὲν ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΖ· ὥστε τὸ ὑπὸ ΑΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΑΓ καὶ τῷ ἀπὸ ΓΖ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΓΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΓΕΔ καὶ τῷ ἀπὸ ΕΖ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΕΖ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΔΕΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΑΓ.

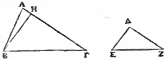
LEMMA V.

Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ; & ſit angulus quidem Γ æqualis angulo Ζ, angulus vero Β angulo Ε major: dico ΒΓ ad ΓΑ minorem rationem habere quam ΕΖ ad ΖΔ.

ΛΗΜΜΑ ε΄.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν Γ τῇ Ζ, μείζων δὲ ἡ Β τῆς Ε· ὅτι ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ.

Conſtituatur enim angulus ΓΒΗ æqualis angulo Ε, & eſt angulus Γ angulo Ζ æqualis: ergo [per 4. 6] ut ΒΓ ad ΓΗ ita ΕΖ ad ΖΔ. ſed [per 8. 5] ΒΓ ad ΓΑ minorem habet rationem quam ΒΓ ad ΓΗ: igitur ΒΓ ad ΓΑ minorem rationem habet quam ΕΖ ad ΖΔ.



Συνεστάτω τῇ Ε γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΒΗ. ἔστι δὲ καὶ ἡ Γ τῇ Ζ ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΗ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ. ἀλλὰ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς ΓΗ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς ΓΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ.

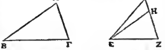
LEMMA VI.

Habeat rurſus ΒΓ ad ΓΑ majorem rationem quam ΕΖ ad ΖΔ, & ſit angulus Γ æqualis angulo Ζ: dico angulum Β angulo Ε minorem eſſe.

ΛΗΜΜΑ ϛ΄.

Ἐχέτω δὴ πάλιν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ μείζονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ, ἴση δὲ ἔστω ἡ Γ γωνία τῇ Ζ· ὅτι πάλιν γίνεται ἐλάσσων ἡ Β γωνία τῆς Ε γωνίας.

Quoniam enim ΒΓ ad ΓΑ majorem rationem habet quam ΕΖ ad ΖΔ; ſi igitur fiat ut ΒΓ ad ΓΑ ita ΕΖ ad aliam quandam; erit ea [per 10. 5.] minor quam ΖΔ. ſit ea recta ΖΗ, & ΕΗ jungatur. cumque circa æquales angulos latera proportionalia ſint, erit angulus ad Β [per 6. 6.] æqualis angulo ΖΕΗ, qui angulo ΖΕΔ minor eſt.



Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ, ἐὰν ἄρα ποιῶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τινα ἄλλην, ἔσται πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΖΔ. ἔστω πρὸς τὴν ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ, ἐλάσσων ἄρα τῆς ΖΕΔ. ὃ. ἔ. δ.

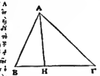
ΛΗΜ-

Digitized by Google

ΛΗΜΜΑ ζʹ.

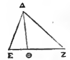
Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ οὕτως, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ· ὅτι γίνεται ὅμοιον καὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ τριγώνῳ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ, ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ λόγος συνῆπται ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ καὶ τοῦ τῆς ΗΓ πρὸς ΓΑ· ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΒΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ συνῆπται ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΔ καὶ τοῦ τῆς ΖΘ πρὸς ΖΔ, ὧν ὁ τῆς ΒΓ πρὸς ΓΑ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΔ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων· λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς ΗΓ πρὸς ΓΑ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΔ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ τριγώνῳ. ὃ. ἔ. δ.



LEMMA VII.

Sint triangula ſimilia ΑΒΓ, ΔΒΖ; & ita ducantur ΑΗ, ΔΘ, ut ſit rectangulum ΒΓΗ ad quadratum ex ΓΑ ſicut rectangulum ΒΖΘ ad quadratum ex ΖΔ: dico & triangulum ΑΗΓ triangulo ΔΘΖ ſimile eſſe.

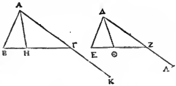


QUoniam enim [ex hyp.] eſt ut rectangulum ΒΓΗ ad quadratum ex ΓΑ ita rectangulum ΕΖΘ ad quadratum ex ΖΔ; ſed [per 23. 6.] ratio quidem rectanguli ΒΓΗ ad quadratum ex ΓΑ compoſita eſt ex ratione quam habet ΒΓ ad ΓΑ & ratione ΗΓ ad ΓΑ; ratio autem rectanguli ΒΖΘ ad quadratum ex ΖΔ componitur ex ratione ΕΖ ad ΖΔ & ratione ΘΖ ad ΖΔ; quarum quidem ratio ΒΓ ad ΓΑ eadem eſt quæ ΕΖ ad ΖΔ, ob ſimilitudinem triangulorum: erit igitur reliqua ratio ΗΓ ad ΓΑ eadem quæ ipſius ΘΖ ad ΖΔ. & [ex hyp.] ſunt circa æquales angulos: ergo [per 6. 6.] triangulum ΑΗΓ triangulo ΔΘΖ ſimile erit.

ΛΗΜΜΑ ηʹ.

Διὰ μὲν οὖν τοῦ συνημμένου λόγου, ὡς προείρηται. ἔστω δὲ νῦν ἀποδεῖξαι μὴ προσχρησάμενον τῷ συνημμένῳ λόγῳ.

Κείσθω τῷ μὲν ὑπὸ ΒΓΗ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΓΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΚ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ. τῷ δὲ ὑπὸ ΒΖΘ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ΔΖΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΖ πρὸς ΖΑ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ. ὑπόκειται δὲ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΓΚ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΓ πρὸς ΓΑ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΔΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΑΖ πρὸς ΖΔ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΖΔ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ οὕτως ἐδείχθη ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΖ πρὸς ΖΑ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΓ πρὸς ΓΗ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓΗ τρίγωνον τῷ ΔΖΘ τριγώνῳ. ὁμοίως καὶ τὸ ΑΗΒ τῷ ΔΘΕ· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΕΖ. ὃ. ἔ. δ.



LEMMA VIII.

Hoc igitur per rationem compoſitam, eo quem diximus modo, demonſtratur. ſed jam liceat idem aliter demonſtrare abſque compoſita ratione.

POnatur enim rectangulo ΒΓΗ æquale rectangulum ΑΓΚ; ergo [per 16. 6.] ut ΒΓ ad ΓΚ ita ΑΓ ad ΓΗ. ipſi vero rectangulo ΒΖΘ æquale ponatur rectangulum ΔΖΑ: erit igitur ut ΒΖ ad ΖΑ ita ΔΖ ad ΖΘ. ſed poſitum eſt ut rectangulum ΒΓΗ, hoc eſt rectangulum ΑΓΚ, ad quadratum ex ΑΓ, hoc eſt [per 1. 6.] ut ΚΓ ad ΓΑ ita rectangulum ΒΒΘ, hoc eſt ipſum ΔΖΑ ad quadratum ex ΔΖ, videlicet ut ΑΖ ad ΖΔ. ut autem ΒΓ ad ΓΑ ita ΕΖ ad ΒΔ, ob ſimilitudinem triangulorum: ergo [per 22. 5.] ut ΒΓ ad ΓΚ ita ΒΖ ad ΖΑ. ſed ut ΒΓ ad ΓΚ ita oſtenſo eſt ΑΓ ad ΓΗ; itemque ut ΒΖ ad ΖΑ ita ΑΖ ad ΖΘ: ut igitur ΑΓ ad ΓΗ ita erit ΔΖ ad ΒΘ. & ſunt circa æquales angulos: triangulum igitur ΑΓΗ [per 6. 6.] ſimile eſt triangulo ΔΖΘ. & eadem ratione triangulum ΑΗΒ ſimile eſt triangulo ΔΘΕ, ſicut triangulum ΑΒΓ ipſi ΔΕΖ ſimile eſt.

ΛΗΜΜΑ θʹ.

Ἔστω ὅμοιον τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΗΒ τῷ ΔΕΘ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ.

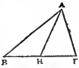
Ἐπεὶ γάρ, διὰ τὴν ὁμοιότητα, ἴση ἐστὶν ὅλη μὲν ἡ Α ὅλῃ τῇ Δ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΒΔΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΘΔΖ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ καὶ ἡ Γ

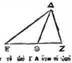
LEMMA IX.

Sit triangulum quidem ΑΒΓ ſimile triangulo ΔΒΖ, uti & triangulum ΑΗΒ triangulo ΔΒΘ ſimile: dico ut rectangulum ΒΓΗ ad quadratum ex ΓΑ ita eſſe rectangulum ΕΖΘ ad quadratum ex ΖΔ.

QUoniam enim, propter ſimilitudinem triangulorum, totus angulus Α toti Α eſt æqualis; angulus autem ΒΑΗ æqualis eſt angulo ΒΔΘ: erit igitur reliquus ΗΑΓ reliquo ΘΔΒ æqualis. ſed & angulus

gulus Γ eſt æqualis angulo Β: eſt igitur [per 4. 6.] ut Η Γ ad Γ Δ ita Θ Ζ ad Ε Δ. ut autem Β Γ ad Γ Δ ita Ε Ζ ad Ζ Δ: ergo & compoſita ratio compoſitæ rationi eadem erit: ut igitur rectangulum Β Γ Η eſt ad quadratum ex Γ Δ ita rectangulum Ε Ζ Θ ad quadratum ex Ζ Δ.

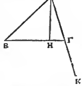


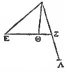


τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Η Γ πρὸς τὴν Γ Α οὕτως ἡ Θ Ζ πρὸς τὴν Ζ Δ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ Β Γ πρὸς τὴν Γ Α οὕτως ἡ Ε Ζ πρὸς Ζ Δ· καὶ ὁ συγκείμενος ἄρα τῷ συγκειμένῳ ἐστὶν ὁ αὐτός· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ Β Γ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Α οὕτω τὸ ὑπὸ Ε Ζ Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Δ.

Aliter abſque ratione compoſita.

POnatur rectangulo Β Γ Η æquale rectangulum Α Γ Κ, & rectangulo Ε Ζ Θ æquale rectangulum Δ Ζ Λ; erit rurſus ut Β Γ ad Γ Κ ita Α Γ ad Γ Η: ut autem Ε Ζ ad Ζ Λ ita Δ Ζ ad Ζ Θ: &, eadem ratione qua ſupra, demonſtrabimus ut Α Γ ad Γ Η ita eſſe Δ Ζ ad Ζ Θ: ergo ut Β Γ ad Γ Κ ita Ε Ζ ad Ζ Λ. ſed & ut Β Γ ad Γ Α ita Ε Ζ ad Ζ Δ, ob triangulorum ſimilitudinem: ex æquali igitur [per 22.5] ut Κ Γ ad Γ Α, hoc eſt [per 1.6] ut rectangulum Κ Γ Α ſive rectangulum Β Γ Η ad quadratum ex Γ Α ita Λ Ζ ad Ζ Δ, hoc eſt rectangulum Λ Ζ Δ ſive rectangulum Ε Ζ Θ, ad quadratum ex Ζ Δ.





Ἄλλως μὴ διὰ τοῦ συγκειμένου.

ΚΕίσθω τῷ μὲν ὑπὸ Β Γ Η ἴσον τὸ ὑπὸ Α Γ Κ, τῷ δὲ ὑπὸ Ε Ζ Θ ἴσον τὸ ὑπὸ Δ Ζ Λ· ἔσται πάλιν ὡς μὲν ἡ Β Γ πρὸς Γ Κ οὕτως ἡ Α Γ πρὸς Γ Η. ὡς δὲ ἡ Ε Ζ πρὸς Ζ Λ οὕτως ἡ Δ Ζ πρὸς Ζ Θ· καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ τῷ ἐπάνω δείξομεν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α Γ πρὸς Γ Η οὕτως ἡ Δ Ζ πρὸς Ζ Θ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Β Γ πρὸς Γ Κ οὕτως ἡ Ε Ζ πρὸς Ζ Λ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ Β Γ πρὸς Γ Α οὕτως ἡ Ε Ζ πρὸς Ζ Δ, διὰ τὴν ὁμοιότητα· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς Κ Γ πρὸς Γ Α, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ Κ Γ Α, ὅ ἐστι τὸ ὑπὸ Β Γ Η, πρὸς τὸ ἀπὸ Α Γ οὕτως ἡ Λ Ζ πρὸς Ζ Δ, τουτέστι τὸ ὑπὸ Λ Ζ Δ, ὅ ἐστι τὸ ὑπὸ Ε Ζ Θ, πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Δ.

LEMMA X.

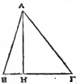
Similiter demonſtrabimus, ſi fuerit ut rectangulum Β Γ Η ad quadratum ex Α Γ ita rectangulum Ε Ζ Θ ad quadratum ex Ζ Δ, & triangulum Α Β Γ ſimile triangulo Δ Ε Ζ: etiam triangulum Α Β Η triangulo Δ Ε Θ ſimile eſſe.

ΛΗΜΜΑ ι'.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ἐὰν ᾖ ὡς τὸ ὑπὸ Β Γ Η πρὸς τὸ ἀπὸ Α Γ οὕτω τὸ ὑπὸ Ε Ζ Θ πρὸς τὸ ἀπὸ Ζ Δ, καὶ ὅμοιον τὸ Α Β Γ τρίγωνον τῷ Δ Ε Ζ τριγώνῳ· καὶ τὸ Α Β Η τρίγωνον τῷ Δ Ε Θ τριγώνῳ ὅμοιον εἶναι.

LEMMA XI.

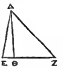
Sint duo triangula ſimilia Α Β Γ, Δ Ε Ζ, & ducantur perpendiculares Α Η, Δ Θ: dico ut rectangulum Β Η Γ ad quadratum ex Α Η ita eſſe rectangulum Ε Θ Ζ ad quadratum ex Δ Θ.



HOC autem ex iis, quæ ſupra [ad lem 8.] dicta ſunt, perſpicue conſtat.

ΛΗΜΜΑ ια'.

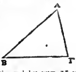
Ἔστω δύο ὅμοια τρίγωνα τὰ Α Β Γ, Δ Ε Ζ, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ Α Η, Δ Θ· ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ Β Η Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Α Η οὕτω τὸ ὑπὸ Ε Θ Ζ πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Θ.



ΤΟΥΤΟ δὲ φανερόν, ὅτι ὅμοιον γίνεται τοῖς πρὸ αὐτοῦ.

LEMMA XII.

Sit æqualis quidem angulus Β angulo Ε, angulus vero Α angulo Δ minor: dico Γ Β ad Β Α minorem rationem habere quam Ζ Ε ad Ε Δ.



QUoniam enim angulus Α minor eſt angulo Δ, conſtituatur ipſi Α æqualis Ε Δ Η: eſt igitur [per 4. 6.] ut Γ Β ad Β Α ita Η Ε ad Ε Δ. ſed [per 8.5.] Η Ε ad Ε Δ minorem habet rationem quam Ζ Ε ad Ε Δ. ergo & Γ Β ad Β Α minorem rationem habet quam Ζ Ε ad Ε Δ. ſimiliter & omnia alia ejuſmodi oſtendemus

ΛΗΜΜΑ ιβ'.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν Β γωνία τῇ Ε, ἐλάσσων δὲ ἡ Α τῆς Δ· ὅτι ἡ Γ Β πρὸς Β Α ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ζ Ε πρὸς Ε Δ.



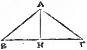
ΕΠΕΙ γὰρ ἐλάσσων ἡ Α γωνία τῆς Δ, συνεστάτω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ Ε Δ Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Γ Β πρὸς Β Α οὕτως ἡ Η Ε πρὸς Ε Δ. ἀλλὰ καὶ ἡ Η Ε πρὸς Ε Δ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Ζ Β πρὸς Β Δ· καὶ ἡ Γ Β ἄρα πρὸς Β Α ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ Ζ Β πρὸς τὴν Ε Δ. καὶ πάντα τὰ τοιαῦτα τῆς αὐτῆς ἀγωγῆς δείξομεν.

LEM-

ΛΗΜΜΑ ιγʹ.

Ἔστω ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ· καὶ ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΗΓ ἔστω ἴση, ἡ δὲ ΓΗ πρὸς ΗΑ ἐλάσσονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς ΘΔ. ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΖΘ τῆς ΘΕ.

ΕΠΕΙ γὰρ τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΑ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ ΓΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΗΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ οὕτως ὑπόκειται τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ· καὶ τὸ ὑπὸ ΕΘΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΖΘ τοῦ ὑπὸ ΕΘΖ. ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ΖΘ τῆς ΘΕ. ὅ. ἔ. δ.



LEMMA XIII.

Sit ut rectangulum ΒΗΓ ad quadratum ex ΑΗ ita rectangulum ΕΘΖ ad quadratum ex ΔΘ, & ſit ΒΗ quidem æqualis ΗΓ; ΓΗ vero ad ΗΑ minorem rationem habeat quam ΖΘ ad ΘΔ: dico ΖΘ majorem eſſe quam ΘΕ.

Quoniam enim quadratum ex ΓΗ ad quadratum ex ΗΑ minorem rationem habet quam quadratum ex ΖΘ ad quadratum ex ΘΔ; quadratum autem ex ΓΗ æquale eſt rectangulo ΒΗΓ; habebit ΒΗΓ rectangulum ad quadratum ex ΑΗ minorem rationem quam quadratum ex ΖΘ ad quadratum ex ΘΔ. ſed ut ΒΗΓ rectangulum ad quadratum ex ΑΗ ita poſitum eſt rectangulum ΖΘΖ ad quadratum ex ΘΔ: ergo rectangulum ΕΘΖ ad quadratum ex ΘΔ minorem rationem habet quam quadratum ex ΖΘ ad quadratum ex ΘΔ: majus igitur eſt [per 8. 5.] quadratum ex ΖΘ rectangulo ΖΘΖ; quare & ΖΘ major erit quam ΘΕ.



ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ
ΚΩΝΙΚΩΝ
ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟΝ,
ΜΕΤΑ ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑΤΩΝ.

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBER SECUNDUS,
CUM COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITÆ.

Apollonius Eudemo S. P.

SI vales bene eſt, ego quidem ſatis commode habeo. *Apollonio* filio meo dedi, ut ad te perferret, ſecundum librum Conicorum à nobis conſcriptorum: quem tu diligenter percurre, & communica cum illis, qui eo tibi digni videbuntur. *Philonidæ* etiam Geometræ, quo cum tibi *Epheſi* amicitiam conciliavi, ſi quando in iſthæc *Pergami* loca venerit, legendum trade: tu cura ut valeas. Vale.

Ἀπολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν.

ΕΙ ὑγιαίνεις ἔχοι ἂν καλῶς, καὶ αὐτὸς δὲ μετρίως ἔχω. Ἀπολλώνιον τὸν υἱόν μου πέπομφα πρός σε κομίζοντα τὸ δεύτερον βιβλίον τῶν συντεταγμένων ἡμῖν κωνικῶν. Διέλθε οὖν αὐτὸ ἐπιμελῶς, καὶ τοῖς ἀξίοις τῶν τοιούτων κοινωνεῖν μεταδίδου, καὶ Φιλωνίδης δὲ ὁ γεωμέτρης, ὃν καὶ συνέστησά σοι ἐν Ἐφέσῳ, ἐάν ποτε ἐπιβάλλῃ εἰς τοὺς κατὰ Πέργαμον τόπους, μετάδος αὐτῷ· καὶ σεαυτοῦ ἐπιμελοῦ ἵνα ὑγιαίνῃς. εὐτύχει.

PROP. I. *Theor.*

Si hyperbolam recta linea ad verticem contingat, & ab ipſo, ex utraque parte diametri, ponatur recta æqualis ei quæ poteſt quartam figuræ partem: rectæ quæ à ſectionis centro ad ſumptos terminos contingentis ducuntur cum ſectione non convenient.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

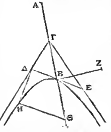
Ἐὰν ὑπερβολῆς κατὰ κορυφὴν εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ ἀπ' αὐτῆς ἐφ' ἑκάτερα τῆς διαμέτρου ἀποληφθῇ ἴση τῇ δυναμένῃ τὸ τέταρτον τοῦ εἴδους· αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ληφθέντα πέρατα τῆς ἐφαπτομένης ἀγόμεναι εὐθεῖαι οὐ συμπεσοῦνται τῇ τομῇ.

ΕΣΤΩ

Digitized by Google

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, ὀρθία δὲ ἡ ΒΖ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς κατὰ τὸ Β ἡ ΔΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒΖ εἴδους ἴσον ἔστω τὸ ἀφ' ἑκατέρας ΒΔ, ΒΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΓΔ, ΓΕ ἐκβεβλήσθωσαν· λέγω ὅτι οὐ συμπεσοῦνται τῇ τομῇ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμπιπτέτω ἡ ΓΔ τῇ τομῇ κατὰ τὸ Η, καὶ ἀπὸ τοῦ Η τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΔΒ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ΑΒ πρὸς ΒΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΖ, ἀλλὰ τοῦ μὲν ἀπὸ ΑΒ τέταρτον μέρος ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΓΒ, τοῦ δὲ ὑπὸ ΑΒΖ τέταρτον τὸ ἀπὸ ΒΔ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΘΒ τῷ ἀπὸ ΓΘ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ΓΔ συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἡ ΓΕ· ΑΣΥΜΠΤΩΤΟΙ ἄρα εἰσὶ τῇ τομῇ αἱ ΓΔ, ΓΕ.



SIT hyperbola, cujus diameter ΑΒ, centrum Γ, & rectum figuræ latus ΒΖ, recta vero ΔΒ ſectionem contingat in Β; & quartæ parti figuræ, quæ continetur ſub ΑΒΖ, æquale ſit quadratum utriuſque ipſarum ΔΒ, ΒΕ, & junctæ ΓΔ, ΓΕ producantur: dico eas cum ſectione non convenire.

Si enim fieri poteſt, conveniat ΓΔ cum ſectione in Η, & ab Η ordinatim applicetur ΘΗ: ergo [per 17. 1. huj.] ΗΘ parallela eſt ipſi ΔΒ. quoniam igitur ut ΑΒ ad ΒΖ ita [per 1. 6.] eſt quadratum ex ΑΒ ad rectangulum ΑΒΖ; quadratum autem ΓΒ quarta pars eſt quadrati ex ΑΒ, & quadratum ex ΒΔ itidem quarta pars rectanguli ΑΒΖ: erit [per 15. 5.] itaque ΑΒ ad ΒΖ ut quadratum ex ΓΒ ad quadratum ex ΒΔ, hoc eſt [per 4. 6.] quadratum ex ΓΘ ad quadratum ex ΘΗ. eſt vero [per 21. 1. huj.] ut ΑΒ ad ΒΖ ita rectangulum ΑΘΒ ad quadratum ex ΘΗ: igitur ut quadratum ex ΓΘ ad quadratum ex ΘΗ ita rectangulum ΑΘΒ ad quadratum ex ΘΗ: rectangulum igitur ΑΘΒ [per 9. 5.] quadrato ex ΓΘ æquale eſt; quod [per 6. 2.] eſt abſurdum: ergo ΓΔ cum ſectione non conveniet. ſimiliter demonſtrabitur neque ipſam ΓΒ convenire cum ſectione: ſunt igitur ΓΔ, ΓΒ ASYMPTOTI, hoc eſt, *cum ſectione non convenientes.*

EUTOCIUS.

Ἀρχόμενος τοῦ δευτέρου βιβλίου τῶν κωνικῶν, ὦ φίλτατέ μοι Ἀνθέμιε, τοσοῦτον εἶναί φημι δεῖν προειπεῖν, ὅτι τοσαῦτα μόνα εἰς αὐτὸ γράφω, ὅσα ἂν ἐκ δυνατὸν διὰ τῶν ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ νοηθῆναι. Τὸ πρῶτον θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει, εἰ γὰρ μὴ, τοῦτο ἐν τῇ καταγραφῇ διαφορὰν οὐ ποιεῖ· αἱ γὰρ ΔΓ, ΓΕ ἀσύμπτωτοί εἰσιν ἐν τῇ τομῇ, καὶ αὐταὶ διαμένουσι κατὰ πᾶσαν διάμετρον καὶ ἐφαπτομένην.

Explicaturus ſecundum librum Conicorum, amiciſſime *Anthemi*, illud præmittere oportere exiſtimo, me ea tantummodo in ipſum conſcribere, quæ ex primo libro intelligi poſſunt. Primum theorema caſum non habet; nam diverſitas ſchematum nullam hic facit diverſitatem: rectæ enim ΔΓ, ΓΕ ſectionis aſymptoti cum ſint, eædem manent in omni diametro & contingente.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β′.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, δεικτέον, ὅτι ἑτέρα ἀσύμπτωτος οὐκ ἔστι τέμνουσα τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ τῶν ΔΓΕ.

Prop. II. *Theor.*

Iiſdem manentibus, demonſtrandum eſt non eſſe aliam aſymptoton, quæ angulum ΔΓΕ dividat.

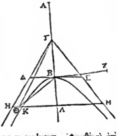
Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ἡ ΓΘ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΘ, καὶ συμπιπτέτω τῇ ΓΘ κατὰ τὸ Θ, καὶ τῇ ΒΘ ἴση κείσθω ἡ ΔΗ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Κ, Λ, Μ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΒΘ, ΔΗ ἴσαι καὶ παράλληλοι, καὶ αἱ ΔΒ, ΗΘ ἴσαι καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται αὐτῇ τις ἡ ΒΛ· τὸ ὑπὸ ΑΛΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΛ. ὁμοίως δὴ ἐπειδὴ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΜ τῇ ΔΕ, καὶ ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΗΛ τῇ ΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΔΒ, μείζων ἄρα ἡ ΗΚ τῆς ΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ΚΜ τῆς ΒΕ μείζων, ἐπεὶ καὶ τῆς

SI enim fieri poteſt, ſit ΓΘ; & per Β ipſi ΓΔ parallela ducatur ΒΘ, quæ cum ΓΘ in Θ puncto conveniat; ipſi vero ΒΘ ponatur æqualis ΔΗ; & juncta ΗΘ ad Κ, Λ, Μ producatur.

Quoniam igitur ΒΘ, ΔΗ æquales ſunt & parallelæ; & ipſæ ΔΒ, ΗΘ [per 33. 1.] æquales & parallelæ erunt. & quoniam ΑΒ bifariam ſecatur in Γ, & ipſi adjungitur quædam ΒΛ: ergo [per 6. 2.] rectangulum ΑΛΒ una cum quadrato ex ΓΒ æquale eſt quadrato ex ΓΛ. ſimiliter quoniam ΗΜ ipſi ΔΒ eſt parallela, atque eſt ΔΒ æqualis ΒΕ; & ΗΛ ipſi ΛΜ æqualis erit. & quoniam ΗΘ æqualis eſt ΔΒ; erit ΗΚ ipſâ ΔΒ major. eſt vero & ΚΜ major ipſâ ΒΕ, quia & ipſâ

ipſâ Α Μ · rectangulum igitur Μ Κ Η majus eſt rectangulo Δ Β Ε, hoc eſt quadrato ex Δ Β. quoniam igitur ut Α Β ad Β Ζ ita eſt [ex demonſtr. ad præc.] quadratum ex Γ Β ad quadratum ex Β Δ; atque ut Α Β ad Β Ζ ita [per 21. 1. huj.] Λ Λ Β rectangulum ad quadratum ex Λ Κ: erit igitur ut quadratum ex Γ Β ad quadratum ex Β Δ ita Α Λ Β rectangulum ad quadratum ex Λ Κ. ut vero quadratum ex Γ Β ad quadratum ex Β Δ ita [per 4. & 22. 6.] quadratum ex Γ Λ ad quadratum ex Λ Η: ergo ut quadratum ex Γ Λ ad quadratum ex Λ Η ita Α Λ Β rectangulum ad quadratum ex Λ Κ. quoniam itaque eſt ut totum quadratum ex Γ Λ ad totum quadratum ex Λ Η ita ablatum rectangulum ΑΛΒ ad ablatum quadratum ex Λ Κ; erit reliquum, nempe [per 6. 2.] quadratum ex Γ Β, ad reliquum [per eandem] rectangulum Μ Κ Η ut quadratum ex Γ Λ ad quadratum ex Λ Η, hoc eſt ut quadratum ex Γ Β ad quadratum ex Β Δ; ergo rectangulum Μ Κ Η æquale eſt quadrato ex Β Δ. ſed & oſtenſum eſt eo majus eſſe: quod abſurdum. igitur Γ Θ non eſt aſymptotos.



Α Μ· τὸ ἄρα ὑπὸ Μ Κ Η μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ Δ Β Ε, τουτέστι τοῦ ἀπὸ Δ Β. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α Β πρὸς Β Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ Γ Β πρὸς τὸ ἀπὸ Β Δ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Α Β πρὸς Β Ζ οὕτως τὸ ὑπὸ Α Λ Β πρὸς τὸ ἀπὸ Λ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Γ Β πρὸς τὸ ἀπὸ Β Δ οὕτως τὸ ὑπὸ Α Λ Β πρὸς τὸ ἀπὸ Λ Κ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ Γ Β πρὸς τὸ ἀπὸ Β Δ οὕτω τὸ ἀπὸ Γ Λ πρὸς τὸ ἀπὸ Λ Η· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ Γ Λ πρὸς τὸ ἀπὸ Λ Η οὕτως τὸ ὑπὸ Α Λ Β πρὸς τὸ ἀπὸ Λ Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ Λ Γ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ Λ Η οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ Α Λ Β πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ Λ Κ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ Γ Β πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ Μ Κ Η ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ Γ Λ πρὸς τὸ ἀπὸ Λ Η, τουτέστι τὸ ἀπὸ Γ Β πρὸς τὸ ἀπὸ Δ Β· ἴσον ἄρα τῷ ἀπὸ Δ Β τὸ ὑπὸ Μ Κ Η· ἀλλὰ καὶ μεῖζον αὐτοῦ δέδεικται, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ Γ Θ ἀσύμπτωτός ἐστι τῇ τομῇ.

EUTOCIUS.

Hoc theorema caſum non habet, ſiquidem Β Θ ſectionem omnino in duobus punctis ſecat. quoniam enim parallela eſt ipſi Γ Δ, cum ipſa Γ Θ conveniet; ideoque prius cum ſectione conveniet.

Τοῦτο τὸ θεώρημα πτῶσιν οὐκ ἔχει, ἡ μέντοι Β Θ πάντως τεμεῖ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστι τῇ Γ Δ, συμπεσεῖται τῇ Θ Γ· ὥστε πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται.

Prop. III. *Theor.*

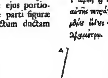
Si hyperbolam contingat recta linea: cum utraque aſymptotôn conveniet, & ad tactum bifariam ſecabitur; quadratum vero utriuſque ejus portionis æquale erit quartæ parti figuræ ad diametrum per tactum ductam conſtitutæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς εὐθεῖα ἐφάπτηται, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν ἁφήν, καὶ τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν τμημάτων αὐτῆς τετράγωνον ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ τοῦ γινομένου εἴδους πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ.

SIT hyperbola Α Β Γ, cujus centrum Ε, & aſymptoti ſint Ζ Ε, Ε Η, quædam vero recta Θ Κ ſectionem contingat in puncto Β: dico Θ Κ productam cum Ζ Ε, Ε Η convenire.

Si enim fieri poteſt, non conveniat, & juncta Β Ε producatur, ſitque ipſi Β Ε æqualis Ε Δ: diameter igitur [per 47. 1. huj.] eſt Β Δ. ponatur vero quartæ parti figuræ, quæ eſt ad Β Δ, æquale quadratum utriuſque ipſarum Θ Β, Β Κ, & jungantur Θ Ε, Ε Κ: ergo [per 1. 2. huj] Θ Ε, Ε Κ aſymptoti ſunt, quod [per 2. 2. huj.] fieri nequit: poſitum eſt enim aſymptotos eſſe Ζ Ε, Ε Η: igitur Θ Κ producta cum ipſis Ζ Ε, Ε Η conveniet, puta in punctis Ζ, Η.



ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ Α Β Γ, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Ε, καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ Ζ Ε, Ε Η, καὶ ἐφαπτέσθω τις αὐτῆς κατὰ τὸ Β ἡ Θ Κ· λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη ἡ Θ Κ συμπεσεῖται ταῖς Ζ Ε, Ε Η.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, μὴ συμπιπτέτω, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Ε Β ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω τῇ Β Ε ἴση ἡ Ε Δ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Β Δ. κείσθω δὴ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ Β Δ εἴδους ἴσον τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν Θ Β, Β Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Ε Θ, Ε Κ· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶν, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκεινται γὰρ Ζ Ε, Ε Η ἀσύμπτωτοι· ἡ ἄρα Κ Θ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς Ε Ζ, Ε Η ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ Ζ, Η.

Λέγω

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΒΖ, ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους. μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω τῷ τετάρτῳ εἴδους ἴσον τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΒΘ, ΒΚ· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΘΕ, ΕΚ, ὅπερ ἄτοπον· τὸ ἄρα ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΖΒ, ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους.

Dico quadratum utriuſvis ipſarum BZ, BH æquale eſſe quartæ parti figuræ quæ fit ad BΔ. non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit quartæ parti iſtius figuræ æquale quadratum utriuſvis ipſarum ΘB, BK: aſymptoti igitur ſunt [per 1. 2. huj.] ΘE, BK; quod eſt abſurdum: ergo quadratum utriuſvis ZB, BH æquale eſt quartæ parti figuræ ad ipſam BΔ conſtitutæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν γωνίαν περιεχουσῶν, καὶ σημείου ἐντὸς τῆς γωνίας, γράψαι διὰ τοῦ σημείου κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολήν, ὥστε ἀσυμπτώτους εἶναι τὰς δοθείσας εὐθείας.*

ΕΣΤΩΣΑΝ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τῷ Α, καὶ δεδόσθω σημεῖόν τι τὸ Δ, καὶ δέον ἔστω διὰ τοῦ Δ εἰς ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒ, ΑΓ γράψαι ὑπερβολήν.

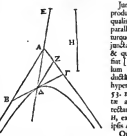
Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ ΔΑ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ κείσθω τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΖΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον γεγονέτω τὸ ὑπὸ ΔΕ, Η· καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΑΔ, γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ Δ ὑπερβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν Η, ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΔΕ, Η.

Ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΒΑ, καὶ ἴση ἡ ΓΖ τῇ ΖΑ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΔ. καὶ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον τῷ ὑπὸ ΔΕ, Η· ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ ΓΔ, ΔΒ τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΔΕ, Η εἴδους· αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς γραφείσης ὑπερβολῆς.

Prop. IV. *Probl.*

Datis duabus rectis lineis angulum continentibus, & puncto intra angulum dato: deſcribere per punctum coni ſectionem quæ hyperbola appellatur, ita ut datæ rectæ ipſius aſymptoti ſint.

SINT duæ rectæ AB, AΓ angulum quemvis ad A continentes, ſitque datum punctum Δ, & oporteat per Δ intra aſymptotos AB, AΓ hyperbolam deſcribere.



Jungatur AΔ, & ad B producatur, & fiat ΔA æqualis AE, & per Δ ipſi AB parallela ducatur ΔZ, ponaturque AZ æqualis ZΓ, & juncta ΓΔ producatur ad B, & quadrato ex ΓB æquale fiat [ope 12. 6.] rectangulum ſub ΔE & H, & producta AΔ, circa ipſam per Δ hyperbola deſcribatur [per 53. 1. huj.] ita ut applicatæ ad diametrum poſſint rectangula adjacentia rectæ H, excedentiaque figurâ ſub ipſis ΔE, H contentâ ſimili.

Quoniam igitur parallela eſt ΔZ ipſi BA, & ΓZ æqualis ZA; erit [per 2. 6.] ΓΔ ipſi ΔB æqualis: ergo [per 2. 2.] quadratum ex ΓB quadruplum eſt quadrati ex ΓΔ. atque eſt [per conſtr.] quadratum ex ΓB æquale rectangulo ſub ΔE, H: utrumque igitur quadratorum ex ΓΔ, ΔB quarta pars eſt figuræ quæ ſub ΔB, H continetur: quare [per 1. 2. huj.] AB, AΓ deſcriptæ hyperbolæ aſymptoti ſunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε'.

Ἐὰν παραβολῆς ἢ ὑπερβολῆς ἡ διάμετρος εὐθεῖάν τινα τέμνῃ δίχα, ἡ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

ΕΣΤΩ παραβολὴ ἢ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἧς διάμετρος ἡ ΔΒΕ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΖΒΗ· ἤχθω δέ τις εὐθεῖα ἐν τῇ τομῇ ἡ ΑΕΓ, ἴσην ποιοῦσα τὴν ΑΕ τῇ ΕΓ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΗ.

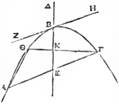
Prop. V. *Theor.*

Si parabolæ vel hyperbolæ diameter rectam quandam bifariam ſecet; quæ ad terminum diametri contingit ſectionem parallela eſt rectæ bifariam ſectæ.

SIT parabola vel hyperbola ABΓ, cujus diameter ΔBE, & ZBH ſectionem contingat; ducatur autem quædam ABΓ in ſectione, faciens AB æqualem ipſi BΓ: dico AΓ parallelam eſſe ipſi ZH.

* Vide Lemma II. *Pappi* in Librum quintum.

Niſi enim ita ſit, ducatur per Γ ipſi ZH parallela ΓΘ, & jungatur ΘΑ. quoniam igitur ΑΒΓ eſt parabola vel hyperbola, cujus diameter quidem ΔΒ, contingens autem ZH, atque ipſi ZH parallela eſt ΓΘ: erit [per 46. vel 47. 1. huj.] ΓΚ æqualis ΚΘ. ſed & ΓΕ [ex hyp.] ipſi ΒΑ eſt æqualis: ergo [per 2. 6.] ΑΘ parallela eſt ipſi ΚΕ; quod fieri non poteſt: producta enim cum ipſâ ΒΔ [per 22. 1. huj.] convenit.



Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ZH παράλληλος ἡ ΓΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ. ἐπεὶ οὖν παραβολὴ ἢ ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΒΓ, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΔΕ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ZH, καὶ παράλληλος αὐτῇ ἡ ΓΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΘ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΕΑ· ἡ ἄρα ΑΘ τῇ ΚΕ παράλληλός ἐστιν, ὅπερ ἀδύνατον· συμπίπτει γὰρ ἐκβαλλομένη τῇ ΒΔ.

Prop. VI. *Theor.*

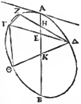
Si ellipſeos vel circuli circumferentiæ diameter rectam quandam non per centrum tranſeuntem bifariam ſecet: quæ ad terminum diametri ſectionem contingit parallela erit rectæ bifariam ſectæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

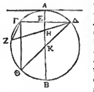
Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ἡ διάμετρος εὐθεῖάν τινα δίχα τέμνῃ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν· ἡ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

SIT ellipſis vel circuli circumferentia, cujus diameter ΑΒ, & ΑΒ ipſam ΓΔ non tranſeuntem per centrum bifariam ſecet in Ε: dico rectam, quæ ſectionem contingit ad Α, ipſi ΔΓ parallelam eſſe.

Nam, ſi fieri poteſt, ſit recta ΔZ ſectionem contingenti in puncto Α parallela: æqualis igitur eſt [per 47. 1. huj.] ΔΗ ipſi ZΗ. eſt autem [ex hyp.] & ΔΕ æqualis ΕΓ: ergo [per 2. 6.] ΓZ ipſi ΗΕ eſt parallela, quod eſt abſurdum. etenim ſive Η fuerit centrum ſectionis ΑΒ; linea ΓZ [per 23. 1. huj.] cum diametro ΑΒ occurret: ſive non ſit, ponatur centrum Κ, junctaque ΔΚ producatur ad Θ, & jungatur ΓΘ. quoniam igitur ΔΚ æqualis eſt ΚΘ, & ΔΕ ipſi ΕΓ; erit [per 2. 6.] ΓΘ parallela ipſi ΑΒ. ſed & ΓZ [ex hyp.] eidem eſt paralella, quod eſt abſurdum: ergo quæ ad Α ſectionem contingit ipſi ΓΔ eſt parallela.



ΕΣΤΩ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἡ ΑΒ τὴν ΓΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Ε· λέγω ὅτι ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΔΓ.



Εἰ γὰρ μή, ἔστω τῇ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἡ ΔZ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ZΗ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓZ τῇ ΗΕ, ὅπερ ἄτοπον· εἰ τε γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς ΑΒ τομῆς, ἡ ΓZ συμπεσεῖται τῇ ΑΒ· εἴ τε μή ἐστιν, ὑποκείσθω τὸ Κ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΚ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΘ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΘ τῇ ΑΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓZ τῇ αὐτῇ ΑΒ παράλληλος, ὅπερ ἄτοπον· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ.

Prop. VII. *Theor.*

Si coni ſectionem vel circuli circumferentiam recta linea contingat, & huic parallela ducatur in ſectione, & bifariam dividatur: quæ tactum & punctum biſectionis recta connectit ſectionis diameter erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζʹ.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ τομῇ, καὶ δίχα τμηθῇ· ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

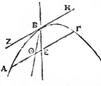
SIT coni ſectio vel circuli circumferentia ΑΒΓ, quam contingat ZΗ, & ipſi ZΗ paral-

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, ἐφαπτομένη δὲ αὐτῆς ἡ ZΗ, καὶ τῇ ZΗ παράλληλος

Digitized by Google

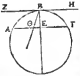
λληλος ἡ ΑΓ, καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ· λέγω ὅτι ἡ ΒΕ διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

Μὴ γὰρ, ἀλλὰ, εἰ δυνατὸν, ἔστω διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ΒΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ, ὅπερ ἄτοπον· ἡ γὰρ ΑΕ τῇ ΕΓ ἴση ἐστίν· οὐκ ἄρα ἡ ΒΘ διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΕ.



lela ducatur ΑΓ, bifariamque in E dividatur, & jungatur BE: dico BE eſſe ſectionis diametrum.

Non enim, ſed, ſi fieri poteſt, ſit diameter BΘ: ergo AΘ ipſi ΘΓ eſt æqualis, quod eſt abſurdum; eſt enim AE æqualis ipſi EΓ: non eſt igitur BΘ diameter ſectionis. ſimiliter demonſtrabimus nullam aliam præter ipſam BE diametrum eſſe.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ή.

Ἐὰν ὑπερβολῇ εὐθεῖα συμπίπτῃ κατὰ δύο σημεῖα· ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις, καὶ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ' αὐτῆς ὑπὸ τῆς τομῆς πρὸς ταῖς ἀσυμπτώτοις ἴσαι ἔσονται.

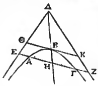
Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΕΔ, ΔΖ, καὶ τῇ ΑΒΓ συμπιπτέτω κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Γ ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ τῆς τομῆς· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Β ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΑΓ. ἔστω οὖν ἐφαπτομένη ἡ ΘΒΚ· συμπεσεῖται δὴ ταῖς ΕΔ, ΔΖ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΚΘ, καὶ ἡ ΚΘ συμπίπτει ταῖς ΔΚ, ΔΘ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα συμπεσεῖται ταῖς ΔΕ, ΔΖ. συμπιπτέτω κατὰ τὰ Ε, Ζ. καί ἐστιν ἴση ἡ ΘΒ τῇ ΒΚ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ· ὥστε καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΕ.

Prop. VIII. *Theor.*

Si hyperbolæ recta linea occurrat in duobus punctis: producta ab utraque parte aſymptotis conveniet; & ex ipſâ abſciſſæ portiones inter ſectionem & aſymptotos interjectæ æquales erunt.

Sit hyperbola ABΓ, cujus aſymptoti EΔ, ΔZ, & ipſi ABΓ occurrat recta quædam AΓ in punctis A, Γ: dico AΓ productam ex utraque parte cum aſymptotis convenire.



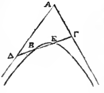
Secetur enim AΓ bifariam in H, & jungatur ΔH: hæc igitur [per cor. 51. 1. huj.] diameter eſt ſectionis: quare [per 5 2. huj.] recta ad B contingens ipſi AΓ eſt parallela. ſit autem contingens ΘBK, quæ [per 3. 2. huj.] conveniet cum ipſis EΔ, ΔZ. quoniam igitur AΓ eſt parallela ipſi KΘ, & KΘ convenit cum ΔK, ΔΘ; etiam AΓ cum ΔE, ΔZ conveniet. conveniat autem in punctis E, Z; ac ob ΘB ipſi BK æqualem, erit [ex 4. 6. & 15. 5.] ZH ipſi HE, & propterea ΓZ ipſi AE æqualis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν εὐθεῖα συμπίπτουσα ταῖς ἀσυμπτώτοις δίχα τέμνηται ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς· καθ' ἓν μόνον σημεῖον ἅπτεται τῆς τομῆς.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΓΔ συμπίπτουσα ταῖς ΓΑ, ΑΔ ἀσυμπτώτοις δίχα τεμνέσθω ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι κατ' ἄλλο σημεῖον οὐχ ἅπτεται τῆς τομῆς.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἁπτέσθω κατὰ τὸ Β· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΒΔ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ ἴση· οὐκ ἄρα καθ' ἕτερον σημεῖον ἅπτεται ἡ ΓΔ τῆς τομῆς.



Prop. IX. *Theor.*

Si recta linea aſymptotis occurrens ab hyperbola bifariam ſecetur; in uno tantum puncto cum ſectione convenit.

Recta enim ΓΔ occurrens aſymptotis ΓA, AΔ ſecetur ab hyperbola bifariam in puncto E: dico rectam ΓΔ in alio puncto ſectioni non occurrere.

Si enim fieri poteſt, occurrat in B: ergo [per 8. 2. huj.] ΓB æqualis eſt ipſi BΔ, quod eſt abſurdum; poſuimus enim ΓE ipſi EΔ æqualem eſſe: igitur ΓΔ in alio puncto ſectioni non occurrit.

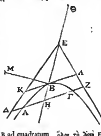
Prop.

Prop. X. *Theor.*

Si recta quævis linea ſectionem ſecans cum utraque aſymptotôn conveniat; rectangulum contentum ſub rectis lineis, quæ inter aſymptotos & ſectionem interjiciuntur, æquale eſt quartæ parti figuræ factæ ad diametrum illam quæ rectæ ductæ parallelas bifariam dividit.

SIT hyperbola A B Γ, cujus aſymptoti Δ E, E Z, & ducatur quævis recta Δ Z ſectionem & aſymptotos ſecans, dividatur autem A Γ bifariam in H, junctaque H E, ponatur ipſi B E æqualis E Θ, & à puncto B ducatur B M ad angulos rectos ipſi Θ E B, deinde fiat ut rectangulum Θ H B ad quadratum ex A H ita Θ B ad B M; diameter igitur eſt B Θ, [per 7. 2. huj.] & [per 21.1.huj.] B M rectum figuræ, latus: dico rectangulum Δ A Z æquale eſſe quartæ parti figuræ quæ ſub Θ B, B M continetur, & ſimiliter eidem eſſe æquale rectangulum Δ Γ Z.

Ducatur enim K B Λ per B ſectionem contingens, quæ [per 5. 2.huj.] parallela erit ipſi Δ Z. jam quoniam demonſtratum eſt [ad 1.2.huj.] ut Θ B ad B M ita eſſe quadratum ex E B ad quadratum ex B K, hoc eſt [per 4. & 22. 6.] quadratum ex E H ad quadratum ex H Δ; atque etiam ut Θ B ad B M ita [ex conſt. & 1. 6.] rectangulum Θ H B ad quadratum ex A H: erit igitur ut totum quadratum ex E H ad totum quadratum ex H Δ, ita ablatum rectangulum Θ H B ad ablatum quadratum ex A H: adeoque [per 5. 2.] reliquum quadratum ex E B ad reliquum rectangulum Δ A Z eſt ut quadratum ex E H ad quadratum ex H Δ, hoc eſt ut quadratum ex E B ad quadratum ex B K. æquale igitur eſt [per 9. 5.] rectangulum Z A Δ quadrato ex B K. ſimiliter demonſtrabitur & rectangulum Δ Γ Z quadrato ex B Λ æquale. quadratum autem ex K B [per 3.2. huj.] æquale eſt quadrato ex B Λ: ergo & Z A Δ rectangulum rectangulo Z Γ Δ æquale erit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ί.

Ἐὰν εὐθεῖά τις τέμνουσα τὴν τομὴν συμπίπτῃ ἑκατέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς, ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ γινομένου εἴδους πρὸς τῇ διχοτομούσῃ διαμέτρῳ τὰς ἀγομένας παρὰ τὴν ἠγμένην εὐθεῖαν.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ Α Β Γ, ἀσύμπτωτοι δὲ αὐτῆς αἱ Δ Ε, Ε Ζ, καὶ ἤχθω τις ἡ Δ Ζ τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ τετμήσθω ἡ Α Γ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Η Ε, καὶ κείσθω τῇ Β Ε ἴση ἡ Ε Θ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β τῇ Θ Ε Β πρὸς ὀρθὰς ἡ Β Μ, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Θ Η Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α Η οὕτως ἡ Θ Β πρὸς τὴν Β Μ, διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Β Θ, ὀρθία δὲ ἡ Β Μ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ Δ Α Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ ὑπὸ τῶν Θ Β Μ, ὁμοίως δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ Γ Ζ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ Κ Λ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ Δ Ζ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς ἡ Θ Β πρὸς Β Μ οὕτως τὸ ἀπὸ Ε Β πρὸς τὸ ἀπὸ Β Κ, τουτέστι τὸ ἀπὸ Ε Η πρὸς τὸ ἀπὸ Η Δ· ὡς δὲ ἡ Θ Β πρὸς Β Μ οὕτως τὸ ὑπὸ Θ Η Β πρὸς τὸ ἀπὸ Η Α· ἔστιν ἂν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ Ε Η πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ Η Δ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ Θ Η Β πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ Α Η· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ Ε Β πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ Δ Α Ζ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ Ε Η πρὸς τὸ ἀπὸ Η Δ, τουτέστι τὸ ἀπὸ Ε Β πρὸς τὸ ἀπὸ Β Κ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ Ζ Α Δ τῷ ἀπὸ Β Κ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τὸ ὑπὸ Δ Γ Ζ τῷ ἀπὸ Β Λ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ Κ Β τῷ ἀπὸ Β Λ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ Ζ Α Δ τῷ ὑπὸ Ζ Γ Δ.

Prop. XI. *Theor.*

Si utramque rectarum continentium angulum qui deinceps eſt angulo hyperbolam continenti ſecet recta linea: in uno tantum puncto cum ſectione conveniet; & rectangulum contentum ſub interjectis inter rectas angulum continentes & ſectionem, æquale erit quartæ parti quadrati ex diametro quæ rectæ ſecanti parallela eſt.

SIT hyperbola cujus aſymptoti Γ A, A Δ; & productâ Δ A ad E, per aliquod punctum E

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

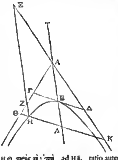
Ἐὰν ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν τέμνῃ τις εὐθεῖα· συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν καὶ τῆς τομῆς, ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἠγμένης διαμέτρου παρὰ τὴν τέμνουσαν εὐθεῖαν.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ Γ Α, Α Δ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ Δ Α ἐπὶ τὸ Ε, καὶ διά τινος

σημείου

σημείου τοῦ Ε διήχθω ἡ ΕΖ τέμνουσα τὰς ΕΑ, ΑΓ· ὅτι μὲν οὖν συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον, φανερόν. ἡ γὰρ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΖ παράλληλος ἀγομένη, ὡς ἡ ΑΒ, τέμνει τὴν ὑπὸ ΓΑΔ γωνίαν, καὶ συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ διάμετρος αὐτῆς ἔσται· ἡ ΕΖ ἄρα συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Η· λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Η τεταγμένως ἡ ΘΗΛΚ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΗΘ. ἔστω ἡ ΓΔ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΓΒΔ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον, ἐκ τε τῆς ΓΒ πρὸς ΒΑ καὶ τῆς ΔΒ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς ΗΕ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΘΗ πρὸς ΗΖ καὶ τοῦ τῆς ΚΗ πρὸς ΗΕ. ἀλλὰ καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΗΖ λόγος σύγκειται ἐκ τῶν αὐτῶν· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΗΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΚΗΘ τῷ ἀπὸ ΓΒ ἐδείχθη· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΕΗΖ τῷ ἀπὸ ΑΒ.



ducatur EZ, ipſas EA, AΓ ſecans: perſpicuum eſt EZ in uno tantum puncto cum ſectione convenire. nam quæ per A ipſi EZ parallela ducitur, ut AB, ſecat angulum ΓAΔ; propterea eaque [per 2. 2.huj.] conveniet cum ſectione, & [per corol. 51. 1.huj.] ipſius diameter erit; quare EZ conveniet cum ſectione in uno ſolo puncto. conveniat autem ad H: dico rectangulum BHZ quadrato ex AB æquale eſſe.

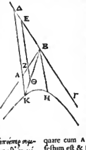
Ducatur enim per H ordinatim ΘHΛK: ergo [per 5. 2.huj.] quæ in puncto B ſectionem contingit parallela eſt ipſi HΘ. ſit ea ΓΔ. itaque quoniam ΓB eſt æqualis ipſi BΔ; quadratum ex ΓB, hoc eſt rectangulum ΓBΔ, ad quadratum ex BA habet [per 23. 6.] rationem compoſitam ex ratione ΓB ad BA & ex ratione ΔB ad BA. ſed [per 4. 6.] ut ΓB ad BA ita ΘH ad HZ, & ut ΔB ad BA ita KH ad HE: ergo ratio quadrati ex ΓB ad quadratum ex BA compoſita eſt ex ratione ΘH ad HZ & ratione KH ad HE. ratio autem rectanguli KHΘ ad rectangulum EHZ [per 23. 6.] ex eiſdem rationibus componitur: quare ut rectangulum KHΘ ad rectangulum BHZ ita quadratum ex ΓB ad quadratum ex BA; & permutando ut rectangulum KHΘ ad quadratum ex ΓB ita rectangulum EHZ ad quadratum ex AB. ſed [per 10.2.huj.] rectangulum KHΘ æquatur quadrato ex ΓB: ergo & EHZ rectangulum quadrato ex AB æquale erit.

EUTOCIUS.

Ἐν τισιν ἀντιγράφοις τὸ θεώρημα τοῦτο ἄλλως δείκνυται.

* Ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείαν ἡ ΓΒΔ, καὶ ἤχθω τις ἡ ΕΖ, ὡς ἔτυχεν, τέμνουσα τὰς ΒΔ, ΒΑ· λέγω ὅτι συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν μὴ συμπιπτέτω, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ τῆς τομῆς. καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ ἀπὸ ΒΗ ἴσον παραλληλόγραμμον ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ποιείτω τὸ ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΒ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται ἄρα τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΒΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΚΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΗ, ὥστε καὶ τῷ ὑπὸ ΕΘΖ· ὅπερ ἄτοπον. ἡ ἄρα ΕΖ συμπεσεῖται τῇ τομῇ, ἐπείπερ συμπίπτει αὐτῇ ἡ ΑΔ. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον· παράλληλος γάρ ἐστι τῇ ΒΗ διαμέτρῳ.



In aliquibus exemplaribus hoc theorema aliter demonſtratur.

Sit hyperbola, cujus aſymptoti AB, BΓ, producaturque ΓBΔ in directum, & ducatur EZ, utcunque, ſecans BΔ, BA: dico EZ cum ſectione convenire.

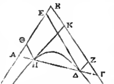
Si enim fieri poteſt, non conveniat, & per B ipſi EZ parallela ducatur BH: ergo BH eſt diameter ſectionis. applicetur [per 29. 6.] ad EZ parallelogrammum quadrato ex BH æquale excedens figurâ quadratâ; quod ſit EΘZ: & juncta ΘB producatur. occurret igitur [per 2. 2. huj.] cum ſectione. occurrat in K, & per K ducatur KAΔ parallela ipſi BH: ergo [per 11. 2. huj.] rectangulum ΔKA quadrato ex BH eſt æquale; ideoque æquale rectangulo EΘZ, quod eſt abſurdum. quare cum AΔ convenit cum ſectione, manifeſtum eſt & EZ eidem convenire, idque in uno tantum puncto; diametro enim BH eſt parallela.

* Hæc demonſtratio vix ſatis integra videtur, ac tuto omitti poterat: nam, ex 26ta libri primi, res ſatis manifeſta eſt.

Prop. XII. *Theor.*

Si ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt in ſectione, ad aſymptotos duæ rectæ lineæ in quibuſlibet angulis ducantur, & ab alio quovis puncto in ſectione ſumpto ducantur aliæ rectæ his ipſis parallelæ: rectangulum ſub parallelis contentum æquale erit contento ſub rectis ipſis quibus ductæ fuerant parallelæ.

SIT hyperbola, cujus aſymptoti A B, B Γ, & ſumatur in ſectione aliquod punctum Δ, atque ab eo ad A B, B Γ ducantur Δ E, Δ Z; ſumatur autem & alterum punctum H in ſectione, per quod ducantur H Θ, H K ipſis Δ E, Δ Z parallelæ: dico rectangulum E Δ Z rectangulo Θ H K æquale eſſe.



Jungatur enim Δ H, & ad A, Γ producatur. itaque quoniam [per 10. 2. huj.] rectangulum A Δ Γ æquatur rectangulo A H Γ; erit [per 16. 6.] ut A H ad A Δ ita Δ Γ ad Γ H. ſed [per 4. 6.] ut A H ad A Δ ita H Θ ad E Δ, & ut Δ Γ ad Γ H ita Δ Z ad H K; quare [per 11.5.] ut Θ H ad Δ E ita Δ Z ad H K: rectangulum igitur E Δ Z [per 16.6.] rectangulo Θ H K eſt æquale.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν ἐπὶ τὰς ἀσυμπτώτους ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἐν τυχούσαις γωνίαις, καὶ ταύταις παράλληλοι ἀχθῶσιν ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς· τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔσται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν αἷς αἱ παράλληλοι ἤχθησαν.

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ Α Β, Β Γ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰς Α Β, Β Γ κατήχθωσαν αἱ Δ Ε, Δ Ζ· εἰλήφθω δὲ τι σημεῖον ἕτερον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η ταῖς Ε Δ, Δ Ζ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ Η Θ, Η Κ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ Ε Δ Ζ τῷ ὑπὸ Θ Η Κ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ Δ Η, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Α, Γ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ Α Δ Γ τῷ ὑπὸ Α Η Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α Η πρὸς Α Δ οὕτως ἡ Δ Γ πρὸς Γ Η. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Α Η πρὸς Α Δ οὕτως ἡ Η Θ πρὸς Ε Δ, ὡς δὲ ἡ Δ Γ πρὸς Γ Η οὕτως ἡ Δ Ζ πρὸς Η Κ· ὡς ἄρα ἡ Θ Η πρὸς Δ Ε οὕτως ἡ Δ Ζ πρὸς τὴν Η Κ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ Ε Δ Ζ τῷ ὑπὸ Θ Η Κ.

EUTOCIUS.

In aliquibus codicibus invenitur hoc Theorema demonſtratum, ope duarum rectarum contingenti parallelarum, quarum altera per Δ, altera vero per H ducitur, demonſtratione juxta rationes Syntheticas oſtenſâ. elegimus autem hunc quem damus probandi modum, utpote eadem ſimplicius monſtrantem. Caſus autem habet ſex, ductis enim ſex rectis, vel punctum Θ erit inter E, B; vel in puncto B, vel extra B, qui tres ſunt caſus: pariterque tres ſunt alii, juxta ſitum puncti Z.

Εὑρέθη ἔν τισιν ἀντιγράφοις τοῦτο τὸ θεώρημα δεικνύμενον διὰ δύο παραλλήλων ἀγομένων τῇ ἐφαπτομένῃ, μιᾶς μὲν διὰ τοῦ Δ, ἑτέρας δὲ διὰ τοῦ Η· καὶ ἡ ἀπόδειξις διὰ συνθετικῶν λόγων. ἐξελεξάμεθα δὲ ταύτην τὴν κατασκευὴν ὡς τὰ αὐτὰ δεικνῦσαν ἁπλουστέρως. ἔχει δὲ καὶ πτώσεις ἕξ· τῶν γὰρ ἓξ εὐθειῶν ἀχθεισῶν, τὸ Θ σημεῖον ἢ μεταξὺ ἔσται τῶν Ε, Β, ἢ ἐπὶ τοῦ Β, ἢ ἔξω τοῦ Β, ὅπερ γίνεται τρεῖς· καὶ ὁμοίως ἐπὶ τοῦ Ζ ἄλλαι τρεῖς.

Prop. XIII. *Theor.*

Si in loco ab aſymptotis & ſectione terminato quævis recta linea ducatur alteri aſymptotôn parallela: in uno puncto tantum cum ſectione conveniet.

SIT hyperbola, cujus aſymptoti Γ A, A B, ſumaturque aliquod punctum E, & per E ipſi A B parallela ducatur E Z: dico E Z cum ſectione convenire.

Si enim fieri poteſt, non conveniat, & ſumatur punctum quodvis in ſectione, per quod ipſis Γ A, A B parallelæ ducantur H Θ, H Γ; & rectangulo Γ H Θ æquale ſit rectangulum A E Z; junctaque A Z producatur: hæc igitur cum ſectione [per 2.2. huj.] conveniet. conveniat autem in

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν ἐν τῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς παράλληλος ἀχθῇ τις εὐθεῖα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων· συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

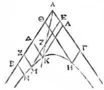
ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ Γ Α, Α Β, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ε, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ Α Β παράλληλος ἤχθω ἡ Ε Ζ· λέγω ὅτι συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ συμπιπτέτω. καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η παρὰ τὰς Γ Α, Α Β ἤχθωσαν αἱ Η Θ, Η Γ· καὶ τῷ ὑπὸ Γ Η Θ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ Α Ε Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Α Ζ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ

Κ, καὶ

Digitized by Google

Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ παρὰ τὰς ΑΒ, ΑΓ ἤχθωσαν αἱ ΚΛ, ΚΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΗΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΚΔ. ὑπόκειται δὲ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΖ ἴσον· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΚΛ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΛΚ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΖ, ὅπερ ἀδύνατον· μείζων γάρ ἐστι καὶ ἡ ΚΛ τῆς ΕΖ, καὶ ἡ ΛΑ τῆς ΑΕ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΕΖ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Μ· λέγω δὴ κατ' ἄλλο οὐ συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω καὶ κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τῶν Μ, Ν τῇ ΓΑ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΜΞ, ΝΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΜΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΝΒ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα καθ' ἕτερον σημεῖον συμπεσεῖται τῇ τομῇ.



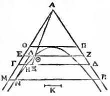
puncto K, & per K ducantur KΛ, KΔ ipſis AB, AΓ parallelæ: ergo [per 12. 2. huj.] rectangulum ΓHΘ æquale eſt rectangulo ΛKΔ. ponitur autem & rectangulo AEZ æquale: rectangulum igitur ΔKΛ, hoc eſt ΑΛK, rectangulo AEZ æquale erit, quod fieri non poteſt; ſi quidem KΛ major eſt quam EZ; & ΛA major quam AE: quare EZ conveniet cum ſectione. conveniat in M: dico eam in alio puncto non convenire. nam ſi fieri poteſt, conveniat etiam in N; & per M, N ipſi ΓA parallelæ ducantur MΞ, NB. ergo [per 12. 2. huj.] rectangulum EMΞ rectangulo ENB eſt æquale, quod eſt abſurdum. igitur in alio puncto cum ſectione non conveniet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Αἱ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ τομὴ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόν τε προσάγουσιν ἑαυταῖς, καὶ παντὸς τοῦ δοθέντος διαστήματος εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα.

ΕΣΤΩ ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΒ, ΑΓ, δοθὲν δὲ διάστημα τὸ Κ· λέγω ὅτι αἱ ΑΒ, ΑΓ καὶ ἡ τομὴ ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόν τε προσάγουσιν ἑαυταῖς καὶ εἰς ἔλασσον ἀφίξονται διάστημα τοῦ Κ.

Ἤχθωσαν γὰρ τῇ ἐφαπτομένῃ τῇ ΟΠ παράλληλοι αἱ ΕΘΖ, ΓΗΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΓΗΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΘΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΗ πρὸς ΖΘ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΓΗ. μείζων δὲ ἡ ΔΗ τῆς ΖΘ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΓΗ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἐλάττονές εἰσιν. εἰλήφθω δὴ τοῦ Κ διαστήματος ἔλαττον τὸ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΑΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΝ· συμπεσεῖται ἄρα τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΝΒ· ἡ ἄρα ΜΝ ἴση ἐστὶ τῇ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦτο ἐλάττων τῆς Κ.



PROP. XIV. *Theor.*

Aſymptoti & ſectio in infinitum productæ ad ſeipſas propius accedunt; & ad intervallum perveniunt minus quolibet dato intervallo.

SIT hyperbola, cujus aſymptoti AB, AΓ, & datum intervallum ſit K: dico aſymptotos AB, AΓ & ſectionem productas ad ſeſe propius accedere, & pervenire ad intervallum minus intervallo K.

Ducatur enim tangenti OΠ parallelæ EΘZ, ΓHΔ; jungaturque AΘ, & ad Ξ producatur: quoniam ergo [per 10. 2. huj.] rectangulum ΓHΔ rectangulo ZΘE eſt æquale; erit [per 16. 6.] ut ΔH ad ZΘ ita ΘE ad ΓH. ſed ΔH major eſt ipſa ZΘ: ergo & EΘ ipſa ΓH eſt major. ſimiliter demonſtrabimus eas, quæ deinceps ſequuntur, minores eſſe. itaque ſumatur [per 3. 1.] intervallum EΛ minus intervallo K, & per Λ ipſi AΓ parallela ducatur ΛN. ergo [per 13. 2. huj.] ΛN cum ſectione conveniet. conveniat in N, perque N ducatur MNB parallela ipſi EZ: quare [per 34. 1.] MN erit æqualis EΛ; & propterea intervallo K minor erit.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν, ὅτι πασῶν τῶν ἀσυμπτώτων τῇ τομῇ ἔγγιόν εἰσιν αἱ ΑΒ, ΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ περιεχομένη γωνία ἐλάσσων ἐστὶ δηλαδὴ γωνίας τῆς ὑπὸ ἑτέρων ἀσυμπτώτων τῇ τομῇ περιεχομένης.

Corollarium.

Ex hoc manifeſtum eſt rectas AB, AΓ ad ſectionem accedere propius quam aliæ quævis aſymptoti: & [ex 2. 2. huj.] angulum BAΓ minorem eſſe quolibet angulo, qui aliis rectis ſectioni non occurrentibus continetur.

EUTOCIUS.

Ἐν τισιν ἀντιγράφοις εὑρέθη ἄλλως δεικνύμενον ὅτι,

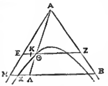
Παντὸς τοῦ δοθέντος διαστήματος εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα αἱ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ τομή.

In aliquibus exemplaribus illud aliter demonſtratum invenitur: ſcilicet,

Aſymptotos & ſectionem pervenire ad intervallum minus quolibet intervallo dato.

Iiſdem

Iiſdem enim manentibus, ſumatur intervallum ΕΚ dato intervallo minus, fiatque ut ΚΕ ad ΕΘ ita ΘΛ ad ΛΑ, & per Α ipſi ΕΖ parallela ducatur ΜΞΛΒ. quoniam igitur [per 8.5.] ΞΒ ad ΘΖ majorem rationem habet quam ΛΒ ad ΘΖ; ut autem ΞΒ ad ΘΖ ita [per 16. 6.] ΘΕ ad ΜΞ, propterea quod rectangulum ΖΘΕ rectangulo ΒΞΜ [per 10. 2.huj.] eſt æquale: habebit ΘΕ ad ΜΞ majorem rationem quam ΛΒ ad ΘΖ. ſed ut ΛΒ quidem ad ΘΖ ita [per 4. 6.] ΛΑ ad ΑΘ; ut autem ΛΑ ad ΑΘ ita ΘΕ ad ΕΚ: quare ΘΕ ad ΜΞ majorem rationem habet quam ΘΕ ad ΕΚ: minor igitur [per 8. 5.] eſt ΜΞ quam ΚΕ.



Τῶν γὰρ αὐτῶν ὑποκειμένων εἰλήφθω τοῦ δοθέντος διαστήματος ἔλαττον τὸ ΕΚ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΚΕ πρὸς ΕΘ οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς ΛΑ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΞΛΒ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΞΒ πρὸς ΘΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΛΒ πρὸς ΘΖ, ὡς δὲ ἡ ΞΒ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΜΞ, διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ ΖΘΕ τῷ ὑπὸ ΒΞΜ· καὶ ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΜΞ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΘΖ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΛΒ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΛΑ πρὸς ΑΘ, ὡς δὲ ἡ ΛΑ πρὸς ΑΘ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ· καὶ ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΜΞ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ΜΞ τῆς ΚΕ.

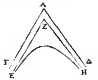
Inveniuntur in aliquibus codicibus etiam hæc theoremata, quæ à nobis tanquam ſupervacanea ſublata ſunt. quoniam enim demonſtratum eſt aſymptotos propius accedere ad ſectionem, & ad intervallum pervenire quolibet dato intervallo minus; ſupervacuum fuit hæc inquirere: neque demonſtrationes aliquas habent, ſed tantum figurarum differentias. verum ut iis qui in hæc inciderint ſententiam noſtram approbemus, exponantur hoc loco ea quæ nos ut ſupervacanea ſuſtulimus

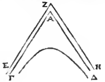
Εὑρέθησαν δὲ ἔν τισι καὶ ταῦτα τὰ θεωρήματα ἐγγεγραμμένα, ἅπερ ὡς περιττὰ ἀφῃρέθη ὑφ' ἡμῶν. δέδεικται μὲν γὰρ τοῦτο, ὅτι αἱ ἀσύμπτωτοι ἔγγιον προσάγουσι τῇ τομῇ, καὶ παντὸς τοῦ δοθέντος εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται, περιττὸν δὲ ταῦτα ζητεῖν ἐμέλλεν· οὐδὲ ἀποδείξεις ἔχουσί τινας ἀλλὰ διαφορὰς καταγραφῶν. ἵνα δὲ τοῖς ἐντυγχάνουσι τὴν ἡμετέραν γνώμην δήλην ποιήσωμεν, ἐκτίθεμαι ἐνταῦθα τὰ ὡς περιττὰ ἀφῃρημένα.

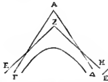
Aſymptoti, de quibus dictum eſt, propius accedunt ad ſectionem quam aliæ, ſi quæ ſint, aſymptoti.

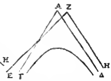
Εἴ τινές εἰσιν ἀσύμπτωτοι τῇ τομῇ ἕτεραι τῶν προειρημένων, ἔγγιόν εἰσιν αἱ προειρημέναι τῇ τομῇ.

Sit hyperbola, cujus aſymptoti ΓΑ, ΑΔ: dico ΓΑ, ΑΔ ad ſectionem propius accedere quam aliæ aſymptoti, ſi quæ ſint. namque, ut in prima figura, ipſas ΕΖ, ΖΗ aſymptotos eſſe non poſſe manifeſte conſtat, ob ΕΖ parallelam ipſi ΓΑ, & ΖΗ ipſi ΑΔ; demonſtratum ſiquidem eſt [per 13.2.huj.] rectas, quæ in loco ab aſymptotis & ſectione terminato ducuntur alteri aſymptoto parallelæ, cum ſectione convenire. ſi vero, ut in ſecunda figura apparet, ΕΖ, ΖΗ ſint aſymptoti,









Ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΔ· λέγω ὅτι εἴ τινές εἰσιν ἄλλαι ἀσύμπτωτοι τῇ τομῇ, ἐκείνων ἔγγιόν εἰσιν αἱ ΓΑ, ΑΔ. ὅτι μὲν οὖν, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς, οὐ δύνανται αἱ ΕΖ, ΖΗ ἀσύμπτωτοι εἶναι, φανερόν· ὥστε εἶναι παράλληλον τὴν μὲν ΕΖ τῇ ΓΑ, τὴν δὲ ΖΗ τῇ ΑΔ· δέδεικται γὰρ ὅτι συμπεσοῦνται τῇ τομῇ· ἐν γὰρ τῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς εἰσιν. εἰ δὲ, ὡς ἐπὶ τῆς δευτέρας πτώσεως, εἰσὶν ἀσύμπτωτοι αἱ ΕΖ, ΖΗ παράλληλοι

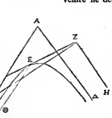
παράλληλοι ὦσι τῶν Γ Α, Α Δ, ἔγγιον μᾶλλόν εἰσιν αἱ Γ Α, Α Δ τῇ τομῇ ἤπερ αἱ Ε Ζ, Ζ Η. εἰ δὲ ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης πλώσεως, καὶ οὕτως αἱ μὲν Γ Α, Α Δ, ἐὰν ἐκβληθῶσιν εἰς ἄπειρον, ἔγγιόν εἰσι τῇ τομῇ, καὶ εἰς ἔλαττον διάστημα παντὸς τοῦ δοθέντος ἀφικνοῦνται· αἱ δὲ Ε Ζ, Ζ Η, κατὰ μὲν τὸ Ζ καὶ τὰ ἐγγὺς αὐτῶν, ἐντὸς οὖσαι τῆς γωνίας σύνεγγύς εἰσι τῇ τομῇ, ἐκβληθεῖσαι δὲ ἀφίστανται τῆς τομῆς μᾶλλον· παντὸς ἄρα τοῦ δοθέντος ὃ νῦν ἀφεστήκασιν οὐκ ἔστιν ἔλασσον. Ἔστωσαν δὴ πάλιν, ὡς ἐπὶ τῆς τετάρτης καταγραφῆς, ἀσύμπτωτοι αἱ Ε Ζ, Ζ Η· φανερὸν δὴ καὶ οὕτως ὅτι ἡ μὲν Γ Α ἔγγιόν ἐστι τῇ τομῇ ἤπερ ἡ Ε Ζ, ἐάν τε ἡ Ε Ζ τῇ Γ Α παράλληλος ᾖ, ἐάν τε συμπίπτῃ τῇ Γ Α. καὶ ἐὰν μὲν ἡ σύμπτωσις κατώτερον ᾖ τῆς διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένης τῆς τομῆς, τέμνει τὴν τομήν· ἐὰν δὲ ἡ σύμπτωσις ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ ᾖ τῆς τε ἐφαπτομένης καὶ τῆς γωνίας, κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς ἐπάνω, ἡ Ζ Ε τῆς τομῆς οὐκ ἀφίξεται ἔλασσον διάστημα παντὸς τοῦ δοθέντος· ὥστε ἡ Γ Α ἔγγιόν ἐστι τῇ τομῇ ἤπερ ἡ Ε Ζ· ἡ δὲ Δ Α ἔγγιον τῇ τομῇ ἤπερ ἡ Ζ Η, διὰ τὰ αὐτὰ τῇ ἐπὶ τῆς β΄. καταγραφῆς.

ipſis Γ A, A Δ parallelæ; tamen Γ A, A Δ ad ſectionem propius accedunt quam E Z, Z H. quod ſi, ut in tertia figura, Γ A, A Δ in infinitum productæ ad ſectionem propius accedunt & ad intervallum perveniunt minus quolibet dato intervallo; rectæ E Z, Z H, quanquam in puncto Z & intra angulum propinquiores ſint ſectioni, tamen productæ ab ipſa magis recedunt; intervallum itaque quo nunc diſtant non eſt quolibet dato intervallo minus. Rurſus ſint aſymptoti E Z, Z H, ut in quarta figura: conſtat etiam hoc modo Γ A propinquiorem eſſe ſectioni quam E Z, ſive E Z parallela ſit Γ A, ſive cum ipſa conveniat. & ſi quidem concurſus ſit infra eam quæ per Z ſectionem contingit, ſecabit E Z ſectionem ipſam: ſi vero concurſus ſit in loco intermedio inter contingentem & angulum, ut ſupra demonſtratum eſt, non perveniet ad intervallum minus intervallo dato: quare Γ A propinquior eſt ſectioni quam E Z, & Δ A propinquior quam Z H, per ea quæ diximus in ſecunda figura.

Ὅτι δὲ ἡ κατωτέρω τῆς διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένης συμπίπτουσα τῇ Γ Α συμπίπτει καὶ τῇ τομῇ, οὕτως δείκνυται.

At vero rectam, quæ convenit cum A Γ infra eam quæ per Z ducta ſectionem contingit, cum ſectione ipſa convenire ſic demonſtrabitur.

Ἐφαπτέσθω ἡ Ε Ζ τῆς τομῆς κατὰ τὸ Ε, ἡ δὲ σύμπτωσις αὐτῆς τῇ Γ Α ἔστω ἀνώτερον τῆς Ζ Η· λέγω ὅτι ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ἤχθω γὰρ διὰ τῆς Ε ἁφῆς παράλληλος τῇ Γ Α ἀσυμπτώτῳ ἡ Ε Θ· ἡ Ε Θ ἄρα κατὰ μόνον τὸ Ε συμπίπτει τῇ τομῇ. ἐπεὶ οὖν ἡ Γ Α τῇ Ε Θ παράλληλός ἐστι, καὶ τῇ Α Γ συμπίπτει ἡ Ζ Η· καὶ τῇ Ε Θ ἄρα συμπεσεῖται, ὥστε καὶ τῇ τομῇ.



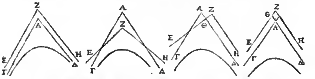
Contingat E Z ſectionem in E, concurrat vero cum Γ A ſupra ipſam Z H: dico Z H productam convenire cum ſectione. ducatur enim per tactum E ipſi Γ A aſymptoto parallela E Θ: ergo [per 13. 2. huj.] E Θ ſectioni in unico puncto E occurrit. itaque quoniam Γ A ipſi E Θ eſt parallela, & Z H convenit cum A Γ; etiam cum E Θ conveniat neceſſe eſt; quare & cum ipſa ſectione.

Εἴ τις ἐστὶν εὐθύγραμμος γωνία περιέχουσα τὴν ὑπερβολὴν ἑτέρα [τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων, ὅτι οὐκ ἔστιν ἐλάσσων αὐτῆς.]

Si ſit alius angulus rectilineus qui hyperbolam contineat, diverſus ab angulo ſub aſymptotis contento, non minor erit eo.

Ἔστω ὑπερβολῆς ἀσύμπτωτοι αἱ Γ Α, Α Δ, ἕτεραι δέ τινες μὴ συμπίπτουσαι τῇ τομῇ ἔστωσαν αἱ Ε Ζ,

Sit hyperbola, cujus aſymptoti Γ A, A Δ; aliæ vero non occurrentes ei ſint E Z, Z H: dico angu-



Ζ Η· λέγω ὅτι οὐκ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία τῆς πρὸς τῷ Α. ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ Ε Ζ, Ζ Η τῶν Γ Α, Α Δ παράλληλοι· οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ πρὸς

lum ad Z non minorem eſſe angulo ad A. ſint enim primum E Z, Z H ipſis Γ A, A Δ parallelæ: ergo angulus ad Z non eſt minor eo

qui

qui ad A. ſi vero non ſint parallelæ, ut in ſecunda figura, majorem eſſe angulum ad Z angulo ΓΑΔ manifeſtum. In tertia figura, angulus ΖΘΑ [per 16. 1.] eo qui ad A major eſt; & qui ad Z æqualis eſt angulo ΖΘΑ. denique in quarta figura, angulus qui ad verticem, major eſt angulo qui itidem ad verticem conſtituitur: quapropter angulus ad Z angulo ad A non minor erit.

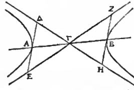
τῷ Ζ τ̃ πρὸς τῷ Α. μὴ ἔςωσαν δὴ παράλληλοι, καθὼς ὅπι τ̃ δευτέρας καταγραφῆς· φανερὸν ὖν ὅτι μείζων ἐςὶν ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία τ̃ ὑπὸ ΓΑΔ. ὅπι ἢ τ̃ τρίτης, μείζων ἐςὶν ἡ ὑπὸ ΖΘΑ τ̃ πρὸς τῷ Α, ϗ ἔςιν ἴση ἡ πρὸς τῷ Ζ τῇ πρὸς τῷ Θ. ὅπι ἢ τ̃ τετάρτης ἡ κατὰ κορυφὴν τ̃ κατὰ κορυφὴν ἐςὶ μείζων· οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἐςὶν ἡ πρὸς τῷ Ζ τῆς πρὸς τῷ Α γωνίας.

Prop. XV. *Theor.*

Oppoſitarum ſectionum aſymptoti communes ſunt.

SINT oppoſitæ ſectiones, quarum diameter ΑΒ & centrum Γ: dico ſectionum Α, Β aſymptotos communes eſſe.

Ducantur per puncta Α, Β rectæ ΔΑΕ, ΖΒΗ, quæ ſectiones contingant: parallelæ igitur ſunt ΔΑΕ, ΖΒΗ. abſcindantur ΔΑ, ΑΕ; ΖΒ, ΒΗ, ita ut cujuſque earum quadratum æquale ſit quartæ parti figuræ quæ ad diametrum ΑΒ conſtituitur: ergo [per 14. 1. huj.] ΔΑ, ΑΒ; ΖΒ, ΒΗ inter ſe ſunt æquales. jungantur ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ. perſpicuum igitur eſt [per 14. 1.] ΔΓ, ΓΗ in eadem eſſe recta; itemque ΕΓ, ΓΖ; propterea quod parallelæ ſunt ΔΑΒ, ΖΒΗ. quoniam igitur [ex hyp.] hyperbola eſt cujus diameter ΑΒ, contingens autem ΔΒ; & utraque ipſarum ΔΑ, ΑΕ poteſt quartam partem figuræ quæ ad ΑΒ conſtituitur; erunt [per 1. 2. huj.] ΔΓ, ΓΕ aſymptoti: & eadem ratione ipſius Β ſectionis aſymptoti erunt ΖΓ, ΓΗ. oppoſitarum igitur ſectionum aſymptoti communes ſunt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Τῶν ἀντικειμένων τομῶν κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ· λέγω ὅτι τῶν Α, Β τομῶν κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

Ηχθωσαν διὰ τ̃ Α, Β σημείων ἐφαπτόμεναι τ̃ τομῶν αἱ ΔΑΕ, ΖΒΗ· παράλληλοι ἄρα εἰσίν. ἀπειλήφθω δὴ ἑκάςη τ̃ ΔΑ, ΑΕ· ΖΒ, ΒΗ ἴσον δυναμένη τῷ τετάρτῳ τ̃ πρὸς τ̃ ΑΒ εἴδους· ἴσαι ἄρα αἱ ΔΑ, ΑΕ, ΖΒ, ΒΗ. ἐπεζεύχθωσαν ἢ αἱ ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐςὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΗ, ϗ ἡ ΓΕ τῇ ΕΖ, διὰ τὰς παραλλήλους. ἐπεὶ ὖν ὑπερβολή ἐςιν, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΔΕ, ϗ ἑκατέρα τ̃ ΔΑ, ΑΕ δύναται τὸ τέταρτον τ̃ πρὸς τ̃ ΑΒ εἴδους· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΔΓ, ΓΕ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῇ Β ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΖΓ, ΓΗ. τ̃ ἀντικειμένων ἄρα κοιναί εἰσιν ἀσύμπτωτοι.

Prop. XVI. *Theor.*

Si in oppoſitis ſectionibus quævis recta linea ducatur ſecans ntramque rectarum continentium angulum qui deinceps eſt angulo ſectiones continenti: cum ntraqne oppoſitarum in uno tantum puncto conveniet; & rectæ, qnæ ex ipſa abſciſſæ inter aſymptotos & ſectiones interjiciuntur, æquales erunt.

SINT oppoſitæ ſectiones Α, Β, quarum quidem centrum Γ, aſymptoti vero ΔΓΗ, ΕΓΖ; & ducatur quævis recta ΘΚ, quæ utramque ΔΓ, ΓΖ ſecet: dico ΘΚ productam cum utraque ſectione in uno tantum puncto convenire.

Quoniam enim ſectionis Α aſymptoti ſunt ΔΓ, ΓΕ; & ducta eſt quædam ΘΚ ſecans utramque continentium angulum ΔΓΖ, qui deinceps eſt angulo ſectionem continenti: producta

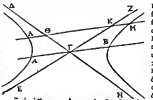
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Εὰν ἐν ἀντικειμέναις ἀχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα ἑκατέραν τ̃ περιεχουσῶν τ̃ ἐφεξῆς γωνίαν τ̃ περιεχουσῶν τὰς τομάς· συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τ̃ ἀντικειμένων καθ' ἓν μόνον σημεῖον, ϗ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ' αὐτῆς ὑπὸ τ̃ τομῶν πρὸς ταῖς ἀσυμπτώτοις ἴσαι ἔσονται.

ΕΣΤΩΣΑΝ γὰρ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον μὲν τὸ Γ, ἀσύμπτωτοι αἱ ΔΓΗ, ΕΓΖ, ϗ ἤχθω τις εὐθεῖα τέμνουσα ἑκατέραν τ̃ ΔΓ, ΓΖ ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τ̃ τομῶν καθ' ἓν σημεῖον μόνον.

Επεὶ γὰρ τ̃ Α τομῆς ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΔΓ, ΓΕ, ϗ δίηκταί τις εὐθεῖα ἡ ΘΚ τέμνουσα ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τ̃ ὑπὸ ΔΓΖ· ἡ

Digitized by Google



ΚΘ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ τῇ Α, ὁμοίως δὴ καὶ τῇ Β. συμπιπτέτω κατὰ τὰ Λ, Μ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ΛΜ παράλληλος ἡ ΑΓΒ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΚΛΘ τῷ ἀπὸ ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΚ τῷ ἀπὸ ΓΒ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΚΛΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΜΚ, καὶ ἡ ΛΘ ἄρα τῇ ΚΜ ἴση.

B Θ [per 11.2. huj.] cum ſectione Λ conveniet, & ſimiliter cum ſectione B, conveniat in punctis Λ, M, & per Γ ipſi ΛM parallela ducatur AΓB: æquale igitur eſt [per 11. 2. hujus] rectangulum KΛΘ quadrato ex AΓ; & rectangulum ΘMK quadrato ex ΓB: quare & KΛΘ rectangulum æquale eſt rectangulo ΘMK; & idcirco ΛΘ ipſi KM eſt æqualis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ΄.

Τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

ΕΣΤΩΣΑΝ συζυγεῖς ἀντικείμεναι, ὧν αἱ διάμετροι συζυγεῖς αἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε· λέγω ὅτι κοιναὶ αὐτῶν εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

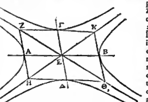
Ἤχθωσαν γὰρ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ σημείων αἱ ΖΑΗ, ΗΔΘ, ΘΒΚ, ΚΓΖ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ. ἐπεζεύχθωσαν οὖν αἱ ΖΕΘ, ΚΕΗ· εὐθεῖαι ἄρα εἰσὶ καὶ διάμετροι τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ δίχα τέμνονται πᾶσαι κατὰ τὸ Ε σημεῖον. καὶ ἐπεὶ * τὸ πρὸς τῇ ΑΒ εἶδος ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ, ἴση δὲ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ· ἕκαστον ἄρα τῶν ἀπὸ ΖΑ, ΑΗ, ΚΒ, ΒΘ τέταρτόν ἐστι τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶ τῶν Α, Β τομῶν αἱ ΖΕΘ, ΚΕΗ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τῶν Γ, Δ τομῶν αἱ αὐταί εἰσιν ἀσύμπτωτοι. τῶν ἄρα κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων κοιναί εἰσιν ἀσύμπτωτοι.

Prop. XVII. *Theor.*

Oppoſitarum ſectionum, quæ conjugatæ appellantur, aſymptoti communes ſunt.

SINT oppoſitæ ſectiones quæ conjugatæ appellantur, quarum diametri conjugatæ AB, ΓΔ, & centrum E: dico earum aſymptotos communes eſſe.

Ducantur enim rectæ ſectiones in punctis A, B, Γ, Δ contingentes, quæ ſint ZAH, HΔΘ, ΘBK, KΓZ: ergo [ex def. prop. 56. 1. huj.] parallelogrammum eſt ZHΘK. jungantur itaque ZEΘ, KEH, & [per 33. 1.] erunt ZEΘ, KEH lineæ rectæ & diametri ipſius parallelogrammi, quæ ad punctum E bifariam ſecabuntur. & quoniam * figura, quæ ad diametrum AB conſtituitur, æqualis eſt quadrato ex ΓΔ, & eſt ΓE æqualis EΔ: unumquodque quadratorum ex ZA, AH; KB, BΘ erit [per 4.2.] quarta pars figuræ quæ conſtituitur ad AB: ergo [per 1. 2. huj.] ZEΘ, KEH ſectionum A, B aſymptoti ſunt. ſimiliter demonſtrabimus ſectionum Γ, Δ eaſdem eſſe aſymptotos. oppoſitarum igitur ſectionum, quas conjugatas dicimus, aſymptoti communes ſunt.



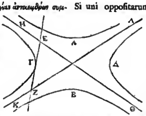
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη΄.

Ἐὰν μιᾷ τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων συμπίπτουσα εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἐφεξῆς τομῶν καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

ΕΣΤΩΣΑΝ κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῇ Γ τις εὐθεῖα συμπιπτέτω ἡ ΕΖ, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς· λέγω

Prop. XVIII. *Theor.*

Si uni oppoſitarum ſectionum conjugatarum conveniat recta linea, quæ producta ad utraſque partes extra ſectionem cadat: cum utraque ſectionum, quæ deinceps ſunt, in uno tantum puncto conveniet.



SINT oppoſitæ ſectiones, quæ conjugatæ dicuntur A, B, Γ, Δ; & ipſi Γ occurrat recta quævis EZ, quæ producta ad utraſque partes extra ſectionem cadat: dico

* Ex def. ſect. conjugat. ad prop. ult. lib. 1.

EZ

ΕΖ cum utraque ſectione Α, Β convenire in uno tantum puncto.

Sint enim ΗΘ, ΚΛ ſectionum aſymptoti: ergo ΕΖ [per 3. 2. huj.] ſecabit utramque ΗΘ, ΚΛ. patet igitur [per 16. 2. huj.] quod cum ſectionibus Α, Β in uno tantum puncto conveniet.

ὅτι συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν Α, Β τομῶν καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

Ἔστωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΗΘ, ΚΛ· ὥστε ἡ ΕΖ συμπίπτει ἑκατέρᾳ τῶν ΗΘ, ΚΛ. φανερὸν οὖν ὅτι καὶ ταῖς Α, Β τομαῖς συμπεσεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

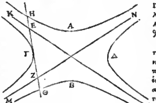
Prop. XIX. *Theor.*

Si in oppoſitis ſectionibus, quæ conjugatæ appellantur, ducatur recta linea, quamvis ipſarum contingens: cum ſectionibus, quæ deinceps ſunt, conveniet; & ad tactum bifariam ſecabitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα ἐπιψαύουσα ἧς ἔτυχε τῶν τομῶν· συμπεσεῖται ταῖς ἐφεξῆς τομαῖς, καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν ἁφήν.

Sint oppoſitæ ſectiones, quæ conjugatæ dicuntur, Α, Β, Γ, Δ; & ſectionem Γ contingat recta quævis ΓΕΖ: dico ΕΖ productam convenire cum ſectionibus Α, Β; & ad punctum Γ bifariam ſecari.



Nam quod ipſa quidem conveniet cum ſectionibus Α, Β [ex præc.] patet. conveniat in punctis Η, Θ: dico ΓΗ ipſi ΓΘ eſſe æqualem. ducantur enim ſectionum aſymptoti ΚΛ, ΜΝ: æquales igitur ſunt [per 17. 2. huj.] ΕΗ, ΖΘ, itemque [per 3. 2. huj.] ΓΕ, ΓΖ: ergo tota ΓΗ toti ΓΘ æqualis erit.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῆς Γ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΕΖ· λέγω ὅτι ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς Α, Β τομαῖς, καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Γ.

Ὅτι μὲν οὖν συμπεσεῖται ταῖς Α, Β τομαῖς, φανερόν. συμπιπτέτω κατὰ τὰ Η, Θ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΓΘ. ἤχθωσαν γὰρ αἱ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΚΛ, ΜΝ· ἴση ἄρα ἡ ΕΗ τῇ ΖΘ, καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΓΖ ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΓΗ ὅλῃ τῇ ΓΘ ἐστὶν ἴση.

Prop. XX. *Theor.*

Si unam oppoſitarum ſectionum, quæ conjugatæ appellantur, recta linea contingat, & per ipſarum centrum ducantur duæ rectæ, una quidem per tactum, altera vero contingenti parallela, quouſque occurrat uni earum ſectionum quæ deinceps ſunt: quæ in occurſu earum ſectionem contingit, parallela erit rectæ per priorem tactum & centrum ductæ; quæ vero per tactus & centrum ducuntur oppoſitarum ſectionum conjugatæ diametri erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτῶν ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν διὰ τῆς ἁφῆς, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἕως οὗ συμπέσῃ μιᾷ τῶν ἐφεξῆς τομῶν· ἡ κατὰ τὴν σύμπτωσιν ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εὐθεῖα παράλληλος ἔσται τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ· αἱ δὲ διὰ τῶν ἁφῶν καὶ τοῦ κέντρου συζυγεῖς ἔσονται διάμετροι τῶν ἀντικειμένων.

Sint oppoſitæ ſectiones, quæ conjugatæ appellantur, quarum diametri conjugatæ ſint ΑΒ, ΓΔ, ac centrum Χ; & ſectionem Α contingat recta ΕΖ, quæ producta conveniat cum ΓΔ in Τ, & juncta recta ΕΧ ad Ξ producatur; & per Χ ducatur ipſi ΕΖ parallela recta ΧΗ quæ producatur ad Ο, & in Η contingat ſectionem recta ΘΗ: dico quod contingens ΘΗ diametro ΧΕ parallela eſt, quodque rectæ ΗΟ, ΕΞ conjugatæ diametri ſunt.

Applicentur enim ordinatim ΕΚ, ΗΛ, ΓΡΠ; illæ vero juxta quas poſſunt applicatæ, ſint ΑΜ, ΓΝ. quoniam igitur ut ΒΑ ad ΑΜ ita eſt

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι συζυγεῖς αἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Χ, καὶ τῆς Α τομῆς ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ, καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ΓΔ κατὰ τὸ Τ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΧ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ διὰ τοῦ Χ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΧΗ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ο, καὶ διὰ τοῦ Η ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΘΗ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΘΗ τῇ ΕΧ, αἱ δὲ ΗΟ, ΕΞ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.

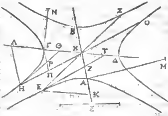
Ἤχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΕΚ, ΗΛ, ΓΡΠ· παρ' ἃς δὲ δύνανται αἱ καταγόμεναι ἔστωσαν αἱ ΑΜ, ΓΝ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΜ οὕτως ἡ

ΝΓ

Digitized by Google

* ΝΓ πρὸς ΓΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΞΛ πρὸς ΛΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΧΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΕ, ὡς δὲ ἡ ΝΓ πρὸς ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΛΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΧΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΛΘ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΧΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΕ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΧΚ πρὸς ΚΕ καὶ τοῦ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΗΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΛΘ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΗΛ πρὸς ΛΧ καὶ ἡ ΗΛ πρὸς ΛΘ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος, ἐκ τοῦ τῆς ΧΚ πρὸς ΚΕ καὶ τοῦ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΕ, ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ λόγῳ ἐκ τοῦ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΧ καὶ τοῦ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΘ, ὧν ὁ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΕ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΧ λόγῳ, ἑκάστη γὰρ τῶν ΕΚ, ΚΖ, ΖΕ ἑκάστῃ τῶν ΧΛ, ΛΗ, ΗΧ παράλληλός ἐστι· λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς ΧΚ πρὸς ΚΕ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΗΛ πρὸς ΛΘ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς Κ, Λ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΚΧ τρίγωνον τῷ ΗΘΛ, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΧΚ τῇ ὑπὸ ΛΗΘ. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΚΧΗ τῇ ὑπὸ ΛΗΧ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΧΗ τῇ ὑπὸ ΘΗΧ ἐστὶν ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ τῇ ΗΘ.

Πεποιήσθω δὴ ὡς ἡ ΠΗ πρὸς τὴν ΗΡ οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς Σ· ἡ Σ ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς παρ' ἣν δύνανται) ἐπὶ τὴν ΗΟ διάμετρον καταγόμεναι ἐν ταῖς Γ, Δ τομαῖς. καὶ ἐπεὶ τῶν Α, Β τομῶν δευτέρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ, καὶ συμπίπτει αὐτῇ ἡ ΕΤ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΤΧ καὶ τῆς ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ· (ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΚΧ παράλληλον ἀγάγωμέν τινα, τὸ ὑπὸ τῆς ΤΧ καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς παραλλήλου πρὸς τῷ Χ, ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ ΓΧ) διὰ δὴ τοῦτο ἐστιν ὡς ἡ ΤΧ πρὸς ΕΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΤΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΧΓ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΤΧ πρὸς ΕΚ οὕτως ἡ ΤΖ πρὸς ΖΕ, τουτέστι τὸ ΤΧΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖΧ τρίγωνον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΤΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΧΓ οὕτω τὸ ΤΧΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΧΓΠ, τουτέστι πρὸς τὸ ΗΘΧ· ὡς ἄρα τὸ ΤΧΖ πρὸς τὸ ΕΖΧ οὕτως τὸ ΤΧΖ πρὸς τὸ ΗΘΧ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΘΧ τρίγωνον τῷ ΕΧΖ. ἔχει δὲ καὶ τὴν ὑπὸ ΘΗΧ γωνίαν τῇ ΧΕΖ γωνίᾳ ἴσην, παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ μὲν ΕΧ τῇ ΗΘ, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΗΧ· ἀντιπεπόνθασιν ἄρα αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΕΧ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΧ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΗΧ τῷ ὑπὸ ΧΕΖ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Σ πρὸς τὴν ΘΗ οὕτως ἡ

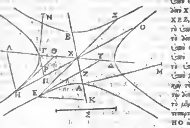


*ΝΓ ad ΓΔ; & [per 37. 1. huj.] ut ΞΛ ad ΛΜ ita rectangulum ΧΚΖ ad quadratum ex ΚΕ, ut vero ΝΓ ad ΓΔ ita quadratum ex ΗΛ ad rectangulum ΧΛΘ: erit [per 11.5.] ut rectangulum ΧΚΖ ad quadratum ex ΕΚ ita quadratum ex ΗΛ ad rectangulum ΧΛΘ. ſed [per 23.6.] rectangulum ΧΚΧ ad quadratum ex ΚΕ rationem compoſitam habet ex ratione ΧΚ ad ΚΕ & ex ratione ΖΚ ad ΚΕ, quadratum vero ex ΗΛ ad rectangulum ΧΛΘ rationem habet compoſitam ex ratione ΗΛ ad ΛΧ & ratione ΗΛ ad ΛΘ: ratio igitur compoſita ex ratione ΧΚ ad ΚΕ & ratione ΖΚ ad ΚΕ eadem eſt cum illa quæ componitur ex ratione ΗΛ ad ΛΧ & ratione ΗΛ ad ΛΘ; quarum quidem ratio ΖΚ ad ΚΕ eadem eſt [per 4.6.] quæ ΗΛ ad ΛΧ: ipſæ enim ΕΚ, ΚΖ, ΖΕ parallelæ ſunt ipſis ΧΛ, ΛΗ, ΗΧ reſpective: reliqua igitur ratio ΧΚ ad ΚΕ eadem erit cum reliqua ΗΛ ad ΛΘ; & latera ſunt proportionalia circa æquales angulos qui ad Κ, Λ; triangulum igitur ΕΚΧ [per 6.6.] ſimile erit triangulo ΗΘΛ, & æquales habebit angulos ſub quibus homologa latera ſubtenduntur: ergo æqualis eſt angulus ΕΧΚ angulo ΛΗΘ. eſt autem [per 29.1.] & totus ΚΧΗ æqualis toti ΛΗΧ: quare reliquus ΕΧΗ reliquo ΘΗΧ eſt æqualis; ac propterea [per 28. 1.] ΕΧ ipſi ΗΘ parallela eſt.

Fiat ut ΠΗ ad ΗΡ ita ΘΗ ad lineam Σ: erit igitur [per 51.1. huj.] Σ dimidia ejus juxta quam poſſunt quæ ad diametrum ΗΟ applicantur in ſectionibus Γ, Δ. & quoniam ſectionum Α, Β ſecunda diameter eſt ΓΔ, & cum ea convenit ipſa ΕΤ: rectangulum igitur ſub ΤΧ & ΕΚ æquale erit [per 38.1. huj.] quadrato ex ΓΧ: (ſi enim à puncto Ε ipſi ΚΧ parallelam duxerimus: rectangulum, quod fit ſub ΤΧ & recta quæ inter Χ & parallelam interjicitur, quadrato ex ΓΧ æquale erit) quare [per 17. & 20. 6.] ut ΤΧ ad ΕΚ ita quadratum ex ΤΧ ad quadratum ex ΧΓ. ut autem ΤΧ ad ΕΚ ita [per 4. 6.] ΤΖ ad ΖΕ, hoc eſt [per 1. 6.] triangulum ΤΧΖ ad triangulum ΕΖΧ; & ut quadratum ΤΧ ad quadratum ΧΓ ita [per 19. & 20. 6.] triangulum ΤΧΖ ad triangulum ΧΓΠ, hoc eſt [per 43. 1. huj.] ad triangulum ΗΘΧ: ut igitur triangulum ΤΧΖ ad triangulum ΕΖΧ ita ΤΧΖ triangulum ad triangulum ΗΘΧ; & ideo [per 9. 5.] triangulum ΗΘΧ æquale eſt triangulo ΧΕΖ. habet autem & angulum ΘΗΧ angulo ΧΕΖ [per 29. 1.] æqualem, quia ΕΧ parallela eſt ipſi ΗΘ, & ΕΖ ipſi ΗΧ; ergo [per 15. 6.] latera circa æquales angulos ſunt reciproce proportionalia; eſt igitur ut ΗΘ ad ΕΧ ita ΕΖ ad ΗΧ: rectangulum igitur ΘΗΧ [per 16. 6.] æquale eſt rectangulo ΧΕΖ. & quoniam eſt ut Σ ad ΘΗ ita

* Nam ΝΓ : ΒΑ :: ΒΑ : ΓΔ. & ΒΑ ∪ ΓΔ :: ΓΔ : ΑΜ.

P H ad H Π, & ut P H ad H Π ita [per 4. 6.] X E ad E Z; parallelæ enim ſunt: quare ut Σ ad Θ H ita X E ad E Z. ut autem Σ ad Θ H, ſumptâ X H communi altitudine, ita eſt [per 1. 6.] rectangulum ſub Σ & X H ad rectangulum Θ H X: & ut X E ad E Z ita quadratum ex X E ad rectangulum X E Z: eſt igitur ut rectangulum ſub Σ & X H ad rectangulum Θ H X ita X E quadratum ad rectangulum X E Z: & permutando ut rectangulum ſub Σ & H X ad quadratum ex E X ita rectangulum Θ H X ad rectangulum X E Z. ſed [ut modo oſtenſum] æquale eſt rectangulum Θ H X rectangulo X E Z: ergo rectangulum ex Σ & H X æquale eſt quadrato ex E X. & rectangulum ex Σ ad H X quarta pars eſt figuræ quæ ad H O conſtituitur; nam & H X [per 30. 1. huj.] eſt dimidia ipſius H O, & [ex modo oſtenſis] Σ dimidia ejus juxta quam poſſunt; quadratum vero ex E X quarta pars eſt quadrati ex E Ξ, nam [per 30. 1. huj.] E X æqualis eſt X Ξ: ergo quadratum ex E Ξ æquale eſt figuræ ad H O conſtitutæ. ſimiliter demonſtrabimus & quadratum ex H O figuræ factæ ad E Ξ eſſe æquale: E Ξ, H O igitur ſectionum oppoſitarum A, B, Γ, Δ diametri conjugatæ ſunt.



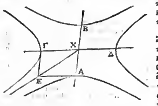
P H πρὸς H Π καὶ ἡ X E πρὸς E Z, παράλληλοι γάρ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Σ πρὸς τὴν Θ H οὕτως ἡ X E πρὸς E Z. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Σ πρὸς Θ H, τῆς X H κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ Σ, X H πρὸς τὸ ὑπὸ Θ H X· ὡς δὲ ἡ X E πρὸς E Z οὕτως τὸ ἀπὸ X E πρὸς τὸ ὑπὸ X E Z· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Σ, X H πρὸς τὸ ὑπὸ Θ H X οὕτως τὸ ἀπὸ X E πρὸς τὸ ὑπὸ X E Z, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ Σ, H X πρὸς τὸ ἀπὸ E X οὕτως τὸ ὑπὸ Θ H X πρὸς τὸ ὑπὸ X E Z. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ Θ H X τῷ ὑπὸ X E Z· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ Σ, H X τῷ ἀπὸ E X. καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ Σ, H X τέταρτον τοῦ πρὸς τὴν H O εἴδους, ἐπεὶ γὰρ H X τῆς H O ἐστὶν ἡμίσεια, καὶ ἡ Σ τῆς παρ' ἣν δύνανται ἡμίσεια· τὸ δὲ ἀπὸ E X τέταρτον τοῦ ἀπὸ τῆς E Ξ, ἴση γὰρ ἡ E X τῇ X Ξ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς E Ξ ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ H O εἴδει. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ H O διάμετρος τὸ πρὸς τὴν E Ξ εἶδος· αἱ ἄρα E Ξ, H O συζυγεῖς εἰσι διάμετροι τῶν A, B, Γ, Δ ἀντικειμένων.

Prop. XXI. *Theor.*

Iiſdem poſitis, oſtendendum eſt punctum in quo contingentes rectæ conveniunt, ad unam aſymptotón eſſe.

SINT oppoſitæ ſectiones conjugatæ A, B, Γ, Δ, & earum diametri A B, Γ Δ: ducanturque contingentes A E, E Γ: dico punctum E ad aſymptoton eſſe.

Eſt enim [ex def. ſect. conjug.] quadratum ex Γ X æquale quartæ parti figuræ quæ ad A B conſtituitur; quadrato autem ex Γ X æquale eſt [per 33. 1.] quadratum ex A E: ergo quadratum ex A E quartæ parti dictæ figuræ erit æquale. jungatur E X: aſymptotos igitur [per 1. 2. huj.] eſt E X: punctum igitur E ad ipſam aſymptoton eſt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, δεικτέον ὅτι ἡ σύμπτωσις τῶν ἐφαπτομένων πρὸς μιᾷ τῶν ἀσυμπτώτων ἐστίν.

ΕΣΤΩΣΑΝ κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ τομαί, ὧν αἱ διάμετροι αἱ A B, Γ Δ, καὶ ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν αἱ A E, E Γ· λέγω ὅτι τὸ E σημεῖον πρὸς τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ Γ X ἴσον ἐστὶ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ A B εἴδους, τῷ δὲ ἀπὸ Γ X ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ A E· καὶ τὸ ἀπὸ A E ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ A B εἴδους. ἐπεζεύχθω ἡ E X· ἀσύμπτωτος ἄρα ἐστὶν ἡ E X· τὸ ἄρα E σημεῖον πρὸς τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐστίν.

Prop. XXII. *Theor.*

Si in oppoſitis ſectionibus, quæ conjugatæ appellantur, ex centro ad quamvis ſectionum ducatur recta linea;

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἐκ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἀχθῇ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν,

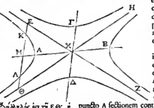
καὶ

καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα μιᾷ τῶν ἐφεξῆς τομῶν καὶ ταῖς ἀσυμπτώτοις· τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων, γινομένων μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῶν ἀσυμπτώτων, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τετραγώνῳ.

& huic parallela altera ducatur, quæ cum una ex ſectionibus quæ deinceps ſunt & cum aſymptotis conveniat: rectangulum contentum ſub ductæ ſegmentis, inter ſectionem & aſymptotos interjectis, quadrato rectæ ex centro ductæ æquale erit.

ΕΣΤΩΣΑΝ κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, ἀσύμπτωτοι δὲ τῶν τομῶν ἔστωσαν αἱ ΕΧΖ, ΗΧΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου Χ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΧΓΔ, καὶ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω τέμνουσα τήν τε ἐφεξῆς τομὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους ἡ ΘΕ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΕΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ.

Τετμήσθω δίχα ἡ ΚΛ κατὰ τὸ Μ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΧ ἐκβεβλήσθω· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῶν Α, Β τομῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΘ· ἡ ἄρα ΕΘ ἐπὶ τὴν ΑΒ τεταγμένως ἐστὶ κατηγμένη, καὶ κέντρον τὸ Χ· αἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι· τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους. τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΘΚΕ· καὶ τὸ ὑπὸ ΘΚΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ.



SINT oppoſitæ ſectiones, quæ conjugatæ appellantur, A, B, Γ, Δ, quarum aſymptoti E X Z, H X Θ, & ex centro X ducatur quævis recta X Γ Δ, eique parallela E B Λ Θ, quæ & ſectionem quæ deinceps eſt & aſymptotos ſecet: dico rectangulum E K Θ quadrato ex Γ X æquale eſſe.

Secetur K Λ bifariam in M & juncta M X producatur: diameter itaq; eſt [per cor. 51. 1. huj.] A B ipſarum A, B ſectionum. & quoniam [per 5. 2. huj.] recta, quæ in puncto A ſectionem contingit, parallela eſt ipſi E Θ: erit E Θ ad diametrum A B ordinatim applicata. centrum autem eſt X: ergo [per 20. 2. huj.] A B, Γ Δ conjugatæ ſunt diametri: eſt igitur quadratum ex Γ X æquale quartæ parti figuræ quæ ad A B conſtituitur. ſed [per 10. 2. huj.] quartæ parti figuræ ad A B æquale eſt rectangulum Θ K E: rectangulum igitur Θ K E quadrato ex Γ X æquale erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

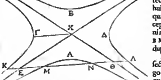
Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἐκ τοῦ κέντρου εὐθεῖά τις ἀχθῇ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα ταῖς ἐφεξῆς τρισὶ τομαῖς· τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων, τῶν γινομένων μεταξὺ τῶν τριῶν τομῶν, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τετραγώνου.

Prop. XXIII. *Theor.*

Si in oppoſitis ſectionibus, quæ conjugatæ appellantur, ex centro ducatur quævis recta linea ad quamvis ſectionum; & huic parallela ducatur, quæ cum tribus, quæ deinceps ſunt, ſectionibus conveniat: rectangulum contentum ſub ſegmentis ductæ inter tres ſectiones interjectis, duplum erit quadrati ejus quæ ex centro.

ΕΣΤΩΣΑΝ κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, κέντρον δὲ τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ ἀπὸ Χ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν προσπιπτέτω εὐθεῖα ἡ ΓΧ, καὶ τῇ ΓΧ παράλληλος ἤχθω τέμνουσα τὰς ἐφεξῆς τρεῖς τομὰς ἡ ΚΛ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΜΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΧ.

Ἤχθωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΕΖ, ΗΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶν ἑκατέρῳ τῶν ὑπὸ ΘΜΕ, ΘΚΕ. ᵃ τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΕ, μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΚΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ, διὰ τὸ



SINT oppoſitæ ſectiones, quæ conjugatæ appellantur, A, B, Γ, Δ, quarum centrum ſit X, & à puncto X ad quamvis ſectionem ducatur recta quævis Γ X, atque huic parallela ſit K Λ, quæ cum tribus deinceps ſectionibus conveniat: dico rectangulum K M Λ quadrati ex Γ X duplum eſſe.

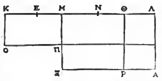
Ducantur aſymptoti ſectionum E Z, H Θ: ergo [per 11. & 22. 2. huj.] quadratum ex Γ X æquale eſt utrilibet rectangulorum Θ M E, Θ K E. ᵃ rectangulum autem Θ M B una cum rectangulo Θ K B æquale eſt rectangulo Λ M B; propter

pter extremas [per 8. & 16.2.] æquales: rectangulum igitur ΛΜΚ quadrati ex ΓΧ duplum erit.

τὰς ἄκρας ἴσας εἶναι· καὶ τὸ ὑπὸ ΛΜΚ ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΧ.

EUTOCIUS.

* Rectangulum autem ΘΜΕ una cum rectangulo ΘΚΕ æquale eſt rectangulo ΛΜΚ, propter extremas æquales.] Sit recta ΛΚ, & ſit ΛΘ æqualis ΚΕ, & ΘΝ ipſi ΕΜ; & ducantur à punctis Μ, Κ perpendiculares ΜΞ, ΚΟ, ita ut ΜΚ ſit æqualis ΜΞ, & ΚΟ æqualis ΚΕ, & compleantur parallelogramma ΞΘ, ΘΛ. quoniam igitur ΜΞ æqualis eſt ΜΚ, hoc eſt ΠΟ; eſtque ΛΘ æqualis ΚΕ, hoc eſt ΚΟ: erit ΘΛ parallelogrammum ipſi ΜΟ æquale. commune apponatur ΞΘ: totum igitur ΛΞ æquale eſt ipſis ΚΘ & ΜΟ; hoc eſt ΘΟ & ΠΡ. & quidem ΛΞ eſt rectangulum ΛΜΚ, & ΘΟ eſt rectangulum ΘΚΕ, & ΠΡ rectangulum ΘΜΚ.



Sed licet & aliter idem demonſtrare. *

Secetur ΜΝ bifariam in Σ: conſtat igitur & ΛΚ in Σ bifariam ſecari, & rectangulum ΘΚΕ æquale eſſe rectangulo ΛΕΚ, quia ΘΚ eſt æqualis ΛΕ. & quoniam ΛΚ ſecatur in partes quidem æquales in Σ, & in partes inæquales in Ε; erit quidem [per 5.2.] rectangulum ΛΕΚ una cum quadrato ex ΣΕ æquale quadrato ex ΚΣ. quadratum autem ex ΣΕ rectangulo ΘΜΕ una cum quadrato ex ΣΜ eſt æquale: ergo quadratum ex ΣΚ æquale eſt rectangulo ΛΕΚ, hoc eſt ΘΚΕ, & rectangulo ΘΜΕ una cum quadrato ex ΣΜ. eadem ratione erit quadratum ex ΣΚ æquale rectangulo ΛΜΚ & quadrato ex ΣΜ: adeoque rectangulum ΘΚΕ una cum rectangulo ΘΜΕ & quadrato ex ΣΜ æquale eſt rectangulo ΛΜΚ & quadrato ex ΣΜ. commune auferatur quadratum ex ΣΜ: reliquum igitur rectangulum ΘΚΕ una cum rectangulo ΘΜΕ eſt æquale rectangulo ΛΜΚ.



* Τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΚΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ, διὰ τὸ τὰς ἄκρας ἴσας εἶναι.] Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΛΚ, καὶ ἴση ἡ ΛΘ ἴση τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΘΝ ἴση τῇ ΕΜ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Μ, Κ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΜΞ, ΚΟ, καὶ κείσθω τῇ ΜΚ ἴση ἡ ΜΞ, τῇ δὲ ΚΕ ἡ ΚΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΞΘ, ΘΛ παραλληλόγραμμα. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΜΚ τῇ ΜΞ, τουτέστι τῇ ΠΟ· ἴση δὲ καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΕΚ, τουτέστι τῇ ΚΟ· ἴσον ἄρα τὸ ΘΛ τῷ ΜΟ. κοινὸν ἐκκείσθω τὸ ΞΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΛΞ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΞΘ, ΜΟ, τουτέστι τοῖς ΘΟ, ΠΡ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΛΞ τὸ ὑπὸ τῶν ΛΜΚ, τὸ δὲ ΘΟ τὸ ὑπὸ ΘΚΕ, καὶ τὸ ΠΡ τὸ ὑπὸ ΘΜΕ ἐστί.

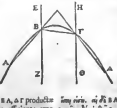
Ἔστι δὲ καὶ ἄλλως δεῖξαι τὸ αὐτό. *

Τετμήσθω ἡ ΜΝ δίχα κατὰ τὸ Σ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΛΚ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Σ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ ΘΚΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΕΚ, ἴση γὰρ ἡ ΘΚ τῇ ΛΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΛΚ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Σ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ὑπὸ ΛΕΚ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΣΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΚΣ. τὸ δὲ ἀπὸ ΣΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΘΜΕ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΣΚ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΛΕΚ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΘΚΕ, καὶ τῷ ὑπὸ ΘΜΕ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ. διὰ ταῦτα δὴ τὸ ἀπὸ ΣΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ· ὥστε τὸ ὑπὸ ΘΚΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΜΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΣΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ καὶ τῷ ἀπὸ ΣΜ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΣΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΚΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΜΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ.

PROP. XXIV. *Theor.*

Si parabolæ duæ rectæ lineæ occurrant, utraque in duobus punctis, & nullius ipſarum occurſus occurſibus alterius contineatur: convenient inter ſeſe extra ſectionem.

SIT parabola ΑΒΓΔ, cui duæ rectæ ΑΒ, ΓΔ occurrant, ita ut nullius ipſarum occurſus alterius occurſibus contineatur: dico eas productas inter ſe convenire.



Ducantur per Β, Γ diametri ſectionis ΕΒΖ, ΗΓΘ: parallelæ igitur ſunt [per cor. 46. 1. huj.] & [per 26. 1. huj.] utraque ſectionem in uno tantum puncto ſecat. jungatur ΒΓ: anguli igitur ΕΒΓ, ΗΓΒ [per 29. 1.] duobus rectis ſunt æquales. verum ΒΑ, ΔΓ productæ angulos duobus rectis minores efficiunt: ergo inter ſeſe extra ſectionem convenient.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ′.

Ἐὰν παραβολῇ δύο εὐθεῖαι συμπίπτωσιν, ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῆς τῆς ἑτέρας συμπτώσεως περιέχηται, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι ἐκτὸς τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ παραβολὴ ἡ ΑΒΓΔ, καὶ τῇ τομῇ δύο εὐθεῖαι συμπιπτέτωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῆς τῆς ἑτέρας συμπτώσεως περιεχέσθω· λέγω ὅτι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις.

Ἤχθωσαν διὰ τῶν Β, Γ διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΕΒΖ, ΗΓΘ· παράλληλοι ἄρα εἰσί, καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον ἑκατέρα τὴν τομὴν τέμνει. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΒΓ, ΗΓΒ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ δὲ ΒΑ, ΔΓ ἐκβαλλόμεναι ἐλάσσονας ποιοῦσι δύο ὀρθῶν· συμπεσοῦνται ἄρα ἀλλήλαις ἐκτὸς τῆς τομῆς.

* Eſt Lemma Pappi quartum.

EUTOCIUS.

Δεῖ σημειώσασθαι ὅτι συμπτώσεις καλεῖ τὰ σημεῖα καθ᾽ ἃ συμβάλλουσι τῇ τομῇ αἱ ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖαι. καὶ δεῖ, φησὶ, παρατηρεῖν ὅτι ἐκτὸς εἶναι ἀλλήλων τὰ σημεῖα, ἀλλὰ μὴ ὡς τὰ ΑΓ, ΒΔ. δεῖ δὲ εἰδέναι ὅτι καὶ ἐπ᾽ ἐφαπτομένων τὰ αὐτὰ συμβαίνει.

Animadvertendum eſt illum *occurſus* appellare puncta in quibus ΑΒ, ΓΔ ſectioni occurrunt. &, *inquit*, obſervari oportere ut puncta extra ſeſe ponantur, non ad modum ipſarum ΑΓ, ΒΔ. & ſciendum eſt eadem etiam evenire in contingentibus.

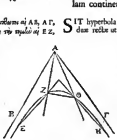
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε΄.

Ἐὰν ὑπερβολῇ δύο εὐθεῖαι συμπίπτωσιν, ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῆς τῆς ἑτέρας συμπτώσεως περιέχηται· συμπεσοῦνται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι, ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

Prop. XXV. *Theor.*

Si hyperbolæ occurrant duæ rectæ lineæ, utraque in duobus punctis; nullius autem ipſarum occurſus alterius occurſibus contineatur: convenient inter ſeſe, extra ſectionem quidem, ſed tamen intra angulum qui hyperbolam continet.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ τεμνέτωσαν δύο εὐθεῖαι τὴν τομὴν αἱ ΕΖ, ΗΘ, καὶ μηδετέρας αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας περιεχέσθω· λέγω ὅτι αἱ ΕΖ, ΗΘ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς ὑπὸ ΓΑΒ γωνίας.



Ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ ΑΖ, ΑΘ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΕΖ, ΗΘ ἐκβαλλόμεναι τέμνουσι τὰς ΑΖΘ, ΑΘΖ γωνίας, εἰσὶ δὲ αἱ εἰρημέναι γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες· αἱ ΕΖ, ΗΘ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις, ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας. ὁμοίως δὴ δείξομεν κἂν ἐφαπτόμεναι ὦσι τῆς τομῆς αἱ ΕΖ, ΗΘ.

SIT hyperbola, cujus aſymptoti ΑΒ, ΑΓ, & duæ rectæ ut ΒΖ, ΗΘ ſectioni occurrant, ita ut nullius ipſarum occurſus occurſibus alterius contineatur: dico ΒΖ, ΗΘ productas extra ſectionem quidem, ſed tamen intra angulum ΓΑΒ inter ſe convenire.

Junctæ enim ΑΖ, ΑΘ producantur, & jungatur ΖΘ. Et quoniam ΕΖ, ΗΘ productæ ſecant angulos ΑΖΘ, ΑΘΖ, & [per 17. 1.] ſunt dicti anguli duobus rectis minores; rectæ ΕΖ, ΗΘ convenient inter ſe extra ſectionem quidem, ſed tamen intra angulum ΒΑΓ. ſimiliter demonſtrabimus, ſi ΕΖ, ΗΘ fuerint contingentes.

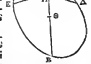
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ΄.

Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Prop. XXVI. *Theor.*

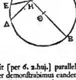
Si in ellipſi vel circuli circumferentia duæ rectæ lineæ non tranſeuntes per centrum ſe invicem ſecent; bifariam ſeſe non ſecabunt.

ΕΙ γὰρ δυνατὸν, ἐν ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ, δύο εὐθεῖαι, αἱ ΓΔ, ΕΖ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Α, Β.



Ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ, τὴν ΕΖ δίχα τέμνουσα· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τῇ ΓΔ. ὥστε καὶ ἡ ΕΖ παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ ΓΔ, ΕΖ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

SI enim fieri poteſt, in ellipſi vel circuli circumferentia, duæ rectæ ΓΔ, ΕΖ non tranſeuntes per centrum ſeſe bifariam ſecent in Η; ſitque Θ centrum ſectionis, & juncta ΗΘ ad Α, Β puncta producatur.

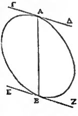


Quoniam igitur ΑΒ diameter eſt, ipſam ΕΖ bifariam ſecans; quæ ad Α ſectionem contingit [per 6. 2. huj.] parallela erit ipſi ΕΖ. ſimiliter demonſtrabimus eandem etiam ipſi ΓΔ eſſe parallelam: ergo [per 30. 1.] ΕΖ eſt parallela ipſi ΓΔ, quod eſt abſurdum. non igitur ΕΖ, ΓΔ ſeſe bifariam ſecant.

Prop. XXVII. *Theor.*

Si ellipſim vel circuli circumferentiam duæ rectæ lineæ contingant: ſi quidem ea quæ tactus conjungit per centrum ſectionis tranſeat, contingentes rectæ ſibi ipſis erunt parallelæ; ſin minus, convenient inter ſeſe ad eaſdem centri partes.

SIT ellipſis, vel circuli circumferentia AB, quam contingant duæ rectæ ΓΑΔ, ΕΒΖ, jungaturque AB, & primo tranſeat per centrum: dico ΓΔ ipſi EZ parallelam eſſe.



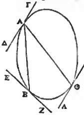
Quoniam enim AB eſt diameter ſectionis, & ΓΔ ipſam in A contingit; erit [per 17.1.huj.] ΓΔ parallela rectis quæ ad diametrum AB ordinatim applicantur. ſimili ratione EZ erit eiſdem parallela: ergo [per 30.1.] ΓΔ parallela eſt ipſi EZ.

Sed AB per centrum non tranſeat, ut ſit in ſecunda figura, & ducatur AΘ diameter, & per Θ contingens ΚΘΛ: parallela eſt igitur [per caſ. 1.] ΚΛ ipſi ΓΔ: ergo EZ producta ad eaſdem partes centri, in quibus eſt AB, cum ΓΔ conveniet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ΄.

Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύωσιν· ἐὰν μὲν ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ᾖ, παράλληλοι ἔσονται αἱ ἐφαπτόμεναι· ἐὰν δὲ μὴ, συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ κέντρου.

ΕΣΤΩ ἐλλείψεως, ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ AB, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αὐτῆς αἱ ΓΑΔ, ΕΒΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AB, καὶ ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ.



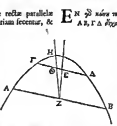
Ἐπεὶ γὰρ διάμετρός ἐστιν ἡ AB τῆς τομῆς, καὶ ἐφάπτεται αὐτῆς κατὰ τὸ Α ἡ ΓΔ· ἡ ΓΔ ἄρα παράλληλός ἐστι ταῖς ἐπὶ τὴν AB τεταγμένως κατηγμέναις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ παράλληλός ἐστι ταῖς αὐταῖς· καὶ ἡ ΓΔ ἄρα τῇ ΕΖ παράλληλός ἐστι.

Μὴ ἐρχέσθω δὲ ἡ AB διὰ τοῦ κέντρου, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἤχθω διάμετρος ἡ ΑΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἐφαπτομένη ἡ ΚΘΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΕΖ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΓΔ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ κέντρου, ἐν οἷς ἐστιν ἡ AB.

Prop. XXVIII. *Theor.*

Si in coni ſectione vel circuli circumferentia, duas rectas parallelas recta linea biſariam ſecet: erit illa diameter ſectionis.

IN ſectione enim coni duæ rectæ parallelæ AB, ΓΔ in punctis E, Z biſariam ſecentur, & juncta EZ producatur: dico illam eſſe ſectionis diametrum.



Si enim non eſt, ſit ΗΘΖ diameter, ſi fieri poſſit: ergo [per 5. vel 6. 2.huj.] quæ in H contingit ſectionem parallela eſt ipſi AB: quare [per 30. 1.] & ipſi ΓΔ. eſt autem ΗΘ diameter: ergo [per defin. 10.] ΓΘ, ΘΔ æquales ſunt, quod eſt abſurdum; poſuimus enim ΓE æqualem EΔ. non igitur ΗΘ diameter eſt ſectionis. ſimiliter demonſtrabimus neque aliam quampiam eſſe diametrum præter ipſam EZ: ergo EZ ſectionis diameter erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη΄.

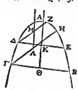
Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖά τις δίχα τέμνῃ· διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

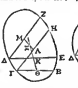
ΕΝ γὰρ κώνου τομῇ δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ AB, ΓΔ δίχα τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Ε, Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΖ ἐκβεβλήσθω· λέγω ὅτι διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

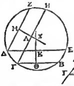
Εἰ γὰρ μὴ, ἔστω, εἰ δυνατὸν, ἡ ΗΘΖ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ AB· ὥστε ἡ αὐτὴ παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ. καὶ ἔστι διάμετρος ἡ ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΓΘ τῇ ΘΔ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ ἴση. οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΗΘ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΕΖ· ἡ ΕΖ ἄρα διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

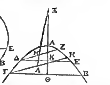
EUTOCIUS.

Ἄξιον ἐπισκέψασθαι πῶς δυνατὸν ἐν ἐπιπέδῳ κειμένης τῆς γραμμῆς, πότερον κύκλου ἐστὶ περιφέρεια, ἤ τις ἑτέρα τῶν τριῶν τοῦ κώνου τομῶν, ἢ παρὰ ταύτας. ἔστω δὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ προκείσθω τὸ εἶδος αὐτῆς ἐπισκέψασθαι τῆς εἰρημένης γραμμῆς. Εἰλήφθω τινὰ σημεῖα ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὰ Γ, Δ, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Γ, Δ σημείων παράλληλοι ἀλλήλαις εὐθεῖαί τινες αἱ ΓΒ, ΔΕ, ἐντὸς ἀπολαμβανόμεναι τῆς γραμμῆς· καὶ πάλιν ἀπὸ τῶν Γ, Δ ἕτεραι παράλληλοι αἱ ΓΗ, ΔΖ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα αἱ μὲν ΓΒ, ΔΕ κατὰ τὰ Θ, Κ, αἱ δὲ ΓΗ, ΔΖ κατὰ τὰ Λ, Μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΚ, ΛΜ. εἰ μὲν οὖν πᾶσαι αἱ τῇ ΒΓ παράλληλοι ὑπὸ τῆς ΘΚ διχοτομοῦνται, πᾶσαι δὲ αἱ τῇ ΓΗ ὑπὸ τῆς









ΜΛ, μία ἐστὶ τῶν τοῦ κώνου τομῶν ἡ ΑΒΓ, διαμέτρους ἔχουσα τὰς ΘΚ, ΜΛ· εἰ δὲ μή, οὔ. Πάλιν ὁποία τῶν τεσσάρων ἐστὶν εὑρήσομεν ἐκβάλλοντες εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη τὰς ΘΚ, ΛΜ. ἤτοι γὰρ παράλληλοί εἰσι, καὶ ἔστι παραβολή· ἢ ἐπὶ τὰ Θ, Λ μέρη συμπίπτουσι, καὶ ἔστιν ἔλλειψις ἢ κύκλος· ἢ ἐπὶ τὰ ἕτερα, καὶ ἔστιν ὑπερβολή. τὴν δὲ ἔλλειψιν τοῦ κύκλου διακρινοῦμεν ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῆς συμπτώσεως τῶν ΚΘ, ΜΛ, ὅπερ κέντρον γίνεται. εἰ γὰρ ἴσαι εἰσὶν αἱ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὴν γραμμὴν προσπίπτουσαι, κύκλου ἐστὶ περιφέρεια ἡ ΑΒΓ· εἰ δὲ μή, ἔλλειψις.

Ἔστι δὲ αὐτὰς διακρῖναι καὶ ἄλλως, ἀπὸ τῶν τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον κατηγμένων, οἷον τῶν ΓΘ, ΔΚ. εἰ μὲν γὰρ εἴη ὡς τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΚ οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ, παραβολή ἐστιν· εἰ δὲ τὸ ἀπὸ ΘΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ, ὑπερβολή· εἰ δὲ ἐλάσσονα, ἔλλειψις.

Καὶ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων δυνατόν ἐστιν αὐτὰς διακρῖναι ἀναμνησθέντας τῶν ἀνωτέρω εἰρημένων αὐταῖς ὑπάρχειν.

Non inutile erit, datâ in plano curvâ lineâ, inveſtigare utrum circuli circumferentia ſit, vel una è coni ſectionibus, necne. ſit ea ΑΒΓ, & oporteat ſpeciem ejus inveſtigare. Sumantur in propoſita linea puncta quævis Γ, Δ, per quæ ducantur intra lineam rectæ parallelæ ΓΒ, ΔΕ: & rurſus ab iiſdem punctis aliæ parallelæ ducantur ΓΗ, ΔΖ, bifariamque ſecentur ΓΒ, ΔΕ quidem in Θ, Κ punctis, ΓΗ, ΔΖ vero in Λ, Μ; & jungantur ΘΚ, ΛΜ. ſi igitur omnes rectæ quæ ipſi ΓΒ parallelæ ſunt, à ΘΚ bifariam dividantur; & quæ parallelæ ſunt ipſi ΓΗ à recta ΜΛ; erit ΑΒΓ una è coni ſectionibus, cujus diametri ΘΚ, ΜΛ; ſin minus, non erit. Rurſus quænam ſit ex quatuor ſectionibus comperiemus, rectas ΘΚ, ΛΜ in infinitum producentes ex utraque parte. vel enim parallelæ ſunt, & eſt [per 46. 1. huj.] parabola; vel ad partes quidem Θ, Λ inter ſe conveniunt, & [per 47. 1. huj.] eſt ellipſis, aut circulus; vel ad alteras partes, & eſt hyperbola. ellipſim vero à circulo diſtinguemus ex puncto Ξ, quo concurrunt rectæ ΚΘ, ΜΛ, quod eſt centrum. ſi enim rectæ ab eo ad curvam ductæ ſint æquales, conſtat ΑΒΓ circuli circumferentiam eſſe; ſin minus, ellipſim.

Poſſumus & aliter ipſas cognoſcere ex iis quæ ad diametrum ordinatim applicantur, videlicet ΓΘ, ΔΚ. nam ſi fuerit ut quadratum ex ΓΘ ad quadratum ex ΔΚ ita ΘΛ ad ΛΚ, parabola erit; at ſi quadratum ex ΓΘ ad quadratum ex ΔΚ majorem quidem habuerit rationem quam ΘΛ ad ΛΚ, hyperbola; ſi vero minorem, ellipſis.

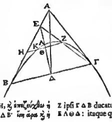
Et etiam ex rectis contingentibus eaſdem diſcernere licebit, ſi ea, quæ ſuperius dicta ſunt, ipſis competere meminerimus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν· ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι ἤχθωσαν αἱ ΑΒ, ΑΓ, συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Α, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΓ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω διάμετρος ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ· τεμεῖ δὴ τὴν τομήν. τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Ζ τῇ ΓΔΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΚΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΛΘΔ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ· ἴση ἄρα καὶ ἡ



PROP. XXIX. *Theor.*

Si duæ rectæ coni ſectionem vel circuli circumferentiam contingentes occurrant inter ſe; recta connectens punctum concurſûs earundem & illud in quo ea quæ conjungit tactus bifariam dividitur ſectionis diameter erit.

SIT coni ſectio, vel circuli circumferentia, quam contingant ΑΒ, ΑΓ, in puncto Α convenientes, & ducta ΒΓ ſecetur bifariam in Δ, & jungatur ΑΔ: dico ΑΔ eſſe diametrum ſectionis.

Si enim fieri poteſt, ſit ΔΕ diameter, & jungatur ΓΕ, quæ [per 35. & 36. 1. huj.] ſectionem ipſam ſecabit. ſecet autem in Ζ, & per Ζ ipſi ΓΔΒ ducatur parallela ΖΚΗ, & jungatur ΕΛΘΔ: itaque quoniam ΓΔ æqualis eſt ipſi ΔΒ,

erit

erit [per 4. 6.] ZΘ quoque ipſi ΘH æqualis. & quoniam recta, quæ in A contingit ſectionem, parallela eſt ipſi BΓ, & eſt ZH eidem parallela: ergo ZH parallela eſt rectæ ſectionem in A tangenti: & idcirco [per 46 & 47. 1] ZΘ eſt æqualis ipſi ΘK, quod fieri minime poteſt: non igitur diameter eſt ΔE. ſimiliter demonſtrabimus nullam aliam eſſe diametrum præter AΔ.

ZΘ τῇ ΘH. καὶ ἐπεὶ ἡ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ BΓ, καὶ ἔστι δὲ καὶ ἡ ZH τῇ BΓ παράλληλος· καὶ ἡ ZH ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένῃ· ἴση ἄρα ἡ ZΘ τῇ ΘK, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΔE. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις, πλὴν τῆς AΔ.

Prop. XXX. *Theor.*

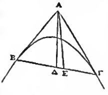
Si duæ rectæ lineæ coni ſectionem vel circuli circumferentiam contingentes concurrant: diameter, quæ à puncto concurſus ducitur, rectam tactus conjungentem bifariam ſecabit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν· ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἀγομένη διάμετρος δίχα τεμεῖ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν.

SIT coni ſectio, vel circuli circumferentia BΓ, & ducantur duæ rectæ BA, AΓ ipſam contingentes, quæ conveniant in A, & jungatur BΓ, & per A ducatur ſectionis diameter AΔ: dico BΔ ipſi ΔΓ æqualem eſſe.

ἜΣΤΩ κώνου τομή, ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ BΓ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῆς δύο ἐφαπτόμεναι αἱ BA, AΓ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ A, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BΓ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ A διάμετρος τῆς τομῆς ἡ AΔ· λέγω ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ BΔ τῇ ΔΓ.



Non enim, ſed, ſi fieri poteſt, ſit BE æqualis EΓ, & jungatur AE: ergo [per præc.] AE diameter eſt ſectionis. eſt autem & AΔ, quod eſt abſurdum. ſive enim ſectio ſit ellipſis, punctum A, in quo conveniunt diametri, centrum erit ſectionis extra ipſam, quod fieri non poteſt: ſive ſit parabola, diametri ipſius [contra corol. 51. 1. huj.] inter ſe convenient: ſi vero hyperbola ſit, lineæ BA, AΓ ſectioni occurrunt, & unius occurſus alterius occurſu non continetur, quare convenient inter ſeſe [per 25. 2. huj.] intra angulum hyperbolam continentem. ſed & in ipſo angulo, (punctum enim A ſupponitur centrum, cum ΔA, AE diametri ſint) quod eſt abſurdum: non igitur BE ipſi EΓ æqualis erit.

Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω ἴση ἡ BE τῇ EΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AE· ἡ AE ἄρα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ AΔ, ὅπερ ἄτοπον. εἴτε γὰρ ἔλλειψίς ἐστιν ἡ τομή, τὸ A, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ διάμετροι, κέντρον ἔσται τῆς τομῆς ἐκτός, ὅπερ ἀδύνατον· εἴτε παραβολή ἐστιν ἡ τομή, συμπίπτουσιν ἀλλήλαις αἱ διάμετροι· εἴτε ὑπερβολή ἐστι, καὶ συμπίπτουσι τῇ τομῇ αἱ BA, AΓ, μὴ περιέχουσαι τὰς ἑαυτῶν συμπτώσεις· ἐντὸς ἄρα ἔσται τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν γωνίας. ἀλλὰ καὶ ἐπ' αὐτῆς, (κέντρον γὰρ ὑπόκειται τὸ A, διαμέτρων οὐσῶν τῶν ΔA, AE) ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ BE τῇ EΓ ἐστὶν ἴση.

Prop. XXXI. *Theor.*

Si utramque oppoſitarum ſectionum duæ rectæ lineæ contingant: ſi quidem recta tactus conjungens per centrum tranſeat, contingentes rectæ parallelæ erunt; ſin minus, convenient inter ſe ad partes centri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ἐὰν ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται· ἐὰν μὲν ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου πίπτῃ, παράλληλοι ἔσονται αἱ ἐφαπτόμεναι· ἐὰν δὲ μή, συμπεσοῦνται ἐπὶ ταὐτὰ τῷ κέντρῳ.

SINT oppoſitæ ſectiones A, B, & ipſas contingant ΓAΔ, EBZ in A, B; recta vero, quæ ex A ad B ducitur, primum tranſeat per centrum ſectionum: dico ΓΔ ipſi EZ parallelam eſſe.

ἜΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν ἔστωσαν αἱ ΓAΔ, EBZ κατὰ τὰ A, B, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη πιπτέτω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου τῶν τομῶν· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ EZ.

Quoniam enim oppoſitæ ſectiones ſunt, quarum diameter AB, & unam earum contingit ΓΔ in puncto A: igitur quæ per B ipſi ΓΔ parallela ducitur, [per 48. & 50. 1. huj.] ſectionem continget. contingit autem EZ: ergo ΓΔ ipſi EZ eſt parallela.

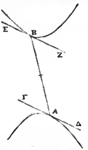
Ἐπεὶ γὰρ ἀντικείμεναί εἰσι τομαί, ὧν διάμετρός ἐστιν ἡ AB, καὶ μιᾶς αὐτῶν ἐφάπτεται ἡ ΓΔ κατὰ τὸ A· ἡ ἄρα διὰ τοῦ B τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς. ἐφάπτεται δὲ καὶ ἡ EZ· παράλληλός ἐστιν ἄρα ἡ ΓΔ τῇ EZ.

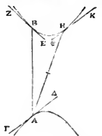
*

Μὴ

Μὴ ἔστω δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β διὰ τοῦ κέντρου τῶν τομῶν, καὶ ἤχθω διάμετρος τῶν τομῶν ἡ ΑΗ, καὶ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΘΚ· ἡ ΘΚ ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ὑπερβολῆς εὐθεῖαι ἐφάπτονται αἱ ΕΖ, ΘΚ· συμπεσοῦνται ἄρα. καὶ ἔστι παράλληλος ἡ ΘΚ τῇ ΓΔ· καὶ αἱ ΓΔ, ΕΖ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. καὶ φανερόν, ὅτι ἐπὶ ταὐτὰ τῷ κέντρῳ.

Sed non tranſeat per centrum ſectionum quæ ex A ad B ducitur, ducaturque ſectionum diameter AH, & ΘK ſectionem in H contingens: ergo ΘK parallela eſt ipſi ΓΔ. & quoniam hyperbolam duæ rectæ contingunt EZ, ΘK; [per 25. 2.huj.] convenient inter ſeſe. eſt autem ΘK ipſi ΓΔ parallela: quare & ΓΔ, EZ productæ inter ſe convenient. & patet concurſum fieri ad eaſdem partes rectæ EZ ad quas eſt centrum.





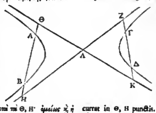
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβʹ.

Ἐὰν ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖαι συμπίπτωσι καθ' ἓν ἐφαπτόμεναι, ἢ κατὰ δύο τέμνουσαι, ἐκβληθεῖσαι δὲ αἱ εὐθεῖαι συμπίπτωσιν· ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

Prop. XXXII. *Theor.*

Si utrique oppoſitarum ſectionum rectæ lineæ occurrant, ipſas vel in uno puncto contingentes, vel in duobus ſecantes, quæ productæ inter ſe conveniant: punctum, in quo conveniunt, erit in angulo qui deinceps eſt angulo ſectionem continenti.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαί, καὶ τῶν ἀντικειμένων ἤτοι καθ' ἓν ἐφαπτόμεναι, ἤτοι κατὰ δύο τέμνουσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐκβαλλόμεναι συμπιπτέτωσαν· λέγω ὅτι ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.



Ἔστωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΖΗ, ΘΚ· ἡ ΑΒ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις. συμπιπτέτω κατὰ τὰ Θ, Η· ὁμοίως καὶ ἡ ΓΔ συμπεσεῖται κατὰ τὰ Ζ, Κ. καὶ ἐπεὶ ὑπόκεινται συμπίπτουσαι αἱ ΖΚ, ΘΗ, φανερὸν ὅτι ἤτοι ἐν τῷ ὑπὸ τῆς ΘΛΖ γωνίας τόπῳ, ἢ ἐν τῷ ὑπὸ τῆς ΚΛΗ συμπεσοῦνται. ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἐφάπτωνται.

SINT oppoſitæ ſectiones, quas vel in uno puncto contingant, vel in duobus ſecent rectæ AB, ΓΔ; & productæ inter ſe conveniant: dico punctum, in quo conveniunt, eſſe in angulo qui deinceps eſt angulo ſectionem continenti.

Sint ſectionum aſymptoti ZH, ΘK: ergo [per 3. vel 8. 2. huj.] AB producta aſymptotis occurret. occurrat in Θ, H punctis. ſimiliter ΓΔ occurret aſymptotis in Z, K. & quoniam ſupponimus ZK, ΘH inter ſe convenire, patet eas occurſuras vel in angulo ΘΛZ, vel in KΛH. ſimiliter idem demonſtrari poteſt, ſi AB, ΓΔ ſectiones contingant.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγʹ.

Ἐὰν μιᾷ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα συμπίπτουσα, ἐκβληθεῖσα δὲ ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς το-

Prop. XXXIII. *Theor.*

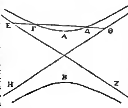
Si uni oppoſitarum ſectionum recta linea occurrens ex utraque parte producta

 extra

extra ſectionem cadat: cum altera ſectione non conveniet, ſed tranſibit per tres locos; quorum unus quidem eſt ſub angulo ſectionem continente, duo vero reliqui ſub iis angulis qui eidem ſunt deinceps.

μῆς· οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τομῇ, ἀλλὰ πεσεῖται διὰ τῶν τριῶν τόπων, ὧν ἐστὶν εἷς μὲν ὁ ὑπὸ τῆς περιεχούσης γωνίας τὴν τομήν, δύο δὲ οἱ ὑπὸ τὰς γωνίας τὰς ἐφεξῆς τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

SInt oppoſitæ ſectiones A, B: & ſectionem A ſecet quævis recta ΓΔ, quæ producta ex utraque parte extra ſectionem cadat: dico ΓΔ cum B ſectione non convenire.



Ducantur enim aſymptoti ſectionum EZ, HΘ: ergo [per 8. 2. huj.] ΓΔ producta aſymptotis occurret. non occurret autem in aliis punctis quam in E, Θ: ergo non conveniet cum ſectione B. & patet eam per tres locos dictos tranſire. ſi enim cum utraque oppoſitarum ſectionum conveniret, nulli ipſarum in duobus punctis occurreret: quod ſi in duobus punctis occurreret; oppoſitæ ſectioni prorſus non occurreret, uti modo eſt oſtenſum.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ τὴν A τεμνέτω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ οὐ συμπεσεῖται τῇ B τομῇ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ EZ, HΘ· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις. οὐ συμπίπτει δὲ κατ' ἄλλα ἢ τὰ E, Θ· ὥστε οὐ συμπεσεῖται οὐδὲ τῇ B τομῇ. καὶ φανερὸν ὅτι διὰ τῶν τριῶν τόπων πεσεῖται. ἐὰν γὰρ ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ τις εὐθεῖα, οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα. εἰ γὰρ συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα, διὰ τὸ προδεδειγμένον, τῇ ἑτέρᾳ τομῇ οὐ συμπεσεῖται.

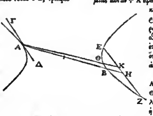
Prop. XXXIV. *Theor.*

Si unam oppoſitarum ſectionum recta quævis contingat, & huic parallela ducatur in altera ſectione: quæ à tactu ad medium rectæ parallelæ ducitur, oppoſitarum ſectionum diameter erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖά τις ἐπιψαύῃ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ· ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ μέσην τὴν παράλληλον ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων.

SInt oppoſitæ ſectiones A, B, & earum unam A contingat in A puncto recta ΓΔ, ipſique ΓΔ parallela ducatur EZ in altera ſectione, & ſecetur EZ in H bifariam, & jungatur AH: dico AH oppoſitarum ſectionum diametrum eſſe.



Si enim fieri poteſt, ſit AΘK diameter. ergo [per 31. 2. huj.] quæ in Θ ſectionem contingit, parallela eſt ipſi ΓΔ, ſed [ex hyp.] ΓΔ ipſi EZ eſt parallela: EK igitur ipſi KZ [per 47. 1. huj.] eſt æqualis, quod fieri non poteſt; eſt enim EH æqualis HZ. igitur AΘ non eſt diameter oppoſitarum ſectionum: ergo ipſa AB ea eſt.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ μιᾶς αὐτῶν τῆς A ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ κατὰ τὸ A, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ EZ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ H, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AH· λέγω ὅτι ἡ AH διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἡ AΘK· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ, ἀλλὰ ἡ ΓΔ παράλληλός ἐστι τῇ EZ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ EK τῇ KZ, ὅπερ ἀδύνατον· ἡ γὰρ EH τῇ HZ ἐστὶν ἴση. οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ AΘ τῶν ἀντικειμένων· ἡ AB ἄρα.

Prop. XXXV. *Theor.*

Si diameter in una oppoſitarum ſectionum rectam lineam bifariam ſecet: quæ in termino diametri contingit alteram ſectionem, rectæ bifariam ſectæ erit parallela.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

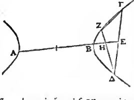
Ἐὰν ἡ διάμετρος ἐν μιᾷ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖάν τινα δίχα τέμνῃ, ἡ ἐπιψαύουσα τῆς ἑτέρας τομῆς κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

ΕΣΤΩ

Digitized by Google

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, ἡ δὲ διάμετρος αὐτῶν ἡ ΑΒ τεμνέτω ἐν τῇ Β τομῇ δίχα τὴν ΓΔ εὐθεῖαν κατὰ τὸ Ε· λέγω ὅτι ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη τῆς τομῆς παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τῇ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς παράλληλος ἡ ΔΖ· ἴση ἄρα ἡ ΔΗ τῇ ΗΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΕΗ, ὅπερ ἀδύνατον· ἐκβαλλομένη γὰρ αὐτῇ συμπίπτει. οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς, οὐδὲ ἄλλη τις διὰ τοῦ Δ πλὴν τῆς ΓΔ.



SINT oppoſitæ ſectiones A, B, quarum diameter AB, in B ſectione, rectam ΓΔ bifariam ſecet in E: dico rectam, quæ in puncto A ſectionem contingit, ipſi ΓΔ parallelam eſſe.

Si enim fieri poteſt, ſit recta ſectionem in A contingenti parallela ΔZ: ergo [per 48. 1. huj.] ΔH ipſi HZ eſt æqualis, ſed ΔE æqualis eſt ipſi EΓ: parallela igitur [per 2. 6.] eſt ΓZ ipſi EH, quod abſurdum: producta enim ΓZ [per 22. 1. huj.] cum ipſa EH conveniet. quare neque ΔZ rectæ ad A contingenti eſt parallela, neque alia quæpiam per Δ ducta præter ipſam ΓΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛʹ.

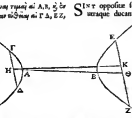
Ἐὰν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖαι ἀχθῶσι παράλληλοι οὖσαι, ἡ τὰς διχοτομίας αὐτῶν ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων.

Prop. XXXVI. *Theor.*

Si in utraque oppoſitarum ſectionum rectæ lineæ inter ſe parallelæ ducantur: ipſarum medium conjungens recta oppoſitarum ſectionum diameter erit.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἐν ἑκατέρᾳ αὐτῶν ἤχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΔ, ΕΖ, καὶ ἔστωσαν παράλληλοι, καὶ τετμήσθω ἑκατέρα αὐτῶν δίχα κατὰ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ· λέγω ὅτι ἡ ΗΘ διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων.

Εἰ γὰρ μὴ, ἔστω ἡ ΗΚ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ, ὥστε καὶ τῇ ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΚ τῇ ΚΖ, ὅπερ ἀδύνατον, ἐπεὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΖ ἐστὶν ἴση. οὐκ ἄρα ἡ ΗΚ διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων· ἡ ΗΘ ἄρα.



SINT oppoſitæ ſectiones A, B, & in earum utraque ducantur rectæ ΓΔ, EZ inter ſe parallelæ, & in punctis H, Θ bifariam ſecentur, & jungatur HΘ: dico HΘ diametrum eſſe oppoſitarum ſectionum.

Si enim non eſt, ſit HK: ergo [per 5. 2. huj.] quæ in A ſectionem contingit ipſi ΓΔ eſt parallela; & idcirco ipſi EZ: æquales igitur [per 48. 1. huj.] ſunt EK, KZ, quod fieri non poteſt, quoniam & EΘ, ΘZ ſunt æquales. ergo HK non eſt diameter oppoſitarum ſectionum: quare HΘ ea eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζʹ.

Ἐὰν ἀντικειμένας εὐθεῖα τέμνῃ μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ἡ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὸ κέντρον ἐπιζευγνυμένη διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων ἡ λεγομένη ὀρθία· πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη παράλληλος τῇ δίχα τεμνομένῃ.

Prop. XXXVII. *Theor.*

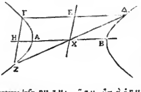
Si oppoſitas ſectiones recta linea ſecet, non tranſiens per centrum: quæ à medio ipſius ad centrum ducitur oppoſitarum ſectionum diameter erit ea quæ recta appellatur; tranſverſa vero diameter ipſi conjugata eſt ea quæ à centro ducitur parallela rectæ bifariam ſectæ.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τὰς Α, Β τεμνέτω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσα, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΧΕ, καὶ διὰ τοῦ

SINT oppoſitæ ſectiones A, B, & ipſas ſecet recta ΓΔ non tranſiens per centrum, quæ bifariam in E dividatur, ſitque ſectionum centrum X, & jungatur XE, & per X ipſi ΓΔ parallela

lela ducatur A B: dico A B, E X diametros eſſe conjugatas oppoſitarum ſectionum.

Jungatur enim Δ X, & ad Z producatur, & jungatur Γ Z: æqualis igitur eſt [per 30. 1. huj.] Δ X ipſi X Z. eſt autem [ex conſtr.] & Δ E æqualis E Γ: ergo [per 2. 6.] E X eſt parallela Γ Z. producatur B A ad H. & quoniam Δ X, X Z ſunt [per 30. 1. huj.] æquales; & E X, Z H [per 4. 6.] æquales erunt; & propterea ipſæ Γ H, Z H: ergo [per 5. 2. huj.] quæ ad A ſectionem contingit parallela eſt ipſi Γ Z, quare [per 30. 1.] & ipſi E X. rectæ igitur A B, E X [per 16. 1. huj.] oppoſitarum ſectionum conjugatæ ſunt diametri.



Χ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι αἱ ΑΒ, ΕΧ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι τῶν τομῶν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΧ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΧ τῇ ΧΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ τῇ ΖΓ. ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Η. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΧ τῇ ΧΖ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΧ τῇ ΖΗ, ὥστε καὶ ἡ ΓΗ ἴση τῇ ΖΗ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓΖ, ὥστε καὶ τῇ ΕΧ. αἱ ΑΒ, ΕΧ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.

Prop. XXXVIII. *Theor.*

Si duæ rectæ oppoſitas ſectiones contingentes concurrant: quæ à puncto concurſus ad medinm rectæ tactus conjungentis ducitur, oppoſitarum ſectionum diameter erit quæ recta vocatur; tranſverſa vero ipſi conjugata, quæ per centrum ducitur rectæ tactus conjungenti parallela.

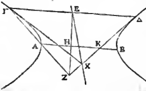
Sint oppoſitæ ſectiones A, B; rectæ ſectiones contingentes Γ X, X Δ; & ducatur Γ Δ quæ bifariam dividatur in E, & jungatur E X: dico E X diametrum rectam eſſe; tranſverſam vero ipſique conjugatam, quæ per centrum ducitur ipſi Γ Δ parallela.

Sit enim, ſi fieri poteſt, diameter E Z, & ſumatur quodvis punctum Z: ergo Δ X ipſi E Z occurret. occurrat in Z puncto, & jungatur Γ Z: conveniet igitur Γ Z cum ſectione. conveniat autem in A, & per A ducatur A B, rectæ Γ Δ parallela. itaque quoniam E Z diameter eſt & ſecat Γ Δ bifariam; etiam [per def. 15.] ipſi parallelas rectas bifariam ſecabit: quare A H ipſi H B eſt æqualis. & quoniam Γ E eſt æqualis E Δ; & eſt in triangulo Γ Z Δ: ergo A H [per 4. 6. & 9. 5.] æqualis eſt H K, unde & H K ipſi H B æqualis eſt, quod fieri non poteſt. igitur E Z non eſt diameter.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν· ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπιζευγνυμένη ἐπὶ μέσην τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων ἡ λεγομένη ὀρθία· πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένη παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ τῶν τομῶν αἱ ΓΧ, ΧΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΧ· λέγω ὅτι ἡ ΕΧ διάμετρός ἐστιν ἡ λεγομένη ὀρθία· πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη.



Ἔστω γὰρ, εἰ δυνατὸν, διάμετρος ἡ ΕΖ, καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΔΧ τῇ ΕΖ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ· συμβαλεῖ ἄρα ἡ ΓΖ τῇ τομῇ. συμβαλλέτω κατὰ τὸ Α, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΒ. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΕΖ καὶ τὴν ΓΔ δίχα τέμνει, καὶ τὰς παραλλήλους αὐτῇ δίχα τεμεῖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ, καί ἐστιν ἐν τριγώνῳ τῷ ΓΖΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΗΚ, ὥστε καὶ ἡ ΗΚ τῇ ΗΒ ἐστὶν ἴση· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΕΖ διάμετρος ἔσται.

Prop. XXXIX. *Theor.*

Si duæ rectæ oppoſitas ſectiones contingentes concurrant: quæ per punctum concurſus & centrum ducitur, rectam tactus conjungentem bifariam ſecabit.

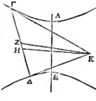
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται συμπίπτουσαι· ἡ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀγομένη δίχα τέμνει τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν.

ΕΣΤΩ-

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τῶν Α, Β δύο εὐθεῖαι ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ. καὶ διάμετρος ἤχθω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΖΔ.

Εἰ γὰρ μή, τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΕ· ἡ ΗΕ ἄρα διάμετρός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΖ· κέντρον ἄρα ἐστὶ τὸ Ε· ἡ ἄρα σύμπτωσις τῶν ἐφαπτομένων ἐπὶ τοῦ κέντρου ἐστὶ τῶν τομῶν, ὅπερ ἄτοπόν ἐστιν. ἡ ΓΖ ἄρα τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση.



Sɪɴᴛ oppoſitæ ſectiones A, B, & ipſas A, B duæ rectæ Γ E, E Δ contingant, & jungatur Γ Δ, & ducatur diameter E Z: dico Γ Z ipſi Z Δ eſſe æqualem.

Si enim non ita ſit, ſecetur Γ Δ bifariam in H, & jungatur H E: ergo [per præc.] H E diameter eſt. ſed & E Z eſt diameter; punctum igitur E centrum erit: idcircoque rectæ, quæ contingunt ſectiones, in centro ipſarum convenient, quod [per 31. 1. huj.] eſt abſurdum. ergo Γ Z ipſi Z Δ æqualis eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ′.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῆς συμπτώσεως εὐθεῖα ἀχθῇ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν συμπίπτουσα ταῖς τομαῖς· αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἀγόμεναι ἐπὶ μέσην τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν ἐφάπτονται τῶν τομῶν.

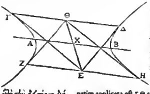
Prop. XL. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppoſitas ſectiones contingentes concurrant, & per punctum concurſus recta ducatur, tactus conjungenti parallela ſectionibuſque occurrens: quæ ab occurſibus ejus ad medium tactus conjungentis ducuntur, ſectiones ipſas contingunt.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τῶν Α, Β δύο εὐθεῖαι ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΕΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΘ, ΘΗ· λέγω ὅτι αἱ ΖΘ, ΘΗ ἐφάπτονται τῶν τομῶν.

Sɪɴᴛ oppoſitæ ſectiones A, B, & ducantur duæ rectæ Γ E, E Δ contingentes A & B, junganturque Γ Δ, & per E ducatur Z E H ipſi Γ Δ parallela, & ſecetur Γ Δ bifariam in Θ, & jungantur Z Θ, Θ H: dico Z Θ, Θ H ſectiones contingere.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη. εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Χ, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΧΒ· αἱ ΘΕ, ΑΒ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι, καὶ τεταγμένως κατῆκται ἡ ΓΘ ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον, ἐφάπτεται δὲ τῆς τομῆς ἡ ΓΕ συμπίπτουσα τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΧΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου. καὶ ἐπεὶ τεταγμένως μὲν ἦκται ἡ ΖΕ, ἐπέζευκται δὲ ἡ ΖΘ· διὰ τοῦτο ἐφάπτεται ἡ ΖΘ τῆς Α τομῆς. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ΗΘ ἐφάπτεται τῆς Β τομῆς· αἱ ΖΘ, ΘΗ ἄρα ἐφάπτονται τῶν Α, Β τομῶν.



Ducatur enim E Θ: ergo [per 38. 2 huj.] E Θ recta diameter eſt, tranſverſa vero ipſi conjugata ea eſt quæ per centrum ducitur parallela ipſi Γ Δ. ſumatur centrum X, & ducatur A X B ipſi Γ Δ parallela: ergo Θ E, A B conjugatæ diametri ſunt, atque ordinatim applicata eſt Γ Θ ad ſecundam diametrum; & Γ E ſectionem contingit ſecundæ diametro occurrens: rectangulum igitur E X Θ [per 38. 1. huj.] æquale eſt quadrato dimidiæ ſecundæ diametri. & quoniam Z E ordinatim applicatur & jungitur Z Θ; propterea [per 38. 1. huj.] Z Θ contingit ſectionem A. ſimiliter & H Θ contingit ſectionem B: igitur Z Θ, Θ H ſectiones, A, B contingunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα′.

Ἐὰν ἐν ταῖς ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Prop. XLI. *Theor.*

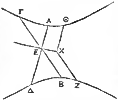
Si in oppoſitis ſectionibus duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent, non tranſeuntes per centrum: ſeſe bifariam non ſecabunt.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ ἐν τῶν Α, Β δύο εὐθεῖαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ

Sɪɴᴛ oppoſitæ ſectiones A, B, in quibus duæ rectæ Γ B, A Δ, per centrum non tranſeuntes,

tes, ſe invicem ſecent in E: dico eas bifariam ſeſe non ſecare.

Si enim fieri poteſt, ſecent ſeſe bifariam, ſitque X ſectionum centrum, & jungatur EX: ergo [per 37. 2. huj.] EX diameter eſt. ducatur per X ipſi BΓ parallela XZ: erit [per 37.2.huj.] XZ diameter ipſi EX conjugata. quæ igitur in Z ſectionem contingit [ex def.] eſt parallela ipſi EX. eadem ratione, ſi ducatur XΘ parallela AΔ, quæ in Θ contingit ſectionem ipſi EX eſt parallela: ergo quæ contingit ſectionem in Z parallela eſt rectæ in Θ contingenti, quod fieri non poteſt: conveniunt enim inter ſeſe, ut modo demonſtratum eſt [per 31.2. huj.] igitur ΓB, AΔ, per centrum non tranſeuntes, ſeſe bifariam non ſecant.



ΓΒ, ΑΔ κατὰ τὸ Ε, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, τεμνέτωσαν, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΧ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ. ἤχθω διὰ τοῦ Χ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΧΖ· ἡ ΧΖ ἄρα διάμετρος ἔσται καὶ συζυγὴς τῇ ΕΧ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Ζ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΧ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ, παραλλήλου ἀχθείσης τῆς ΧΘ τῇ ΑΔ, ἡ κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΧ· ὥστε ἡ κατὰ τὸ Ζ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένῃ, ὅπερ ἄτοπον· ἐδείχθη γὰρ καὶ συμπίπτουσα. οὐκ ἄρα αἱ ΓΒ, ΑΔ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Prop. XLII. *Theor.*

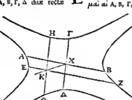
Si in oppoſitis ſectionibus conjugatis, duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent, non tranſeuntes per centrum: bifariam ſeſe non ſecabunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

SINT oppoſitæ ſectiones conjugatæ A, B, Γ, Δ, & in ſectionibus A, B, Γ, Δ duæ rectæ EZ, HΘ, non tranſeuntes per centrum, ſe invicem ſecent in K: dico EZ, HΘ ſeſe bifariam non ſecare.

Si enim fieri poteſt, ſecent ſe bifariam, & ſit X ſectionum centrum, & ducatur quidem AB parallela ipſi EZ, & ΓΔ ipſi HΘ parallela; & jungatur KX: ergo [per 37. 2. huj.] KX, AB conjugatæ diametri ſunt. & ſimiliter XK, ΓΔ ſunt conjugatæ diametri; quare [per 30. 1.] recta contingens ſectionem in A eſt parallela rectæ in Γ contingenti *, quod fieri non poteſt: conveniunt enim, quoniam [per 19. 2. huj.] contingens in Γ ſectiones A, B ſecat, & contingens in A ſecat ipſas Γ, Δ. ac patet [per 21.2.huj.] earum concurſum eſſe in loco qui eſt ſub angulo AXΓ: igitur EZ, HΘ, per centrum non tranſeuntes, ſeſe bifariam non ſecant.



ΕΣΤΩΣΑΝ κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἐν ταῖς Α, Β, Γ, Δ τομαῖς δύο εὐθεῖαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ ΕΖ, ΗΘ κατὰ τὸ Κ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, τεμνέτωσαν, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ τῇ μὲν ΕΖ ἤχθω παράλληλος ἡ ΑΒ, τῇ δὲ ΘΗ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΧ· αἱ ΚΧ, ΑΒ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ΧΚ, ΓΔ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι· ὥστε ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη τῇ κατὰ τὸ Γ ἐφαπτομένῃ παράλληλός ἐστιν, ὅπερ ἀδύνατον· συμπίπτει γὰρ, ἐπειδὴ ἡ μὲν κατὰ τὸ Γ ἐφαπτομένη τέμνει τὰς Α, Β τομὰς, ἡ δὲ κατὰ τὸ Α τὰς Δ, Γ. καὶ φανερὸν ὅτι ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἐν τῷ ὑπὸ τῆς ΑΧΓ γωνίας τόπῳ ἐστίν· οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Prop. XLIII. *Theor.*

Si unam oppoſitarum ſectionum conjugatarum recta in duobus punctis ſecet; & à centro duæ rectæ ducantur, una quidem ad medium rectæ ſecantis, altera vero ipſi parallela: erunt oppoſitarum ſectionum conjugatæ diametri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

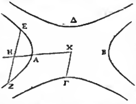
Ἐὰν μίαν τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖα τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, διὰ δὲ τοῦ κέντρου ἡ μὲν ἐπὶ μέσην τῆς τεμνούσης ἀχθῇ, ἡ δὲ παρὰ τὴν τεμνομένην· συζυγεῖς ἔσονται διάμετροι τῶν ἀντικειμένων.

* Cum ex definitione diametri conjugatæ [def. prim. 17.] utraque ſit parallela ipſi XK.

ΕΣΤΩ-

Digitized by Google

ΕΣΤΩΣΑΝ κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τεμνέτω τὴν Α εὐθεῖά τις κατὰ δύο σημεῖα τὰ Ε, Ζ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΖΕ τῷ Η, καὶ τὸ κέντρον ἔστω τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΧΗ, παράλληλος δὲ ἤχθω τῇ ΕΖ ἡ ΓΧ· λέγω ὅτι αἱ ΑΧ, ΧΓ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.



Ἐπεὶ γὰρ διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΧ, καὶ τὴν ΕΖ δίχα τέμνει· ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΖ, ὥστε καὶ τῇ ΓΧ. ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσι τομαί, καὶ μιᾶς αὐτῶν τῆς Α ἦκται ἐφαπτομένη κατὰ τὸ Α, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τοῦ Χ ἡ μὲν ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζεύγνυται ἡ ΧΑ, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην ἦκται ἡ ΓΧ· αἱ ΧΑ, ΓΧ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι· τοῦτο γὰρ προδέδεικται.

SINT oppoſitæ ſectiones conjugatæ A, B, Γ, Δ; & ſectionem A quædam recta ſecet in duobus punctis E, Z, & ZE bifariam dividatur in H; ſit autem X centrum, jungaturque XH, & ΓX ipſi EZ parallela ducatur: dico AX, XΓ conjugatas diametros eſſe.

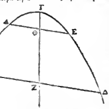
Quoniam enim AX diameter eſt & EZ bifariam ſecat: quæ in A contingit ſectionem parallela eſt [per 5. 2.huj.] ipſi EZ; quare & ipſi ΓX. quoniam igitur oppoſitæ ſectiones ſunt, & unam ipſarum A quædam recta in A contingit; à centro vero X ducuntur duæ rectæ, una quidem XA ad tactum, altera vero ΓX contingenti parallela: erunt XA, ΓX conjugatæ diametri: hoc enim ſuperius [per 20. 2. huj.] demonſtratum eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδʹ.

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς τὴν διάμετρον εὑρεῖν.

ΕΣΤΩ ἡ δοθεῖσα κώνου τομή, ἐφ᾽ ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε· δεῖ δὴ αὐτῆς τὴν διάμετρον εὑρεῖν.

Γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΘΖ· ἀχθεισῶν δὴ τεταγμένως τῶν ΔΖ, ΕΘ καὶ ἐκβληθεισῶν, ἔσται ἴση ἡ μὲν ΔΖ τῇ ΖΒ, ἡ δὲ ΕΘ τῇ ΘΑ. ἐὰν οὖν τάξωμεν τὰς ΒΔ, ΕΑ θέσει οὔσας παραλλήλους, ἔσται δοθέντα τὰ Θ, Ζ σημεῖα, ὥστε θέσει ἔσται ἡ ΖΘΓ.



Συντεθήσεται δὴ οὕτως. Ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομή, ἐφ᾽ ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ ΒΔ, ΑΕ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ζ, Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΘ διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς. τῷ δὲ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ἀπείρους εὑρήσομεν διαμέτρους.

Prop. XLIV. *Probl.*

Datæ coni ſectionis diametrum invenire.

SIT data coni ſectio in qua puncta A, B, Γ, Δ, E; oportet ipſius diametrum invenire.

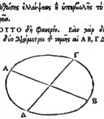
Factum ſit, & diameter ſit ΓΘZ: ductis ideo ordinatim applicatis ΔZ, EΘ & productis; erit ΔZ æqualis ZB, & EΘ ipſi ΘA. ſi igitur ordinemus BΔ, EA, ut ſint poſitione parallelæ: data erunt puncta Θ, Z; quare & ZΘΓ poſitione data erit.

Componetur itaque in hunc modum. Sit data coni ſectio in qua A, B, Γ, Δ, E puncta, ducanturque BΔ, AE inter ſe parallelæ, & in punctis Z, Θ bifariam dividantur: juncta igitur ZΘ diameter erit ſectionis. eâdem ratione & infinitas diametros inveniemus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μεʹ.

Τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς τὸ κέντρον εὑρεῖν.

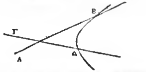
ΤΟΥΤΟ δὴ φανερόν. Ἐὰν γὰρ διαχθῶσι δύο διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΑΒ, ΓΔ, τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας, ἔσται τῆς τομῆς τὸ κέντρον, ὡς ὑπόκειται.



Prop. XLV. *Probl.*

Datæ ellipſeos vel hyperbolæ centrum invenire,

HOC itaque manifeſte conſtat. Si enim duæ ſectionis diametri AB, ΓΔ ducantur; punctum in quo conveniunt [ex 25.dat.] erit datum; centrumque ſectionis, ut jam [in def.centri] poſitum eſt.



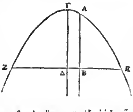
Prop. XLVI. *Probl.*

Datæ coni ſectionis axem invenire.

SIT coni ſectio data primum PARABOLA, in qua puncta Z, Γ, B: itaque oportet ipſius axem invenire.

Ducatur enim diameter AB. & ſi quidem AB ſit axis, factum erit quod proponebatur. ſin minus, ponatur factum, & ſit axis ΓΔ: ergo [per cor. 51. 1.huj.] axis ΓΔ ipſi AB eſt parallelus, & quæ ad ipſam ducuntur perpendiculares biſariam dividit. ſi igitur ordinemus EZ perpendicularem ad AB, erit ea [per 26. dat.] poſitione data, & idcirco EΔ æqualis ΔZ: quare [per 2.dat.] punctum Δ datum erit: dato igitur Δ puncto, & ductâ ΔΓ ipſi AB poſitione datæ parallelâ, erit [per 29.dat.] & ipſa ΔΓ poſitione data.

Componetur autem in hunc modum. Sit data ſectio Parabola, in qua puncta Z, A, E, ducaturque [per 44.2.huj.] diameter AB, & [per 11. 1.] BE ad ipſam perpendicularis, quæ ad Z producatur. ſi ergo EB ſit æqualis BZ, conſtat AB axem eſſe. ſin minus, [per 10. 1.] dividatur EZ in Δ biſariam, & [per 31. 1.] ipſi AB parallela ducatur ΓΔ. patet ΓΔ eſſe ſectionis axem; eſt enim diametro parallela, adeoque [per cor. 51. 1.huj.] diameter eſt, & rectam BZ biſariam & ad rectos angulos ſecat: datæ igitur parabolæ axis inventus eſt ΓΔ.



Et patet unicum eſſe parabolæ axem. nam ſi alius axis ſit, ut AB, erit hic ipſi ΓΔ parallelus; & ſecabit BZ, idque biſariam: ergo BE eſt æqualis BZ, quod fieri non poteſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛ′.

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

ΕΣΤΩ ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἐφ᾽ ἧς τὰ Ζ, Γ, Ε· δεῖ δὴ αὐτῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

Ἤχθω γὰρ αὐτῆς διάμετρος ἡ ΑΒ. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΒ ἄξων ἐστί, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δὲ οὔ, γεγονέτω, καὶ ἔστω ἄξων ὁ ΓΔ· ὁ ΓΔ ἄρα ἄξων παράλληλός ἐστι τῇ ΑΒ, καὶ τὰς ἀγομένας ἐπ᾽ αὐτὴν καθέτους δίχα τέμνει. ἐὰν οὖν τάξω τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἔσται θέσει· καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Δ. δεδομένου ἄρα τοῦ Δ, παρὰ θέσει τὴν ΑΒ ἦκται ἡ ΓΔ, θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. Ἔστω ἡ δοθεῖσα παραβολή, ἐφ᾽ ἧς τὰ Ζ, Α, Ε, καὶ ἤχθω αὐτῆς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ΒΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΒΖ, φανερὸν ὅτι ἡ ΑΒ ἄξων ἐστίν. εἰ δὲ οὔ, τετμήσθω ἡ ΕΖ δίχα τῷ Δ, καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΔ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΓΔ ἄξων ἐστὶ τῆς τομῆς, παράλληλος γὰρ οὖσα τῇ διαμέτρῳ, τουτέστι διάμετρος οὖσα, τὴν ΕΖ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει· τῆς ἄρα δοθείσης παραβολῆς ὁ ἄξων εὕρηται ὁ ΓΔ.

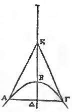
Καὶ φανερόν, ὅτι εἷς ἄξων ἐστὶ τῆς παραβολῆς. εἰ γὰρ ἄλλος ἔσται, ὡς ὁ ΑΒ, ἔσται τῇ ΓΔ παράλληλος, καὶ τὴν ΕΖ τέμνει, ὥστε καὶ δίχα· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΖ, ὅπερ ἄτοπον.

Prop. XLVII. *Probl.*

Datæ hyperbolæ vel ellipſeos axem invenire.

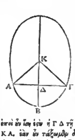
SIT HYPERBOLA, vel ELLIPSIS ABΓ: oportet igitur ipſius axem invenire.

Pone jam inventum, & ſit KΔ, centrum vero ſectionis ſit K: ergo KΔ rectas ad ipſam ordinatim applicatas biſariam & ad rectos angulos ſecat. ducatur perpendicularis ΓΔA, & jungantur KA, KΓ. quoniam igitur ΓΔ æqualis eſt ΔA; ergo & [per 4.1.] ΓK ipſi KA eſt æqualis. ergo, ſi punctum Γ datum ſit, erit ΓK data: adeoque circulus centro K & intervallo ΓK deſcriptus etiam per ipſum A tranſibit, & [per 6. def. dat.] erit poſitione datus.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ′.

Τῆς δοθείσης ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως τὸν ἄξονα εὑρεῖν.



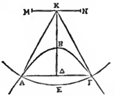
ΕΣΤΩ ΥΠΕΡΒΟΛΗ ἢ ΕΛΛΕΙΨΙΣ ἡ ΑΒΓ· δεῖ δὴ αὐτῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

Εὑρήσθω, καὶ ἔστω ὁ ΚΔ, κέντρον δὲ τῆς τομῆς τὸ Κ· ἡ ἄρα ΚΔ τὰς ἐπ᾽ αὐτὴν τεταγμένως κατηγμένας δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. ἤχθω κάθετος ἡ ΓΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΑ, ΚΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ· ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΑ. ἐὰν οὖν τάξωμεν δοθὲν τὸ Γ, ἔσται δοθεῖσα ἡ ΓΚ· ὥστε ὁ κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ, κύκλος γραφόμενος, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Α, καὶ ἔσται θέσει δεδομένος.

Digitized by Google

δεδομένως. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ τομὴ δεδομένη θέσει· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ δοθέν· θέσει ἄρα ἡ ΓΑ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Δ. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ δοθέν· δεδομένη ἄρα τῇ θέσει ἡ ΔΚ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. Ἔστω ἡ δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω αὐτῆς κέντρον τὸ Κ, εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ, καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΓ, ΚΑ, καὶ διήχθω ἡ ΚΔ ἐπὶ τὸ Β. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ

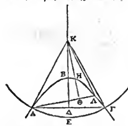


τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΚ· δύο ἄρα αἱ ΓΔ, ΔΚ δυσὶ ταῖς ΑΔ, ΔΚ ἴσαι εἰσί· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΚΑ τῇ ΚΓ ἴση· ἡ ἄρα ΚΒΔ τὴν ΑΔΓ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει· ἄξων ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΔ. ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΓΑ παράλληλος ἡ ΜΚΝ· ἡ ἄρα ΜΝ ἄξων ἐστὶ τῆς τομῆς συζυγὴς τῷ ΒΚ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη΄.

Ἀποδεδειγμένων δὲ τούτων, ἑξῆς ἔστω δεῖξαι ὅτι ἄλλοι ἄξονες τῶν αὐτῶν τομῶν οὐκ εἰσίν.

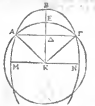
Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω καὶ ἕτερος ἄξων ὁ ΚΗ· κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοῖς ἔμπροσθεν, ἀχθείσης καθέ-



του τῆς ΑΘ, ἴση ἔσται ἡ ΑΘ τῇ ΘΛ· ὥστε καὶ ἡ ΑΚ τῇ ΚΛ ἴση. ἀλλὰ καὶ τῇ ΚΓ· ἴση ἄρα ἡ ΚΛ τῇ ΚΓ, ὅπερ ἄτοπον. ὅτι μὲν οὖν καὶ ὁ ΑΕΓ κύκλος κατ' ἄλλο σημεῖον μεταξὺ τῶν Α, Γ οὐ συμβάλλει τῇ τομῇ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς φανερόν. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΓΡ, ΛΣ·

eſt autem [ex hyp.] & ſectio ΑΒΓ poſitione data: ergo [per 25. dat.] & punctum Α. ſed & Γ eſt datum: [aſſumptum ſc.] data igitur [per 26.dat.] poſitione eſt ΓΑ. & eſt ΓΔ ipſi ΔΑ æqualis: ergo [per 7.dat.] punctum Δ datur. ſed & ipſum Κ: igitur ΔΚ [per 26 dat.] poſitione data erit.

Componetur autem hoc modo. Sit data Hyperbola vel Ellipſis, ΑΒΓ, & ſumpto [per 45. 2. huj.] Κ ipſius centro, in ſectione capiatur quodlibet punctum Γ, & ex centro Κ, intervalloque ΚΓ circulus deſcribatur ΓΒΑ, & jungatur ΓΑ & [per 10. 1.] bifariam ſecetur in Δ, & jungantur ΚΓ, ΚΑ & ΚΔ quæ ad Β producatur. itaque quoniam ΑΔ eſt æqualis ΔΓ, & ΔΚ com-

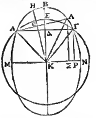


munis: erunt duæ lineæ ΓΔ, ΔΚ duabus ΑΔ, ΔΚ æquales: eſt igitur [per 4. 1.] baſis ΚΑ æqualis baſi ΚΓ: quare recta ΚΒΔ ipſam ΑΔΓ bifariam & ad rectos angulos ſecat: & idcirco [per def 18.] ΚΔ eſt axis. ducatur per Κ ipſi ΓΑ parallela ΜΚΝ: ergo ΜΝ eſt axis ſectionis ipſi ΒΚ conjugatus.

Prop. XLVIII. *Theor.*

His autem demonſtratis, reliquum eſt ut oſtendamus non eſſe alios axes ipſarum ſectionum.

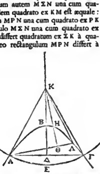
Si enim fieri poteſt, ſit axis alius ΚΗ: ergo ducta perpendiculari ΑΘ, ex iis quæ ſu-

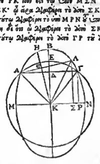


pra diximus, erit ΑΘ æqualis ΘΛ: quare [per 4. 1.] & ΑΚ ipſi ΚΛ, ut & ipſi ΚΓ æquatur: ſunt igitur ΚΛ, ΚΓ inter ſe æquales, quod eſt abſurdum. circulum autem ΑΕΓ non occurrere ſectioni in alio puncto inter Α, Γ, in hyperbola quidem perſpicuum eſt. in ellipſi vero ducantur perpendiculares ΓΡ, ΛΣ: & quoniam

K Γ eſt æqualis K Λ, ex centro enim ſunt: erit & quadratum ex K Γ quadrato ex K Λ æquale. quadrato autem ex K Γ æqualia ſunt [per 47. 1.] quadrata ex Γ P, P K; & quadrato ex K Λ æqualia quadrata ex Λ Σ, Σ K: ergo quadrata ex Γ P, P K quadratis ex Λ Σ, Σ K æqualia erunt: quo igitur differt quadratum ex Γ P à quadrato ex Λ Σ, eo quadratum ex Σ K differt à quadrato ex K P. Rurſus quoniam [per 5. 2.] rectangulum M P N una cum quadrato ex P K æquale eſt quadrato ex K M; rectangulum autem M Σ N una cum quadrato ex Σ K eidem quadrato ex K M eſt æquale: erit rectangulum M P N una cum quadrato ex P K æquale rectangulo M Σ N una cum quadrato ex Σ K: ergo quo differt quadratum ex Σ K à quadrato ex K P, eo rectangulum M P N differt à

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ K Γ τῇ K Λ, (ἐκ κέντρου γάρ·) ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ K Γ τῷ ἀπὸ K Λ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ K Γ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ Γ P, P K, τῷ δὲ ἀπὸ K Λ ἴσα τὰ ἀπὸ Λ Σ, Σ K· τὰ ἄρα ἀπὸ Γ P, P K τοῖς ἀπὸ Λ Σ, Σ K ἐστὶν ἴσα· ᾧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ Γ P τοῦ ἀπὸ Λ Σ, τούτῳ διαφέρει τὸ ἀπὸ Σ K τοῦ ἀπὸ K P. Πάλιν ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ M P N μετὰ τοῦ ἀπὸ P K ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ K M, καὶ τὸ ὑπὸ M Σ N μετὰ τοῦ ἀπὸ Σ K ἴσον τῷ ἀπὸ K M· τὸ ἄρα ὑπὸ M P N μετὰ τοῦ ἀπὸ P K ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ M Σ N μετὰ τοῦ ἀπὸ Σ K· ᾧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ Σ K τοῦ ἀπὸ K P, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ M P N τοῦ ὑπὸ M Σ N. ἐδείχθη δὲ ὅτι ᾧ διαφέρει τὸ ἀπὸ Σ K τοῦ ἀπὸ K P, τούτῳ διαφέρει τὸ ἀπὸ Γ P τοῦ ἀπὸ Λ Σ·





rectangulo M Σ N. ſed demonſtratum eſt, quo quadratum ex Σ K differt à quadrato ex K P, eo differre quadratum ex Γ P à quadrato ex Λ Σ: * quo igitur differt quadratum ex Γ P à quadrato ex Σ Λ, eo rectangulum M P N à rectangulo M Σ N differt. itaque cum ordinatim applicatæ ſint Γ P, Λ Σ; erit [per 21. 1. huj.] ut quadratum ex Γ P ad rectangulum M P N ita quadratum ex Λ Σ ad rectangulum M Σ N. demonſtratum autem eſt in utriſque eundem eſſe exceſſum: ergo quadratum ex Γ P rectangulo M P N eſt æquale, & quadratum ex Λ Σ æquale rectangulo M Σ N. igitur linea Λ Γ M eſt circulus *, quod eſt abſurdum; poſuimus enim ellipſim eſſe.

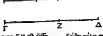
* ᾧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ Γ P τοῦ ἀπὸ Σ Λ, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ M P N τοῦ ὑπὸ M Σ N. καὶ ἐπεὶ κατηγμέναι εἰσὶν αἱ Γ P, Λ Σ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ Γ P πρὸς τὸ ὑπὸ M P N οὕτως τὸ ἀπὸ Λ Σ πρὸς τὸ ὑπὸ M Σ N. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐν ἀμφοτέροις ἡ αὐτὴ ὑπεροχή· ἴσον ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ Γ P τῷ ὑπὸ M P N, τὸ δὲ ἀπὸ Λ Σ τῷ ὑπὸ M Σ N· * κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ Λ Γ M γραμμή, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἔλλειψις.

EUTOCIUS.

* Quo igitur differt quadratum ex Γ P à quadrato ex Σ Λ, eo rectangulum M P N differt à rectangulo M Σ N.] Sint duæ magnitudines æquales A B, Γ Δ, & dividantur in partes inæquales in punctis E, Z. dico quo differt A E à Z Γ, eo E B differre à Z Δ.

Ponatur ipſi Γ Z æqualis A H; ergo E H eſt differentia magnitudinum A H, A E; hoc eſt Z Γ, A E. eſt enim A H æqualis Γ Z. ſed & A B ipſi Γ Δ: reliqua igitur H B reliquæ Z Δ eſt æqualis. quare E H eſt differentia ipſarum E B, B H, hoc eſt ipſarum E B, Z Δ.

Sed ſint quatuor magnitudines A E, E B, Γ Z, Z Δ, & differat A E à Γ Z eo quo E B differt à Z Δ. dico utraque ſimul A E, E B utriſque ſimul Γ Z, Z Δ æqualia eſſe.



Ponatur rurſus A H æqualis Γ Z: ergo E H eſt differentia magnitudinum A E, Γ Z. eodem autem differre

* Ὧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ Γ P τοῦ ἀπὸ Σ Λ, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ M P N τοῦ ὑπὸ M Σ N.] Ἔστωσαν δύο μεγέθη ἴσα τὰ A B, Γ Δ, καὶ διῃρήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὰ E, Z. λέγω ὅτι ᾧ διαφέρει τὸ A E τοῦ Z Γ, τούτῳ διαφέρει τὸ E B τοῦ Z Δ.

Κείσθω τῷ Γ Z ἴσον τὸ A H· τὸ E H ἄρα ὑπεροχή ἐστι τῶν A H, A E, τουτέστι τῶν Z Γ, A E, τὸ γὰρ A H ἴσον ἐστὶ τῷ Γ Z· ἀλλὰ καὶ τὸ A B τῷ Γ Δ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ H B τῷ Z Δ ἐστὶν ἴσον· ὥστε τὸ E H ὑπεροχή ἐστι τῶν E B, B H, ὅ ἐστι τῶν E B, Z Δ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη τὰ A E, E B, Γ Z, Z Δ, καὶ τὸ A E τοῦ Γ Z διαφερέτω ᾧ διαφέρει τὸ E B τοῦ Z Δ. λέγω ὅτι συναμφότερα τὰ A E, E B συναμφοτέροις τοῖς Γ Z, Z Δ ἐστὶν ἴσα.

Κείσθω πάλιν τῷ Γ Z ἴσον τὸ A H· τὸ E H ἄρα ὑπεροχή ἐστι τῶν A E, Γ Z. τῷ δὲ αὐτῷ διαφέρειν ὑπόκειται ἀλλή-

* Per Lemma II. *Pappi* ad librum primum.

κεῖται τὰ ΑΕ, ΓΖ καὶ τὰ ΕΒ, ΖΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΒ τῷ ΖΔ. ἀλλὰ καὶ τὸ ΑΗ τῷ ΓΖ· τὸ ΑΒ ἄρα τῷ ΓΔ ἐστὶν ἴσον. Φανερὸν δὲ ὅτι, ἐὰν τὸ πρῶτον δευτέρου ὑπερέχῃ τινὶ καὶ τὸ τρίτον τετάρτου ὑπερέχῃ τῷ αὐτῷ, τὸ πρῶτον καὶ τὸ τέταρτον ἴσα ἐστὶ τῷ δευτέρῳ καὶ τῷ τρίτῳ, κατὰ τὴν καλουμένην ἀριθμητικὴν μεσότητα. ἐὰν γὰρ, τούτων ὑποκειμένων, ὑπάρχῃ ὡς τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον οὕτως τὸ δεύτερον πρὸς τὸ τέταρτον, ἴσον ἔσται τὸ μὲν πρῶτον τῷ τρίτῳ, τὸ δὲ δεύτερον τῷ τετάρτῳ. δυνατὸν δὲ ἐστὶ ἄλλως τοῦτο δειχθῆναι, διὰ τὸ δεδεῖχθαι ἐν τῷ εἰκοστῷ πέμπτῳ θεωρήματι τοῦ πέμπτου βιβλίου τῆς Εὐκλείδου στοιχειώσεως, ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον καὶ τὸ τέταρτον δύο τῶν λοιπῶν μείζονα ἐστί.

ſupponuntur ΑΕ, ΓΖ, & ΕΒ, ΖΔ: æquales igitur ſunt ΗΒ, ΖΔ. ſed eſt ΑΗ ipſi ΓΖ æqualis: ergo ΑΒ ipſi ΓΔ æqualis erit. Perſpicuum autem eſt, ſi prima excedat ſecundam magnitudine aliqua, & eadem magnitudine tertia quartam excedat: primam & quartam ſecundæ & tertiæ æquales eſſe, juxta arithmeticam proportionem. Etenim ſi, his poſitis, ſit ut prima ad tertiam ita ſecunda ad quartam: prima quidem tertiæ æqualis erit: ſecunda vero quartæ. poteſt etiam hoc aliter demonſtrari, ex eo quod in vigeſimo quinto theoremate quinti libri elementorum *Euclidis* demonſtratum eſt, nempe, ſi quatuor magnitudines proportionales fuerint, primam & quartam reliquis duabus majores eſſe.

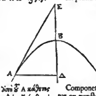
ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Κώνου τομῆς δοθείσης, καὶ σημείου μὴ ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ σημείου εὐθεῖαν καθ' ἓν ἐπιψαύουσαν τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον Παραβολή, ἧς ἄξων ἡ ΒΔ· δεῖ δὲ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐντὸς τῆς τομῆς, ἀγαγεῖν εὐθεῖαν ὡς πρόκειται.

Τὸ δὴ δοθὲν σημεῖον, ἤτοι ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἐστιν, ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ἢ ἐν τῷ λοιπῷ ἐκτὸς τόπῳ.

Ἔστω οὖν ἐπὶ τῆς γραμμῆς, καὶ ἔστω τὸ Α· καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΑΕ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ· ἔσται δὴ θέσει, καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΔ. καὶ ἐστι δοθεῖσα ἡ ΒΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΕ. καὶ ἐστι τὸ Β δοθέν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ε. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ ΑΕ.



Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΔ ἴση ἡ ΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐφάπτεται τῆς τομῆς ἡ ΑΕ.

ΕΣΤΩ πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὸ Ε· καὶ γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΑΕ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΔ. καὶ δοθεῖσα ἡ ΒΕ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΒΔ. καὶ ἐστι δοθὲν τὸ Β· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Δ. καὶ ἐστιν ὀρθὴ ἡ ΔΑ· θέσει ἄρα ἡ ΔΑ· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Ε· θέσει ἄρα ἡ ΑΕ.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως. κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΔ ὀρθὴ ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐφάπτεται ἡ ΑΕ. Φανερὸν δὲ καὶ, ἐὰν δοθὲν σημεῖον τὸ αὐτὸ ᾖ τῷ Β, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ὀρθὴ ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ δὴ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ· καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΑ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῷ ἄξονι, τουτέστι τῇ ΒΔ, παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΖ τεταγμένως ἤχθω ἡ ΑΖ· ἔσται δὴ ἴση ἡ ΓΗ τῇ ΖΗ· καὶ ἐστι δοθὲν τὸ Η· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ. καὶ ἀνῆκται

Prop. XLIX. *Probl.*

Data coni ſectione, & puncto non intra ſectionem dato; ab eo rectam ducere quæ ſectionem contingat.

SIT data coni ſectio primum Parabola, cujus axis ΒΔ: oportet vero à puncto non intra ſectionem dato rectam ducere, ut ante propoſitum eſt.

Itaque datum punctum vel eſt in linea parabolica, vel in axe, vel in loco quod extra relinquitur.

Sit primum in ipſa linea curva, ſitque Α. puta factum, & ſit ΑΒ, ducaturque perpendicularis ΑΔ, quæ [per 30.dat.] poſitione data erit, & erit [per 35.1.huj.] ΒΕ æqualis ΒΔ. at ΒΔ eſt data: data igitur eſt ΒΕ. eſtque punctum Β datum: ergo & punctum Ε. ſed datum quoque eſt Α punctum: recta igitur ΑΒ [per 26. dat.] poſitione data erit.

Componetur autem in hunc modum. Ducatur ex puncto Α perpendicularis ΑΔ, ponaturque ΒΕ ipſi ΒΔ æqualis, & jungatur ΑΕ: patet itaque [per 35. 1. huj.] ΑΕ ſectionem contingere.

SIT rurſus punctum Ε in axe datum. factum ſit, & ducatur recta ΑΕ ſectionem contingens, & perpendicularis ducatur ΑΔ: ergo [per 35. 1. huj.] ΒΕ eſt æqualis ΒΔ. & data eſt ΒΕ: igitur & ΒΔ. at datum eſt Β punctum; ergo Δ datum erit. ſed ΔΑ eſt normalis, adeoque [per 30.dat.] poſitione datur; igitur & punctum Α datum eſt. ſed & Β datum: igitur ΑΒ [per 26.dat.] datur poſitione.

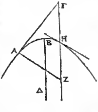
Componetur itaque in hunc modum. Ponatur ipſi ΒΕ æqualis ΒΔ, & à puncto Δ ducatur ΔΑ ipſi ΕΔ normalis, jungaturque ΑΒ: manifeſtum igitur eſt [per 35. 1. huj.] rectam ΑΕ contingere ſectionem. conſtat etiam, ſi datum punctum ſit idem quod Β, normalem ab eo ductam ſectionem ipſam contingere.

SIT datum punctum Γ: & factum jam ſit, ſitque ΓΑ contingens, & per Γ ducatur ΓΖ parallela axi, hoc eſt ipſi ΒΔ: ergo [per 28.dat.] ΓΖ poſitione data eſt. à puncto Α ad ΓΖ ordinatim applicetur ΑΖ: eritque [per 35. 1.huj.] ΓΗ æqualis ΖΗ. & Η [per 25.dat.] eſt datum: datum igitur erit & Ζ. ordinatim autem applicatur

ΖΑ,

Z A, ſive parallela eſt rectæ in H ſectionem contingenti: data igitur eſt [per 28.dat.] Z A poſitione, & idcirco [per 25.dat.] punctum A datum. ſed & [ex hyp.] punctum Γ: ergo [per 26.dat.] Γ A poſitione data erit.

Componetur autem hoc modo. Ducatur [per 31. 1.] per Γ ipſi B Δ parallela Γ Z: ponaturque Z H æqualis Γ H, & rectæ in H contingenti ſectionem [per modo dicta ductæ] parallela ducatur Z A, & jungatur A Γ: perſpicuum igitur eſt illam problema conficere.



ἡ Ζ Α τεταγμένως, τουτέστι παράλληλος τῇ κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένῃ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΑ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Γ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Γ Α.

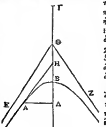
Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἤχθω διὰ τοῦ Γ παράλληλος τῇ Β Δ ἡ Γ Ζ, καὶ κείσθω τῇ Γ Η ἡ Ζ Η ἴση, καὶ τῇ κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἤχθω ἡ Ζ Α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Α Γ· φανερὸν δὴ ὅτι ποιήσει τὸ πρόβλημα.

Sɪᴛ rurſus Hyperbola, cujus axis Γ B Δ, centrum Θ, & aſymptoti Θ E, Θ Z: punctum autem datum, vel in ſectione erit, vel in axe, vel intra angulum E Θ Z, vel in loco qui deinceps eſt, vel in una aſymptotôn continentium ſectionem, vel in loco intermedio inter rectas continentes angulum ad verticem anguli Z Θ E.

ΕΣΤΩ πάλιν ὑπερβολή, ἧς ἄξων ἡ Γ Β Δ, κέντρον δὲ τὸ Θ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ Θ Ε, Θ Ζ· τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἤτοι ἐπὶ τῆς τομῆς δοθήσεται, ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος, ἢ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν Ε Θ Ζ γωνίας, ἢ ἐν τῷ ἐφεξῆς τόπῳ, ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομήν, ἢ ἐν τῷ μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ὑπὸ Ζ Θ Ε γωνίας.

Sit primum in ſectione, ut A: & factum ſit, & A H ſectionem contingat, ducaturque perpendicularis A Δ, & B Γ ſit tranſverſum figuræ latus: erit itaque [per 36. 1.huj.] ut Γ Δ ad Δ B ita Γ H ad H B. ſed [per 1. dat.] ratio Γ Δ ad Δ B eſt data, quia utraque data eſt: ratio igitur Γ H ad H B erit data. & eſt data B Γ: quare punctum H datum eſt. ſed & ipſum A: ergo [per 26. dat.] A H data erit poſitione.

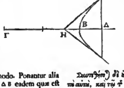
Componetur autem ſic. Ducatur à puncto A perpendicularis A Δ, & fiat Γ H ad H B ſicut Γ Δ ad Δ B, & jungatur A H: patet igitur rectam A H contingere ſectionem.



Ἔστω πρότερον ἐπὶ τῆς τομῆς, ὡς τὸ Α· καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ Α Η, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ Α Δ, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἔστω ἡ Β Γ· ἔσται δὴ ὡς ἡ Γ Δ πρὸς Δ Β οὕτως ἡ Γ Η πρὸς Η Β. λόγος δὲ τῆς Γ Δ πρὸς Δ Β δοθείς, δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα· λόγος ἄρα καὶ τῆς Γ Η πρὸς Η Β δοθείς. καὶ ἐστι δοθεῖσα ἡ Β Γ· δοθὲν ἄρα τὸ Η. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ Α Η.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἡ Α Δ, καὶ τῷ τῆς Γ Δ πρὸς Δ Β λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς Γ Η πρὸς Η Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Α Η· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ Α Η ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

Rᴜʀsᴜs ſit datum punctum H in axe: & factum jam ſit, ducaturque contingens A H, & A Δ perpendicularis. pari ratione erit [per 36.1. huj.] ut Γ H ad H B ita Γ Δ ad Δ B. & data eſt Γ B: ergo [per 7. dat.] punctum Δ datum. & eſt Δ A perpendicularis: quare poſitione data erit. & eſt ſectio data poſitione: datum igitur [per 25. dat.] eſt A punctum. ſed & ipſum H: ergo A H poſitione datur.



ΠΑΛΙΝ δὴ ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὸ Η· καὶ γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἡ Α Η ἐφαπτομένη, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ Α Δ· κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται ὡς ἡ Γ Η πρὸς Η Β οὕτως ἡ Γ Δ πρὸς Δ Β. καὶ ἐστι δοθεῖσα ἡ Γ Β· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. καὶ ἐστιν ὀρθὴ ἡ Δ Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Δ Α. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Η· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ Α Η.

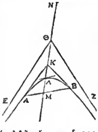
Componetur autem hoc modo. Ponantur alia eadem, & fiat ratio Γ Δ ad Δ B eadem quæ eſt Γ H ad H B; & ducta Δ A perpendiculari, jungatur A H: conſtat igitur [per 34. 1. huj.] ipſam A H problema conficere; & à puncto H rectam aliam duci poſſe, quæ ſectionem ad alteras partes contingat.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, καὶ τῷ τῆς Γ Η πρὸς Η Β λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς Γ Δ πρὸς Δ Β, καὶ ὀρθὴ ἤχθω ἡ Δ Α, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Α Η· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ Α Η ποιεῖ τὸ πρόβλημα, καὶ ὅτι ἀπὸ τοῦ Η ἀχθήσεται ἑτέρα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη.

Iɪsᴅᴇᴍ poſitis, ſit datum punctum K in loco, qui intra angulum ſub rectis E Θ Z conti-

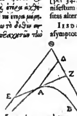
ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον, ἐν τῷ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν Ε Θ Ζ γωνίας τόπῳ, τὸ Κ, καὶ

Κ, καὶ δέον ἔστω ἀπὸ τοῦ Κ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω τῇ ΛΘ ἴση ἡ ΘΝ· πάντα ἄρα δοθέντα· ἔσται δὴ καὶ ἡ ΛΝ δοθεῖσα. ἤχθω δὲ τεταγμένως ἡ ΛΜ ἐπὶ τὴν ΜΝ· ἔσται δὴ καὶ ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΜΛ. λόγος δὲ τῆς ΝΚ πρὸς ΚΛ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΝΜ πρὸς ΜΛ δοθείς. καί ἐστι δοθὲν τὸ Λ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Μ. καὶ παρατεταγμένως ἀνῆκται ἡ ΜΑ τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ παράλληλος· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΛΒ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἡ ΑΚ.



Συντεθήσεται δὲ οὕτως. Ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ· καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω ἴση τῇ ΘΛ ἡ ΘΝ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΜΛ, καὶ τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ· ἡ ΚΑ ἄρα ἐφάπτεται τῆς τομῆς. καὶ φανερὸν ὅτι καὶ ἑτέρα ἀχθήσεται ἀπὸ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη.

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον, ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομήν, τὸ Ζ· καὶ δέον ἔστω ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΖΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΔ· ἔσται δὴ ἴση ἡ ΔΘ τῇ ΔΖ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΑΕ ἐστὶν ἴση. καὶ δοθεῖσα ἡ ΖΘ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. καὶ διὰ δεδομένου τοῦ Δ παρὰ θέσει τὴν ΕΘ παράλληλος ἦκται ἡ ΔΑ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Ζ· θέσει ἄρα ἡ ΖΑΕ.



Συντεθήσεται δὴ οὕτως. ἔστω ἡ τομὴ ἡ ΑΒ, καὶ αἱ ΕΘ, ΘΖ ἀσύμπτωτοι, καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον, ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομήν, τὸ Ζ· καὶ τετμήσθω ἡ ΖΘ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΘΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΔΘ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΑΕ. ὥστε διὰ τὰ προδεδειγμένα ἡ ΖΑ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐν τῷ ὑπὸ τὴν γωνίαν τὴν ἑξῆς τόπῳ τῶν περιεχουσῶν τὴν τομήν, καὶ ἔστω τὸ Κ· δεῖ δὲ ἀπὸ τοῦ Κ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω· ἔσται δὴ θέσει. ἐὰν δὴ ἐπὶ τῆς τομῆς ληφθῇ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ ΚΘ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΓΔ, ἔσται θέσει. καὶ ἐὰν τμηθῇ ἡ

netur, & oporteat ab eo puncto rectam ducere, quæ ſectionem contingat. Ponatur factum, & ſit Κ Λ contingens, jungatur autem Κ Θ, & producatur ita ut ipſi Λ Θ ſit æqualis Θ Ν; omnia igitur data erunt: quare & ipſa Λ Ν. ordinatim autem applicetur Λ Μ ad Μ Ν: & erit [per 36.1. huj.] ut Ν Κ ad Κ Λ ita Ν Μ ad Μ Λ. ratio autem Ν Κ ad Κ Λ eſt data: data igitur erit & ratio Ν Μ ad Μ Λ. eſtque punctum Λ datum: ergo [per 27. dat.] & punctum Μ datur. & ordinatim applicatur Μ Α parallela ei quæ in Λ ſectionem contingit: quare [per 28. dat.] & Μ Α datur poſitione. at poſitione datur ſectio Α Λ Β: ergo [per 25. dat.] & punctum Α. ſed & Κ datur; data igitur [per 26. dat.] erit Α Κ.

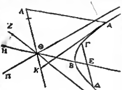
Componetur autem hoc modo. Ponantur alia eadem, & ſit datum punctum Κ, junctaque Κ Θ producatur, & ſit Θ Ν æqualis Θ Λ, & fiat ut Ν Κ ad Κ Λ ita Ν Μ ad Μ Λ, & rectæ in Λ ſectionem contingenti, [per caſ. 1. in hyperb. inventæ] parallela ducatur Μ Α; & jungatur Κ Α: ergo [per 34. 1. huj.] Κ Α contingit ſectionem. & manifeſtum eſt ab eodem puncto Κ ad partes oppoſitas alteram duci poſſe quæ ſectionem contingat.

Iisdem poſitis, ſit punctum datum Ζ in una aſymptotôn continentium ſectionem, oporteatque à puncto Ζ ducere rectam quæ ſectionem contingat. Ponatur factum eſſe; & ſit contingens Ζ Α Ε, & per Α ducatur Α Δ ipſi Ε Θ parallela: erit igitur [per 2. 6.] Δ Θ æqualis Δ Ζ, quoniam [per 3. 2. huj.] & Ζ Α ipſi Α Ε eſt æqualis. & [per 26. dat.] data eſt Ζ Θ; ergo [per 7. dat.] & punctum Δ datum. data quoque eſt [per 28. dat.] poſitione Δ Α, quæ nempe per Δ ducta ipſi Θ Ε poſitione datæ parallela eſt; & ſectio data eſt poſitione: ergo & punctum Α datur. ſed & Ζ [ex hyp.] datum: recta igitur Ζ Α Ε poſitione data erit.

Componetur autem hoc pacto. Sit ſectio Α Β, cujus aſymptoti Ε Θ, Θ Ζ, & datum punctum Ζ ſit in una aſymptotôn ſectionem continentium. & ſecetur [per 10. 1.] Ζ Θ bifariam in Δ, ducaturque [per 30. 1.] per Δ recta Δ Α ipſi Θ Ε parallela, & jungatur Ζ Α. & quoniam Ζ Δ eſt æqualis Δ Θ, & Ζ Α [per 2. 6. & 9. 5.] ipſi Α Ε æqualis erit. quare ex iis, quæ [ad 9. 2. huj.] demonſtrata ſunt, Ζ Α ſectionem contingit.

Iisdem poſitis, ſit datum punctum Κ in loco qui deinceps eſt angulo ſectionem continenti, & oporteat ab ipſo Κ rectam ducere, quæ contingat ſectionem. factum ſit, & ſit Κ Α, junctaque Κ Θ producatur. erit igitur [per 26. dat.] poſitione data. ſi ideo in ſectione ſumatur punctum Γ, & per Γ ducatur Γ Δ ipſi Κ Θ parallela; erit [per 28. dat.] Γ Δ poſitione data. ac ſi Γ Δ bi-

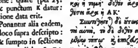
fariam ſecetur in E, junctaque ΘK producatur; & poſitione data erit, diameter ſcilicet ipſi KΘ conjugata. ponatur ΘH æqualis BΘ, & per Λ ducatur ΛA parallela BH. quoniam igitur KΛ, BH conjugatæ diametri ſunt, & AK ſectionem contingit, ipſique BH parallela ducta eſt AΛ: erit [per 38. 1. huj.] KΘΛ æquale quartæ parti figuræ quæ ad BH conſtituitur; quare & ipſum datum erit. eſt autem [per 26. dat.] KΘ data: ergo [per 57. dat.] & ΘΛ. ſed & poſitione, & eſt datum punctum Θ: ergo & Λ. & per Λ ducta eſt ΛA parallela ipſi BH poſitione datæ: igitur [per 28. dat.] ipſa poſitione dabitur. ſed & ſectio etiam datur poſitione: quare [per 25. dat.] & A punctum. ſed & punctum K datur: ergo [per 26. dat.] AK poſitione data erit.



Componetur autem ſic. Ponantur alia eadem, ſitque datum punctum K in loco ſupra deſcripto: & juncta KΘ producatur, & ſumpto in ſectione puncto Γ ducatur ΓΔ ipſi KΘ parallela, & ΓΔ bifariam in E ſecetur, junctaque EΘ producatur, & ipſi BΘ ponatur æqualis ΘH: ergo HB tranſverſa diameter eſt ipſi KΘΛ conjugata. ponatur vero quartæ parti figuræ quæ eſt ad BH æquale rectangulum KΘΛ, perque Λ ipſi BH parallela ducatur ΛA, & jungatur KA. patet igitur KA ſectionem contingere, per converſam trigeſimi octavi theorematis primi libri.

At ſi datum punctum ſit in loco inter ZΘΠ interjecto, problema erit impoſſibile. recta enim contingens ſecabit HΘ, & utrique ipſarum ZΘ, ΘΠ occurret; quod eſt abſurdum, ex iis quæ in trigeſimo primo theoremate primi libri, & in tertio hujus demonſtrata ſunt.

Iisdem poſitis, ſit ſectio data Ellipſis, datum vero punctum in ſectione A; & oporteat ab ipſo A ducere rectam quæ ſectionem contingat. Ponatur factum; ſitque ea recta AH, & ab A ad BΓ axem ordinatim applicetur AΔ: erit igitur [per 47. 2 huj.] punctum Δ datum, & [per 36. 1. huj.] ut ΓΔ ad ΔB ita erit ΓH ad HB. ſed [per 1. dat.] ratio ΓΔ ad ΔB data eſt: ergo & ratio ΓH ad HB data erit; & idcirco [per 2. dat.] punctum H. ſed & A datur: quare & AH erit poſitione data.



Componetur autem hoc pacto. ducatur perpendicularis AΔ, & ipſius ΓH ad HB ratio eadem ſit [per 10. 6.] quæ ratio ΓΔ ad ΔB, jungaturque AH: conſtat igitur [per 34. 1. huj.] AH ſectionem contingere, ſicut in hyperbola.

Sit rurſus datum punctum K, à quo oporteat rectam contingentem ducere. factum ſit, & ſit ea recta KA, ductaque KΛΘ per Θ centrum

ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΕ ἐκβληθῇ· καὶ ἔσται θέσει, διάμετρος οὖσα συζυγὴς τῇ ΚΘ. κείσθω δὴ τῇ ΒΘ ἴση ἡ ΘΗ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΒΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΑ· ἔσται δή, διὰ τὸ εἶναι τὰς ΚΛ, ΒΗ συζυγεῖς διαμέτρους, καὶ ἐφαπτομένην τὴν ΑΚ, καὶ τὴν ΑΛ ἀχθεῖσαν παρὰ τὴν ΒΗ, τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘΛ ἴσον τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΒΗ εἴδους· δοθὲν ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΘΛ. καί ἐστι δοθεῖσα ἡ ΚΘ, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΘΛ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει, καί ἐστι δοθὲν τὸ Θ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Λ. καὶ διὰ τοῦ Λ παρὰ θέσει τὴν ΒΗ ἦκται ἡ ΛΑ, θέσει ἄρα ἡ ΛΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ· θέσει ἄρα ἡ ΑΚ·

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ ἐν τῷ προειρημένῳ τόπῳ· καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Γ, καὶ παρὰ τὴν ΚΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα τῷ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ ΒΘ ἴση κείσθω ἡ ΘΗ· ἡ ἄρα ΗΒ πλαγία διάμετρός ἐστι συζυγὴς τῇ ΚΘΛ. κείσθω δὲ τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν ΒΗ εἴδους ἴσον τὸ ὑπὸ ΚΘΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΒΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΚΑ ἐφάπτεται τῆς τομῆς, διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ λη΄. τοῦ πρώτου βιβλίου.

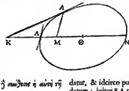
ΕΑΝ δὲ ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν ΖΘΠ δοθῇ, ἀδύνατον ἔσται τὸ πρόβλημα. ἡ γὰρ ἐφαπτομένη τεμεῖ τὴν ΗΘ· ὥστε συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ΖΘ, ΘΠ, ὅπερ ἀδύνατον, διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ λα΄. τοῦ πρώτου, καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τούτου βιβλίου.

ΤΩΝ αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω ἡ τομὴ ἔλλειψις, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Α· καὶ δέον ἔστω ἀπὸ τοῦ Α ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΑΗ, καὶ τεταγμένως ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸν ΒΓ ἄξονα ἤχθω ἡ ΑΔ· ἔσται δὴ δοθὲν τὸ Δ, καὶ ἔσται ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ. καὶ ἔστι λόγος τοῦ ΓΔ πρὸς ΔΒ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ δοθείς· δοθὲν ἄρα τὸ Η. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ, καὶ τῷ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΗ ἐφάπτεται, ὥσπερ καὶ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς.

ΕΣΤΩ δὲ πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ, καὶ δέον ἔστω ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΛΘ ἐπὶ τὸ Θ κέντρον ἐκβεβλήσθω

ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ N· ἔσται δὴ θέσει. καὶ ἐὰν ἀχθῇ ἡ AM τεταγμένως, ἔσται ὡς ἡ NK πρὸς KΛ οὕτως ἡ NM πρὸς MΛ. λόγος δὲ τῆς KN πρὸς KΛ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς MN πρὸς ΛM δοθείς· δοθὲν ἄρα τὸ M. καὶ ἀνῆκται ἡ MA, παράλληλος γάρ ἐστι τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ· θέσει ἄρα ἡ MA, δοθὲν ἄρα τὸ Δ. ἀλλὰ καὶ τὸ K· θέσει ἄρα ἡ KA. ἡ δὲ σύνθεσις ἡ αὐτὴ τῇ πρὸ αὐτοῦ.

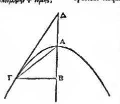


producatur in N: erit igitur ea poſitione data. & ſi AM ordinatim applicetur, erit [per 36. 1. huj.] ut NK ad KA ita NM ad MA. ratio autem KN ad KA [per 1. dat.] eſt data: ergo & data eſt ratio MN ad AM; quare [per 7. dat.] & punctum M datur. & ordinatim applicatur MA, parallela nempe rectæ in A contingenti: ergo MA poſitione datur, & idcirco punctum A. ſed & ipſum K eſt datum: igitur KA poſitione datur. Compoſitio autem eadem eſt quæ ſupra.

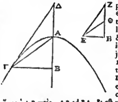
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν΄.

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν, ἥτις πρὸς τῷ ἄξονι γωνίαν ποιήσει, ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ, ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ πρότερον Παραβολή, ἧς ἄξων ὁ AB· δεῖ δὴ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς, ἥτις πρὸς τῷ AB ἄξονι γωνίαν ποιήσει, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ τομῇ, ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία. ἤχθω κάθετος ἡ ΒΓ· ἔστι δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ Β δοθεῖσα· λόγος ἄρα τῆς ΔΒ πρὸς ΒΓ δοθείς. τῆς δὲ ΒΔ πρὸς ΒΑ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ πρὸς τὸ Β γωνία· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. καὶ ἔστι πρὸς θέσει τῇ ΒΑ καὶ δοθέντι τῷ Α· θέσει ἄρα ἡ ΓΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Γ. καὶ ἐφάπτεται ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.



Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον Παραβολή, ἧς ἄξων ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ· καὶ εἰλήφθω σημεῖον ἐπὶ τῆς ΕΖ τὸ Ε, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΗ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΖΗ τῷ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΕ, καὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΗΘΕ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΒΓ, καὶ τῇ ΒΑ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ· ἐφαπτομένη ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς τομῆς. λέγω δὴ ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΒ τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖΗ ἐστὶν ἴση. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ΘΗ πρὸς ΗΕ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Η, Β γωνίαι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῇ Δ γωνίᾳ.



Prop. L. *Probl.*

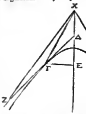
Datâ coni ſectione, contingentem ducere, quæ cum axe, verſus partes ſectionis, angulum faciat dato angulo acuto æqualem.

SIT coni ſectio primum Parabola, cujus axis AB: oporteat itaque rectam ducere quæ ſectionem contingat, quæque cum AB faciat angulum ad partes ſectionis dato angulo acuto æqualem. Ponatur factum eſſe, & ſit ΓΔ: datus igitur eſt ΒΔΓ angulus. ducatur perpendicularis ΒΓ: eſt igitur angulus ad B datus; quare [per 40. dat.] data eſt ratio ΔΒ ad ΒΓ. ſed [per 35. 1. huj.] ratio ΔΒ ad ΒΑ eſt data: ratio igitur ΑΒ ad ΒΓ [per 8. dat.] data erit. & datus eſt angulus qui ad B: ergo & ΒΑΓ angulus eſt datus. & eſt ad rectam ΒΑ poſitione datam & ad datum punctum A: igitur ΓΑ poſitione dabitur. at ſectio data eſt poſitione: ergo punctum Γ datum. & ΓΔ ſectionem contingit: quare & poſitione data erit.

Componetur autem problema hoc modo. Sit data coni ſectio primum Parabola, cujus axis AB, datus autem angulus acutus ΕΖΗ, ſumptoque in ΕΖ puncto E, ducatur perpendicularis ΕΗ, & ΖΗ in Θ biſariam ſecetur, & jungatur ΘΕ, & angulo ΗΘΕ æqualis conſtituatur angulus ΒΑΓ; & ducta perpendiculari ΒΓ ipſi ΒΑ ponatur æqualis ΑΔ, jungaturque ΓΔ: ergo [per 35. 1. huj.] ΓΔ ſectionem contingit. dico itaque angulum ΓΔΒ angulo ΕΖΗ æqualem eſſe. quoniam enim [per conſtr.] eſt ut ΖΗ ad ΗΘ ita ΔΒ ad ΒΑ, & eſt ut ΘΗ ad ΗΕ ita ΑΒ ad ΒΓ: erit ex æquali [per 22. 5.] ut ΖΗ ad ΗΕ ita ΔΒ ad ΒΓ. ſed [per conſtr.] anguli qui ad Η, Β recti ſunt: angulus igitur Ζ [per 6. 6.] angulo Δ eſt æqualis.

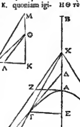
Sit

Sɪᴛ ſectio Hyperbola, ponaturque factum, & recta Γ Δ ſectionem contingat: ſumptoque X ſectionis centro jungatur Γ X, & Γ E perpendicularis ducatur: ergo data eſt ratio rectanguli X E Δ ad quadratum ex E Γ; eadem enim eſt [per 37.1.huj.] quæ tranſverſi lateris ad rectum. ratio autem quadrati ex Γ E ad quadratum ex E Δ eſt data, quia datus eſt uterque angulorum Γ Δ E, Δ E Γ: quare & rectanguli X E Δ ad quadratum ex E Δ ratio data eſt, ideoque ratio X E ad E Δ data. ſed [per 40.dat.] datur ratio Γ E ad E Δ; quare [per 8. dat.] & ratio X E ad E Γ data eſt. & angulus qui ad E eſt datus: ergo [per 2. dat.] & qui ad X. & ad rectam X E poſitione datam, & ad datum in ea punctum X, ducta eſt X Γ in dato angulo: ergo & Γ X poſitione dabitur. data eſt autem & ipſa ſectio poſitione: quare & Γ punctum. & [per 49. 2.huj.] ducta eſt Γ Δ contingens: igitur Γ Δ eſt poſitione data. ducatur Z X ſectionis aſymptotos: ergo [per 3. 2. huj.] Γ Δ producta aſymptoto occurret. occurrat in Z: erit igitur Z Δ E angulus angulo Z X Δ major. & propterea, in compoſitione problematis, oportebit datum angulum acutum majorem eſſe quam eſt dimidius ejus qui ab aſymptotis continetur.



Componetur itaque problema hoc modo. Sit data hyperbola, cujus axis quidem A B, aſymptotos autem X Z, & datus angulus acutus ſit K Θ H, qui ſit major angulo A X Z: fiatque [per 23.1.] angulo A X Z æqualis angulus K Θ Λ, & à puncto A ad rectos angulos ipſi A B ducatur A Z, in H Θ vero ſumatur aliquod punctum H, à quo ad Θ K perpendicularis ducatur H K. quoniam igitur angulus Z X A angulo Λ Θ K eſt æqualis, & anguli ad A, K recti ſunt; erit [per 4, 6.] ut X A ad A Z ita Θ K ad K Λ. ſed [per 8.5.] Θ K ad K Λ majorem rationem habet quam Θ K ad K H: ergo quadratum ex X A ad quadratum ex A Z majorem habet rationem quam quadratum ex Θ K ad quadratum ex K H. ut autem quadratum ex X A ad quadratum ex A Z ita [per 1. 2.huj.] tranſverſum figuræ latus ad rectum: quare tranſverſum figuræ latus ad rectum majorem rationem habet quam quadratum ex Θ K ad quadratum ex K H. itaque ſi fiat ut quadratum ex X A ad quadratum ex A Z ita aliud quoddam ad quadratum ex K H: erit illud quadrato ex Θ K majus. ſit rectangulum M K Θ, & jungatur H M. igitur quoniam quadratum ex M K majus eſt rectangulo M K Θ; habebit quadratum ex M K ad quadratum ex K H majorem rationem quam rectangulum



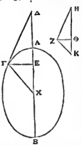


ΕΣΤΩ ἡ τομὴ Ὑπερβολὴ, καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ Γ Δ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς τομῆς τὸ X, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ X, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ Γ E· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν X E Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς E Γ δοθείς. ὁ αὐτὸς γάρ ἐστι τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν. τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς Γ E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς E Δ λόγος ἐστὶ δοθείς, δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ Γ Δ E, Δ E Γ γωνιῶν· λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ X E Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς E Δ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς X E πρὸς E Δ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ Γ E πρὸς τὴν E Δ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς X E πρὸς Γ E λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ δοθεῖσα ἡ πρὸς τὸ E· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ X. πρὸς δὲ θέσει εὐθείᾳ τῇ X E καὶ δοθέντι τῷ X διῆκταί τις ἡ Γ X ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ· θέσει ἄρα ἡ Γ X. θέσει δέ ἐστι καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Γ. καὶ διῆκται ἐφαπτομένη ἡ Γ Δ· θέσει ἄρα ἡ Γ Δ. ἤχθω ἀσύμπτωτος τῆς τομῆς ἡ Z X· ἡ Γ Δ ἄρα ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ ἀσυμπτώτῳ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Z· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ Z Δ E γωνία τῆς ὑπὸ Z X Δ. δεήσει ἄρα, εἰς τὴν σύνθεσιν, τὴν δεδομένην ὀξεῖαν γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων.

Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἧς ἄξων A B, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ X Z, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα, μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ τῶν A X Z, ἡ ὑπὸ K Θ H· καὶ ἔστω τῇ ὑπὸ τῶν A X Z ἴση ἡ ὑπὸ K Θ Λ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A τῇ A B πρὸς ὀρθὰς ἡ A Z, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς H Θ τὸ H, καὶ ἤχθω ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν Θ K κάθετος ἡ H K. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ Z X A τῇ ὑπὸ Λ Θ K, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς A, K γωνίαι ὀρθαί· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ X A πρὸς A Z οὕτως ἡ Θ K πρὸς K Λ. ἡ δὲ Θ K πρὸς K Λ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Θ K πρὸς K H· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ X A πρὸς τὸ ἀπὸ A Z μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ Θ K πρὸς τὸ ἀπὸ K H. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ X A πρὸς τὸ ἀπὸ A Z οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· ἡ πλαγία ἄρα πρὸς τὴν ὀρθίαν μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ Θ K πρὸς τὸ ἀπὸ K H. ἐὰν δὴ ποιήσωμεν ὡς τὸ ἀπὸ X A πρὸς τὸ ἀπὸ A Z οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ ἀπὸ K H, μεῖζον ἔσται τοῦ ἀπὸ Θ K. ἔστω τὸ ὑπὸ M K Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ H M. ἐπεὶ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ M K τοῦ ὑπὸ M K Θ· τὸ ἄρα ἀπὸ M K πρὸς τὸ ἀπὸ K H μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ M K Θ πρὸς τὸ ἀπὸ K H,

ΚΗ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν ὡς τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς ἄλλό τι ἔσται πρὸς ἔλαττον τοῦ ἀπὸ ΑΖ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ὅμοια ποιήσει τρίγωνα· καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΧΑ τῆς ὑπὸ ΗΜΚ. κείσθω δὴ τῇ ὑπὸ ΗΜΚ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΧΓ· ἡ ἄρα ΧΓ τεμεῖ τὴν τομήν. τεμνέτω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ κάθετος ἡ ΓΕ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΧΕ τρίγωνον τῷ ΗΜΚ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ οὕτω τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τό τε ὑπὸ ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, καὶ τὸ ὑπὸ ΜΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΚΘ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΚΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΕ πρὸς ΕΔ οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς ΚΘ. ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΧ οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς ΚΜ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΔ οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Κ γωνίαι· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΘΚ.

ΕΣΤΩ ἡ τομὴ Ἔλλειψις, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ· δεῖ δὴ ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν τῆς τομῆς, ἥτις πρὸς τῷ ἄξονι, ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ, ἴσην γωνίαν περιέξει τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΑ γωνία. ἤχθω κάθετος ἡ ΓΕ· λόγος ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ δοθείς. ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΧ· τοῦ δὴ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς, ὁ γὰρ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΔΕ ἄρα πρὸς ΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΔΕ πρὸς ΕΓ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΓΕ ἄρα πρὸς ΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ ἔστιν ὀρθὴ πρὸς τῷ Ε· δοθεῖσα ἄρα ἡ πρὸς τῷ Χ γωνία. καὶ ἔστι πρὸς θέσει δοθείσῃ καὶ δοθέντι σημείῳ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Γ σημεῖον. καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἡ ΓΔ.



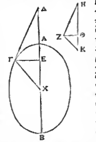
Συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ τῶν ΖΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΖΗ τὸ Ζ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΖ. ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΗΚΖ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΑΧΓ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΓΕ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ποιεῖ τὸ πρόβλημα,

ΜΚΘ ad quadratum ex ΚΗ, hoc eſt majorem quam quadratum ex ΧΑ ad quadratum ex ΑΖ. ac ſi fiat ut quadratum ex ΜΚ ad quadratum ex ΚΗ, ita quadratum ex ΧΑ ad aliud quoddam: erit id minus quadrato ex ΑΖ; & recta quæ à Χ ad ſumptum punctum ducitur, triangula ſimilia efficiet: ac propterea angulus ΖΧΑ angulo ΗΜΚ erit major. ponatur itaque angulo ΗΜΚ æqualis angulus ΑΧΓ: ergo [per 2.2.huj.] ΧΓ ſectionem ſecabit. ſecet in Γ, & [per 49.2.huj.] à Γ ducatur ΓΔ ſectionem contingens, & ΓΕ ad axem ΑΒ perpendicularis: triangulum igitur ΓΧΕ [per 4. 6.] ſimile eſt triangulo ΗΜΚ: quare [per 22. 6.] ut quadratum ex ΧΕ ad quadratum ex ΕΓ ita quadratum ex ΜΚ ad quadratum ex ΚΗ. eſt autem ut tranſverſum figuræ latus ad rectum ita [per 37. 1.huj.] rectangulum ΧΕΔ ad quadratum ex ΕΓ, & ita [per conſtr.] rectangulum ΜΚΘ ad quadratum ex ΚΗ, & invertendo ut quadratum ex ΓΕ ad rectangulum ΧΕΔ ita quadratum ex ΗΚ ad rectangulum ΜΚΘ: ex æquali igitur [per 22.5.] ut quadratum ex ΧΕ ad rectangulum ΧΕΔ ita quadratum ex ΜΚ ad rectangulum ΜΚΘ: eſt igitur [per 1.6.] ut ΧΕ ad ΕΔ ita ΜΚ ad ΚΘ. ſed ut ΓΕ ad ΕΧ ita erat [per conſtr.] ΗΚ ad ΚΜ: quare ex æquali ut ΓΕ ad ΕΔ ita ΗΚ ad ΚΘ. & ſunt anguli ad Ε, Κ recti: angulus igitur ad Δ [per 6.6.] angulo ΗΘΚ eſt æqualis.

Sit ſectio Ellipſis cujus axis ΑΒ: & oporteat rectam ducere, quæ ſectionem contingat, & cum axe ad partes ſectionis faciat angulum dato angulo acuto æqualem. Factum ſit, & ſit ΓΔ: ergo angulus ΓΔΑ eſt datus. ducatur perpendicularis ΓΕ: ratio igitur quadrati ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΓ [per 4. & 22. 6.] data eſt. ſit ſectionis centrum Χ, & jungatur ΓΧ: erit igitur [per 37. 1.huj.] ratio quadrati ex ΓΕ ad rectangulum ΔΕΧ data; eadem enim eſt quæ ratio recti lateris ad tranſverſum: ergo dabitur [per 8. dat.] ratio quadrati ex ΔΕ ad rectangulum ΔΕΧ, & idcirco [per 1. 6.] ratio ΔΕ ad ΕΧ, ratio autem ΔΕ ad ΕΓ eſt data: data igitur eſt & ratio ΓΕ ad ΕΧ. & angulus qui eſt ad Ε rectus eſt: ergo [per 41.dat.] datur angulus ad Χ. & eſt ad rectam poſitione datam, & ad datum punctum: quare [per 29. & 25. dat.] datum erit punctum Γ, & à dato puncto Γ ducitur ΓΔ ſectionem contingens: ergo eſt poſitione data recta ΓΔ.

Componetur autem problema hoc modo. Sit datus angulus acutus ΖΗΘ, ſumaturque in ΖΗ punctum Ζ, & [per 12. 1.] ΖΘ perpendicularis ducatur, & fiat ut rectum latus ad tranſverſum ita quadratum ex ΖΘ ad rectangulum ΗΘΚ, & jungatur ΚΖ. ſit ſectionis centrum Χ, & [per 23.1.] angulo ΗΚΖ æqualis conſtituatur angulus ΑΧΓ, & demittatur perpendicularis ΓΕ, & [per 49.2.huj.] ducatur ΓΔ ſectionem contingens: dico rectam ΓΔ conficere proble-

ma, hoc eſt angulum ΓΔΕ angulo ΖΗΘ æqualem eſſe. quoniam enim [per 4. 6.] ut ΧΕ ad ΒΓ ita ΒΘ ad ΖΘ: erit [per 22. 6.] ut quadratum ex ΧΕ ad quadratum ex ΒΓ ita quadratum ex ΒΘ ad ipſum quadratum ex ΖΘ. eſt autem ut quadratum ex ΓΒ ad rectangulum ΔΕΧ ita quadratum ex ΖΘ ad rectangulum ΒΘΗ; utraque enim ratio eadem eſt [per 37. 1. huj. & conſtr.] quæ recti lateris ad tranſverſum: igitur ex æquali ut quadratum ex ΧΒ ad rectangulum ΧΕΔ ita quadratum ex ΒΘ ad rectangulum ΗΘΒ: ergo [per 1. 6.] ut ΧΕ ad ΒΔ ita eſt ΒΘ ad ΘΗ. eſtque [per 4. 6.] ut ΧΒ ad ΒΓ ita ΒΘ ad ΖΘ: ex æquali igitur ut ΔΕ ad ΕΓ ita ΗΘ ad ΖΘ. & circa rectos angulos latera ſunt proportionalia: ergo [per 6. 6.] angulus ΓΔΕ angulo ΖΗΘ eſt æqualis: recta igitur ΓΔ problema conficit.

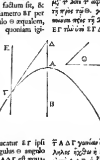


τουτέστιν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῆς ΓΔΕ γωνία τῇ ὑπὸ τῆς ΖΗΘ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΧΕ πρὸς ΕΓ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΖΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΧΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΔΕΧ οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΚΘΗ, ἑκάτερος λόγος γὰρ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΕ πρὸς τὴν ΕΔ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΗ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΧΕ πρὸς ΕΓ οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΖΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ περὶ ὀρθὰς γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογον· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΔΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση· ἡ ΓΔ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

Prop. LI. *Probl.*

Rectam datam coni ſectionem contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto æqualem.

SIT data coni ſectio primum Parabola, cujus axis ΑΒ, & datus angulus ſit Θ: oportet vero ducere rectam, quæ parabolam contingat, & cum diametro per tactum ductâ contineat angulum æqualem dato angulo Θ. factum ſit, & contingens ſit ΓΔ, faciens cum diametro ΒΓ per tactum ducta angulum ΒΓΔ angulo Θ æqualem, & ΓΔ axi in puncto Δ occurrat. quoniam igitur [per 46. 1. huj.] ΑΔ eſt parallela ΒΓ, angulus ΑΔΓ angulo ΕΓΔ eſt æqualis. & datus eſt angulus ΕΓΔ; eſt enim [ex hyp.] æqualis angulo Θ: ergo & ΑΔΓ angulus datus erit.



Componetur itaque hoc modo. Sit parabola cujus axis ΑΒ, & datus angulus Θ. ducatur [per præced.] ΓΔ ſectionem contingens, quæ cum axe faciat angulum ΑΔΓ æqualem angulo Θ; & per Γ ducatur ΕΓ ipſi ΑΒ parallela. quoniam igitur angulus Θ angulo ΑΔΓ eſt æqualis; angulus autem ΑΔΓ eſt æqualis ipſi ΕΓΔ: ideo angulus Θ angulo ΕΓΔ æqualis erit.

SIT ſectio Hyperbola, cujus axis ΑΒ, centrum Ε, & aſymptotos ΕΤ; datus autem angulus ſit Ω, & ΓΔ ſectionem contingat, jungaturque ΓΕ conficiens problema, & ΓΗ perpendicularis ducatur: itaque [datâ ſectione] ratio tranſverſi lateris ad rectum data eſt; igitur & [per 37. 1. huj.] data ratio rectanguli ΕΗΔ ad qua-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην, ἥτις πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ ἴσην περιέξει γωνίαν τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ.

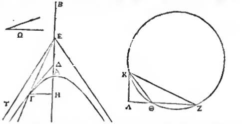
ΕΣΤΩ ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον Παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ· δεῖ δὴ ἀγαγεῖν τῆς παραβολῆς ἐφαπτομένην, ἥτις μετὰ τῆς ἀπὸ τῆς ἁφῆς διαμέτρου ἴσην περιέξει γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Θ. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, ποιοῦσα πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ τῇ ΕΓ τὴν ὑπὸ ΕΓΔ γωνίαν ἴσην τῇ Θ· καὶ συμπιπτέτω ἡ ΓΔ τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΕΓ· ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστί. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΕΓΔ, ἴση γάρ ἐστι τῇ Θ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ.

Συντεθήσεται δὴ οὕτως. Ἔστω παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ. ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ, ποιοῦσα πρὸς τῷ ἄξονι τὴν ὑπὸ τῆς ΑΔΓ γωνίαν ἴσην τῇ Θ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΓ. ἐπεὶ οὖν ἡ Θ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΔΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΓΔ· καὶ ἡ Θ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΓΔ.

ΕΣΤΩ ἡ τομὴ Ὑπερβολή, ἧς ἄξων ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΕΤ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ Ω, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ ποιοῦσα τὸ πρόβλημα, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΓΗ· δοθεὶς ἄρα λόγος ἐστὶ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ

ἀπὸ ΓΗ. ἐκκείσθω δέ τις εὐθεῖα δεδομένη ἡ ΖΘ, καὶ ἐπ' αὐτῆς γεγράφθω κύκλου τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Ω· ἔσται ἄρα μεῖζον ἡμικυκλίου. καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Κ ἤχθω κάθετος ἡ ΚΛ, ποιοῦσα τὸν τοῦ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΚ, ΚΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ

dratum ex ΓΗ. exponatur recta quævis data ΖΘ, & [per 33.3.] ſuper ipſam circuli portio deſcribatur capiens angulum æqualem angulo Ω; erit igitur ſemicirculo major. & ab aliquo puncto eorum quæ ſunt in circumferentia, nempe Κ, ducatur perpendicularis ΚΛ, faciens rationem rectanguli ΖΛΘ ad quadratum ex ΛΚ, eandem quæ eſt tranſverſi lateris ad rectum, & jungan-

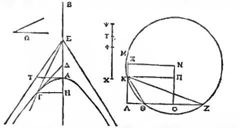


ὑπὸ ΖΚΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΔ· ἀλλὰ καί ἐστιν ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τό τε ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ, καὶ τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· * ὅμοιον ἄρα τὸ ΚΖΛ τρίγωνον τῷ ΓΕΗ τριγώνῳ, καὶ τὸ ΖΘΚ τῷ ΕΔΓ· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΖΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΕΔ.

tur ΖΚ, ΚΘ. quoniam igitur angulus ΖΚΘ eſt æqualis angulo ΕΓΔ; eſt etiam ut tranſverſum latus ad rectum ita [per 37.1. huj.] & rectangulum ΕΗΔ ad quadratum ex ΓΗ, & [ex hyp.] ita rectangulum ΖΛΘ ad quadratum ex ΛΚ: * erit triangulum ΚΖΛ triangulo ΓΕΗ ſimile; & triangulum ΖΘΚ ſimile triangulo ΕΔΓ: quare angulus ΚΖΘ angulo ΓΕΔ eſt æqualis.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΕΤ· ἡ δὲ δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία ἡ Ω, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΨΧ πρὸς ΧΦ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΨΦ κατὰ τὸ Τ. ἐκκείσθω δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΖΘ, καὶ ἐπ' αὐτῆς γεγράφθω τμῆμα κύκλου μεῖ-

Componetur autem hoc modo. Sit data hyperbola ΑΓ, cujus axis ΑΒ, centrum vero Ε, & aſymptotos ΕΤ: datus autem angulus acutus ſit Ω, & data ratio tranſverſi lateris ad rectum ſit eadem quæ ΨΧ ad ΧΦ, & [per 10. 1.] ΨΦ in Τ bifariam ſecetur. exponatur data recta ΖΘ, & ſuper ipſam circuli portio major ſemicirculo [per 33.3.] deſcribatur, capiens angu-



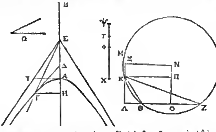
ζον ἡμικυκλίου δεχόμενον γωνίαν τῇ Ω ἴσην, καὶ ἔστω τὸ ΖΚΘ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ν, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὴν ΖΘ κάθετος ἤχθω ἡ ΝΟ, καὶ τετμήσθω ἡ ΝΟ εἰς τὸν τῆς ΤΦ πρὸς ΦΧ λόγον κατὰ τὸ Π, καὶ διὰ τοῦ Π τῇ ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΠΚ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἤχθω ἡ ΚΛ ἐπὶ τὴν ΖΘ ἐκβληθεῖσαν, καὶ ἐπεζεύχθω-

lum æqualem angulo Ω, ſitque ΖΚΘ; ſumatur autem [per 1. 3.] circuli centrum Ν, à quo ad rectam ΖΘ perpendicularis demittatur ΝΟ, & [per 10. 6.] ΝΟ ſecetur in Π, ita ut ΝΠ ad ΠΟ eandem habeat rationem quam ΤΦ ad ΦΧ, & [per 30. 1.] per Π ipſi ΖΘ parallela ducatur ΠΚ, & à puncto Κ ad ΖΘ productam perpendicularis ΚΛ demittatur, & jungantur ΖΚ, ΚΘ,

* Per converſam Lemmatis 9. *Pappi*: & adhuc plenius per Lem. 3. in librum VI. quod ſane huc pertinere videtur.

producaturque

producaturque ΛΚ ad Μ, & à Ν ad ipſam ducatur ΝΞ perpendicularis: parallela eſt igitur [per 28. 1.] ΝΞ ipſi ΖΘ, propterea que ut ΝΠ ad ΠΟ, hoc eſt ΥΦ ad ΦΧ, ita ΞΚ ad ΚΛ, & antecedentium dupla, ut ΨΦ ad ΦΧ ita [per 3. 3.] ΜΚ ad ΚΛ; componendoque [per 18.5.] ut ΨΧ ad ΧΦ ita ΜΛ ad ΛΚ. ſed ut ΜΛ ad ΛΚ ita [per 1.6.] rectangulum ΜΛΚ ad quadratum ex ΛΚ: ut igitur ΨΧ ad ΧΦ ita rectangulum ΜΛΚ ad quadratum ex ΛΚ; hoc eſt [per 36.3.] rectangulum ΖΛΘ ad quadratum ex ΛΚ. ut autem ΨΧ ad ΧΦ ita [per conſtr.] tranſverſum latus ad rectum: ergo ut rectangulum ΖΛΘ ad quadratum ex ΛΚ ita tranſverſum latus ad rectum. ducatur à puncto Α recta ΑΤ normalis ipſi ΑΒ. & quoniam [per 1. 2. huj.] ut quadratum ex ΕΑ ad quadratum ex ΑΤ ita eſt tranſverſum latus ad rectum; & ut tranſverſum latus ad rectum ita rectangulum ΖΛΘ ad quadratum ex ΛΚ; quadratum autem ex ΖΛ ad quadratum ex ΛΚ majorem rationem habet quam rectangulum ΖΛΘ ad quadratum ex ΛΚ: habebit igitur quadratum ex ΖΛ ad quadratum ex ΛΚ majorem rationem quam quadratum ex ΕΑ ad quadratum ex ΑΤ. & ſunt anguli ad Λ,Α recti: angulus igitur Ζ [per 6.lem.2.] angulo ΑΕΤ minor erit. itaque [per 23.1.] conſtituatur angulus ΑΕΓ æqualis angulo ΛΖΚ: ergo [per 2. 2.huj.] ΕΓ ſectioni occurret. occurrat in puncto Γ, & à Γ ducatur [per 49.2.huj.] ΓΔ contingens ſectionem, & ΓΗ perpendicularis: erit itaq; [per 37.1.huj.] ut tranſverſum latus ad rectum ita rectangulum ΕΗΔ ad quadratum ex ΗΓ: ut igitur rectangulum ΖΛΘ ad quadratum ex ΛΚ ita rectangulum ΕΗΔ ad quadratum ex ΗΓ: ideoq; [per 7.lem.2. & 3.lem. 6.] triangulum ΚΖΛ triangulo ΓΕΗ eſt ſimile, & triangulum ΚΘΛ ſimile triangulo ΓΔΗ, & ΚΖΘ ipſi ΓΕΔ: quare angulus ΕΓΔ angulo ΖΚΘ, hoc eſt [per conſtr.] ipſi Ω, eſt æqualis. ſi vero tranſverſi lateris ad rectum ratio ſit æqualis ad æquale; recta ΚΛ circulum ΖΚΘ continget, & recta conjungens centrum & punctum Κ parallela erit ipſi ΖΘ, & hæc ipſa problema conficiet.



σιν αἱ ΖΚ, ΚΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΛΚ ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ΝΞ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΖΘ· καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ὡς ἡ ΝΠ πρὸς ΠΟ, τουτέστιν ἡ ΥΦ πρὸς ΦΧ, οὕτως ἡ ΞΚ πρὸς ΚΛ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ ΨΦ πρὸς ΦΧ οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΨΧ πρὸς ΧΦ οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς ΛΚ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΛ πρὸς ΛΚ οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· ὡς ἄρα ἡ ΧΨ πρὸς ΧΦ οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ. ἀλλ' ὡς ἡ ΨΧ πρὸς ΧΦ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΤ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· τὸ δὲ ἀπὸ ΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· καὶ τὸ ἀπὸ ΖΛ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ. καί εἰσιν αἱ πρὸς Λ, Α γωνίαι ὀρθαί· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῆς ΑΕΤ. συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ ΛΖΚ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΕΓ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Γ, ἤχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ κάθετος ἡ ΓΗ· ἔσται δὴ ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛ τρίγωνον τῷ ΓΕΗ τριγώνῳ, καὶ τὸ ΚΘΛ τῷ ΓΔΗ, καὶ τὸ ΚΖΘ τῷ ΓΕΔ· ὥστε ἡ ὑπὸ ΕΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΖΚΘ, τουτέστι τῇ Ω. ἐὰν δὲ ὁ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν λόγος ἴσος ᾖ πρὸς ἴσον, ἡ ΚΛ ἐφάψεται τοῦ ΖΚΘ κύκλου, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζευγνυμένη παράλληλος ἔσται τῇ ΖΘ, καὶ αὐτὴ ποιήσει τὸ πρόβλημα.

Prop. LII. *Theor.*

Si ellipſim recta linea contingat: angulus, quem facit cum diametro per

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

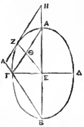
Ἐὰν ἐλλείψεως εὐθεῖα ἐπιψαύῃ ἣν ποιεῖ γωνίαν πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ,

ἐκ

οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐφεξῆς τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν πρὸς μέσην τῆς τομῆς κλωμένων εὐθειῶν.

tactum ducta, non eſt minor angulo deinceps ei qui ſub rectis ad mediam ſectionem inclinatis continetur.

ΕΣΤΩ ἔλλειψις, ἧς ἄξονες μὲν αἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, μείζων δὲ ἔστω τῶν ἀξόνων ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΗΖΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΓΒ, ΖΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Λ· λέγω ὅτι οὐκ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΖΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΛΓΑ.

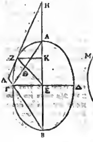


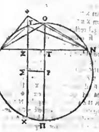
Ἡ γὰρ ΖΕ τῇ ΑΒ ἤτοι παράλληλός ἐστιν, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον παράλληλος, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ. καὶ ἐστι διάμετρος ἡ ΖΕ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Ζ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΑΓ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΑΒ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΘΓΛ, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΖΘ τῇ ὑπὸ ΛΓΘ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ τῆς ΕΓ, ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· ὀξεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΓΘ, ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΛΖΕ· καὶ διὰ τοῦτο ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΗΖΕ.

SIT ellipſis, cujus axes ΑΒ, ΓΔ, centrum vero Ε, & ſit axium major ΑΒ, recta vero ΗΖΛ ſectionem contingat, & junctis ΑΓ, ΓΒ, ΖΕ producatur ΒΓ ad Λ: dico angulum ΛΖΕ non eſſe minorem angulo ΛΓΑ.

Nam recta ΖΕ, vel eſt parallela, vel non eſt parallela ipſi ΑΒ. ſit primum parallela, & eſt ΑΕ æqualis ΕΒ: ergo [per 2.6.] & ΑΘ ipſi ΘΓ eſt æqualis. ſed ΖΕ diameter eſt: recta igitur, quæ in Ζ ſectionem contingit, ipſi ΑΓ [per 6. 2. huj.] eſt parallela. eſt autem & ΖΕ parallela ipſi ΑΒ: parallelogrammum igitur eſt ΖΘΓΛ; & idcirco [per 34. 1.] angulus ΛΖΘ æqualis eſt angulo ΛΓΘ. & quoniam utraque ipſarum ΑΕ, ΕΒ eſt major ipſâ ΕΓ, angulus ΑΓΒ eſt obtuſus: ideoque anguli ΛΓΘ, ΛΖΕ ſunt acuti; & propterea angulus ΗΖΕ obtuſus erit.

Μὴ ἔστω δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ παράλληλος, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΖΚ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΖΕΑ. ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ε ὀρθῇ τῇ πρὸς τῷ Κ ἐστὶν ἴση· οὐκ ἄρα ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΚ· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τουτέστιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΚΕ. ἐκκείσθω κύκλου τμῆμα τὸ ΜΥΝ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΑΓΒ. ἀμβλεῖα δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· ἔλασσον ἄρα ἡμικυκλίου τμῆμά ἐστι ΜΥΝ. πεποιήσθω δὴ ὡς ἡ ΗΚ πρὸς ΚΕ οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς ΞΜ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΥΞΧ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΥ, ΥΝ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΜΝ κατὰ τὸ Τ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΟΤΠ· διάμετρος ἄρα ἐστίν. ἔστω κέντρον τὸ Ρ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἤχθω ἡ ΡΣ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΟ, ΟΝ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΜΟΝ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, καὶ δίχα τέτμηται ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΜΝ κατὰ

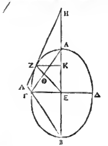


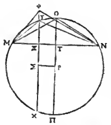


Sed non ſit ΕΖ parallela ipſi ΑΒ, & ducatur ΖΚ perpendicularis: igitur angulus ΑΒΕ non eſt æqualis ipſi ΖΕΑ. rectus autem angulus ad Ε recto ad Κ eſt æqualis: ergo triangulum ΓΒΕ non eſt ſimile triangulo ΖΕΚ; adeoque quadratum ex ΒΕ ad quadratum ex ΕΓ non eſt ſicut quadratum ex ΕΚ ad quadratum ex ΚΖ. ſed ut quadratum ex ΕΒ ad quadratum ex ΕΓ, hoc eſt ut rectangulum ΑΕΒ ad quadratum ex ΕΓ, ſive latus tranſverſum ad rectum, ita [per 37. 1. huj.] rectangulum ΗΚΕ ad quadratum ex ΚΖ: non eſt igitur rectangulum ΗΚΕ ad quadratum ex ΚΖ ſicut quadratum ex ΕΚ ad quadratum ex ΚΖ; ac proinde ΗΚ non eſt ipſi ΚΕ æqualis. exponatur circuli portio ΜΥΝ, capiens angulum æqualem angulo ΑΓΒ. angulus autem ΑΓΒ eſt obtuſus: ergo [per 31.3.] circuli portio ΜΥΝ eſt ſemicirculo minor. fiat vero, ut ΗΚ ad ΚΕ ita ΝΞ ad ΞΜ, & per Ξ ad rectos angulos ipſi ΜΝ ducatur ΥΞΧ, & jungantur ΜΥ, ΥΝ; ſecetur autem ΜΝ bifariam in Τ, & ad rectos angulos ducatur ΟΤΠ: erit igitur [per 3. 3.] hæc diameter. ſit Ρ circuli centrum, à quo perpendicularis ducatur ΡΣ & jungantur ΜΟ, ΟΝ. itaque quoniam angulus ΜΟΝ eſt æqualis angulo ΑΓΒ, & utraque ipſarum ΑΒ, ΜΝ in punctis Ε, Τ bifariam

riam ſecatur, ſuntque anguli ad Ε, Τ recti: triangula igitur Ο Τ Ν, Γ Ε Β [per 4.6.] inter ſe ſimilia erunt: ergo [per 22. 6.] ut quadratum ex Ν Τ ad quadratum ex Τ Ο ita quadratum ex Β Ε ad quadratum ex Ε Γ. & quoniam Τ Ρ eſt æqualis ipſi Σ Ξ, & Ρ Ο major quam Σ Τ: habebit Ο Ρ ad Ρ Τ majorem rationem quam Τ Σ ad Σ Ξ; & per converſionem rationis Ρ Ο ad Ο Τ minorem rationem habebit quam Σ Τ ad Τ Ξ; & antecedentium dupla, itaque Π Ο ad Ο Τ minorem rationem habebit quam Χ Τ ad Τ Ξ; dividendoque Π Τ ad Τ Ο minorem rationem habebit quam Χ Ξ ad Ξ Τ. ſed [per 8. & corol. 20. 6.] ut Π Τ ad Τ Ο ita quadratum ex Τ Ν ad quadratum ex Τ Ο, & quadratum ex Β Ε ad quadratum ex Ε Γ, & tranſverſum latus ad rectum, & rectan-

τὰ Ε, Τ, καὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Ε, Τ γωνίαι· ὅμοια ἄρα τὰ Ο Τ Ν, Γ Ε Β τρίγωνα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ Ν Τ πρὸς τὸ ἀπὸ Τ Ο οὕτω τὸ ἀπὸ Β Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Γ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ Τ Ρ τῇ Σ Ξ, μείζων δὲ ἡ Ρ Ο τῆς Σ Τ· ἡ Ο Ρ ἄρα πρὸς Ρ Τ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Τ Σ πρὸς Σ Ξ, καὶ ἀναστρέψαντι ἡ Ρ Ο πρὸς Ο Τ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Σ Τ πρὸς Τ Ξ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ἡ ἄρα Π Ο πρὸς Ο Τ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Χ Τ πρὸς Τ Ξ· καὶ διελόντι ἡ Π Τ πρὸς Τ Ο ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Χ Ξ πρὸς Ξ Τ. ἀλλὰ ὡς μὲν ἡ Π Τ πρὸς Τ Ο οὕτω τὸ ἀπὸ Τ Ν πρὸς τὸ ἀπὸ Τ Ο, καὶ τὸ ἀπὸ Β Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Γ, καὶ ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ τὸ ὑπὸ Η Κ Ε





gulum Η Κ Ε ad quadratum ex Κ Ζ: ergo rectangulum Η Κ Ε ad quadratum ex Κ Ζ minorem habet rationem quam Χ Ξ ad Ξ Τ, hoc eſt [per 1.6.] quam rectangulum Χ Ξ Τ ad quadratum ex Ξ Τ, hoc eſt [per 35. 3.] rectangulum Ν Ξ Μ ad quadratum ex Ξ Τ. ſi igitur fiat ut rectangulum Η Κ Ε ad quadratum ex Κ Ζ ita rectangulum Ν Ξ Μ ad aliud quoddam; erit quidem ad majus quadrato ex Ξ Τ. ſit ad quadratum ex Ξ Φ: itaque quoniam eſt ut Η Κ ad Κ Ε ita [per conſtr.] Ν Ξ ad Ξ Μ, & ſunt Κ Ζ, Ξ Φ ad rectos angulos, & rectangulum Η Κ Ε ad quadratum ex Κ Ζ eſt ut rectangulum Ν Ξ Μ ad quadratum ex Ξ Φ: erit propterea angulus Η Ζ Ε æqualis angulo Ν Φ Μ: ergo major eſt angulus Ν Τ Μ, hoc eſt Λ Γ Β, angulo Η Ζ Ε. qui vero deinceps eſt, videlicet Λ Ζ Θ, major eſt angulo Λ Γ Θ: igitur angulus Λ Ζ Θ non eſt angulo Λ Γ Θ minor.

πρὸς τὸ ἀπὸ Κ Ζ· τὸ ἄρα ὑπὸ Η Κ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Κ Ζ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Χ Ξ πρὸς Ξ Τ, τουτέστι τὸ ὑπὸ Χ Ξ Τ πρὸς τὸ ἀπὸ Ξ Τ, τουτέστι τὸ ὑπὸ Ν Ξ Μ πρὸς τὸ ἀπὸ Ξ Τ. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν ὡς τὸ ὑπὸ Η Κ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Κ Ζ οὕτως τὸ ὑπὸ Ν Ξ Μ πρὸς ἄλλο τι· ἔσται πρὸς μεῖζον τοῦ ἀπὸ Ξ Τ. ἔστω πρὸς τὸ ἀπὸ Ξ Φ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Η Κ πρὸς Κ Ε οὕτως ἡ Ν Ξ πρὸς Ξ Μ, καὶ πρὸς ὀρθάς εἰσιν αἱ Κ Ζ, Ξ Φ, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ Η Κ Ε πρὸς τὸ ἀπὸ Κ Ζ οὕτως τὸ ὑπὸ Ν Ξ Μ πρὸς τὸ ἀπὸ Ξ Φ· διὰ ταῦτα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ Η Ζ Ε γωνία τῇ ὑπὸ Ν Φ Μ ἴσῃ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ Ν Τ Μ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ Λ Γ Β, τῆς ὑπὸ Η Ζ Ε γωνίας. ἡ δὲ ἐφεξῆς ἡ ὑπὸ Λ Ζ Θ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ Λ Γ Θ· οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ Λ Ζ Θ τῆς ὑπὸ Λ Γ Θ γωνίας.

Prop. LIII. *Probl.*

Rectam ellipſim datam contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum dato angulo acuto æqualem: oportet autem acutum angulum datum non eſſe minorem angulo deinceps ei qui rectis ad mediam ſectionem inclinatis continetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγʹ.

Τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν, ἥτις πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ γωνίαν ποιήσει ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ. δεῖ δὲ τὴν διδομένην ὀξεῖαν γωνίαν μὴ ἐλάσσονα εἶναι τῆς ἐφεξῆς τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν πρὸς μέσην τὴν τομὴν κλωμένων εὐθειῶν.

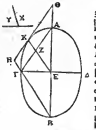
ΕΣΤΩ

ΕΣΤΩ ἡ δοθεῖσα ἔλλειψις, ἧς μείζων μὲν ἄξων ὁ Α Β, ἐλάσσων δὲ ὁ Γ Δ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Α Γ, Γ Β, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἡ Υ οὐκ ἐλάσσων τῆς ὑπὸ Α Γ Η· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ Α Γ Β οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς Χ. ἡ Υ ἄρα τῆς ὑπὸ Α Γ Η ἢ μείζων ἐστὶν, ἢ ἴση.

Ἔστω πρότερον ἴση, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ Β Γ παράλληλος ἤχθω ἡ Ε Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ Κ Θ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ Α Ε τῇ Ε Β, καί ἐστιν ὡς ἡ Α Ε πρὸς Ε Β οὕτως ἡ Α Ζ πρὸς Ζ Γ· ἴση ἄρα ἡ Α Ζ τῇ Ζ Γ. καί ἐστι διάμετρος ἡ Κ Ε· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, τουτέστιν ἡ Θ Κ Η, παράλληλός ἐστι τῇ Γ Α. ἔστι δὲ καὶ ἡ Ε Κ τῇ Η Β παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ Κ Ζ Γ Η, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ Η Κ Ε γωνία τῇ ὑπὸ Η Γ Ζ γωνίᾳ. ἡ δὲ ὑπὸ Η Γ Ζ τῇ δοθείσῃ, τουτέστι τῇ Υ, ἴση ἐστίν· καὶ ἡ ὑπὸ Η Κ Ε ἄρα ἐστὶν ἴση τῇ Υ γωνίᾳ.

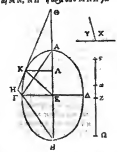
Ἔστω δὲ μείζων ἡ Υ γωνία τῆς ὑπὸ Α Γ Η· ἀνάπαλιν δὴ ἡ Χ τῆς ὑπὸ Α Γ Β ἐλάσσων ἐστίν. ἐκκείσθω κύκλος, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπ' αὐτοῦ τμῆμα, καὶ ἔστω τὸ Μ Ν Π δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Χ, καὶ τετμήσθω ἡ Μ Π δίχα κατὰ τὸ Ο, καὶ ἀπὸ τοῦ Ο τῇ Μ Π πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ Ν Ο Ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Μ Ν, Ν Π· ἡ ἄρα ὑπὸ Μ Ν Π γωνία

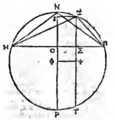
SIT data ellipſis, cujus major axis A B, minor Γ Δ, & centrum E, & jungantur A Γ, Γ B; datus autem angulus ſit Υ, non minor angulo A Γ H; ita ut angulus A Γ B non ſit minor angulo X. angulus igitur Υ vel major eſt angulo A Γ H, vel ipſi æqualis.



Sit primum æqualis, & [per 30. 1.] per E ducatur E K ipſi B Γ parallela, & [per 49. 2.huj.] per K contingens ſectionem K Θ. quoniam igitur A E eſt æqualis E B, & ut A E ad E B ita [per 2. 6.] A Z ad Z Γ: erit A Z ipſi Z Γ æqualis. & eſt K E diameter: ergo [per 5.2.huj.] quæ in K ſectionem contingit, hoc eſt Θ K H, parallela erit ipſi Γ A. ſed & E K parallela eſt H B: parallelogrammum igitur eſt K Z Γ H; & ob id [per 34. 1.] angulus H K E angulo H Γ Z æqualis. angulus autem H Γ Z eſt æqualis angulo dato Υ: ergo & H K E angulo Υ æqualis erit.

Sit vero angulus Υ major angulo A Γ H: erit è contra angulus X minor angulo A Γ B. exponatur circulus, & [per 34. 3.] ab eo auferatur portio M N Π, capiens angulum æqualem angulo X, & [per 10. 1.] bifariam ſecetur M Π in O, & per O [per 11. 1.] ducatur N O P ad rectos angulos ipſi M Π, & jungantur M N, N Π: angulus igitur M N Π minor eſt angulo A Γ B. anguli autem



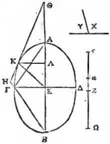


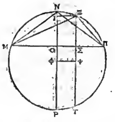
νία τῆς ὑπὸ Α Γ Β ἐλάσσων ἐστίν. ἀλλὰ τῆς μὲν ὑπὸ Μ Ν Π ἡμίσειά ἐστιν ἡ ὑπὸ Μ Ν Ο, τῆς δὲ ὑπὸ Α Γ Β ἡ ὑπὸ Α Γ Ε· ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ Μ Ν Ο τῆς ὑπὸ Α Γ Ε. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Ο· ἡ ἄρα Α Ε πρὸς Ε Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Μ Ο πρὸς Ο Ν, ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε Γ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ Μ Ο πρὸς τὸ ἀπὸ Ο Ν. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ Α Ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Α Ε Β, τὸ δὲ ἀπὸ Μ Ο ἴσον τῷ ὑπὸ Μ Ο Π, τουτέστι τῷ ὑπὸ Ν Ο Ρ· τὸ ἄρα ὑπὸ Α Ε Β πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Γ, τουτέστιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν,

M N Π [per 4. 6.] dimidius eſt angulus M N O, & anguli A Γ B dimidius eſt A Γ E: ergo M N O angulus angulo A Γ B eſt minor. & anguli ad E & O recti ſunt: quare A E ad E Γ majorem rationem habet quam M O ad O N; & ideo quadratum ex A E ad quadratum ex E Γ majorem habet rationem quam quadratum ex M O ad quadratum ex O N. ſed quadratum ex A E æquale eſt rectangulo A E B; & quadratum ex M O æquale rectangulo M O Π, hoc eſt [per 35. 3.] ipſi N O P: ergo rectangulum A E B ad quadratum ex E Γ, hoc eſt [per 21. 1.huj.] tranſverſum latus ad rectum,

rectum, majorem rationem habet quam rectangulum PON ad quadratum ex ON; hoc eſt [per 1. 6.] quam PO ad ON. fiat autem [per 12. 6.] ut tranſverſum latus ad rectum ita Ωα ad αϛ, & Ωϛ bifariam ſecetur in Z. quoniam igitur tranſverſum latus ad rectum majorem rationem habet quam PO ad ON: habebit & Ωα ad αϛ majorem rationem quam PO ad ON; & componendo Ωϛ ad ϛα majorem habebit rationem quam PN ad NO. ſit Φ circuli centrum: ergo Zϛ ad ϛα majorem habet rationem quam ΦN ad NO; dividendoque αZ ad αϛ majorem rationem habet quam ΦO ad ON. fiat ut Zα ad αϛ ita ΦO ad minorem ipſa ON, puta ad OI; & ducantur [per 30. 1.] IΞ, ΦΨ ipſi MΠ parallelæ, ſicut & ΞΨT ipſi NP: erit igitur ut Zα

μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΡΟΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΝ, τουτέστιν ἡ ΡΟ πρὸς ΟΝ. γενέσθω δὲ ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως ἡ Ωα πρὸς αϛ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ Ωϛ κατὰ τὸ Ζ. ἐπεὶ οὖν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΡΟ πρὸς ΟΝ· καὶ ἡ Ωα πρὸς αϛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΡΟ πρὸς ΟΝ, καὶ συνθέντι ἡ Ωϛ πρὸς τὴν ϛα μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἡ ΡΝ πρὸς ΝΟ. ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Φ· ὥστε καὶ ἡ Ζϛ πρὸς ϛα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ΦΝ πρὸς ΝΟ, καὶ διελόντι ἡ αΖ πρὸς αϛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΦΟ πρὸς ΟΝ. γενέσθω δὲ ὡς ἡ Ζα πρὸς αϛ οὕτως ἡ ΦΟ πρὸς ἐλάττονα τῆς ΟΝ, οἷον τὴν ΙΟ, καὶ ἤχθωσαν αἱ ΙΞ, ΦΨ τῇ ΜΠ, καὶ ἡ ΞΨΤ





ad αϛ ita ΦO ad OI, & ΨΣ ad ΣΞ; componendoque ut Zϛ ad ϛα ita ΨΞ ad ΞΣ; & antecedentium dupla, ut Ωϛ ad ϛα ita TΞ ad ΞΣ; & dividendo, ut Ωα ad αϛ, hoc eſt [per conſtr.] ut tranſverſum latus ad rectum, ita TΣ ad ΣΞ. jungantur itaque MΞ, ΞΠ, & ad rectam ΛE, & ad punctum in ea E conſtituatur [per 23. 1.] angulus ΛEK æqualis angulo MΠΞ, & per K ducatur [per 49. 2. huj.] KΘ ſectionem contingens, & KΛ ordinatim applicetur. quoniam igitur angulus MΠΞ æqualis eſt angulo ΛEK, & rectus angulus ad Σ eſt æqualis recto ad Λ; erit [per 32. 1.] triangulum ΞΣΠ æquiangulum triangulo KΛE; & ut tranſverſum latus ad rectum ita eſt TΣ ad ΣΞ, hoc eſt [per 1. 6.] rectangulum TΣΞ ad quadratum ex ΞΣ, hoc eſt [per 35. 3.] rectangulum MΣΠ ad quadratum ex ΞΣ: ſimile igitur eſt [per lem. 7. 2. huj.] triangulum ΘΛK triangulo MΣΞ, & triangulum ΘKE ſimile ipſi MΞΠ: & propterea angulus MΞΠ eſt æqualis angulo ΘKE. eſt autem [per 21. 3.] angulus MΞΠ æqualis angulo MNΠ, hoc eſt [per conſtr.] angulo X: quare & ΘKE angulus angulo X eſt æqualis: angulus igitur deinceps HKE [per 13. 1.] ei qui deinceps eſt angulo Y æqualis erit; ergo ducta eſt HΘ ſectionem contingens, quæ cum diametro KE per tactum ducta facit HKE angulum dato angulo Y æqualem: quod erat faciendum.

τῇ ΝΡ παράλληλοι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζα πρὸς τὴν αϛ οὕτως ἡ ΦΟ πρὸς ΟΙ, καὶ ἡ ΨΣ πρὸς ΣΞ· καὶ συνθέντι ὡς Ζϛ πρὸς ϛα οὕτως ἡ ΨΞ πρὸς ΞΣ· καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ Ωϛ πρὸς ϛα οὕτως ἡ ΤΞ πρὸς ΞΣ· καὶ διελόντι ὡς ἡ Ωα πρὸς αϛ, τουτέστιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτως ἡ ΤΣ πρὸς ΣΞ. ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ ΜΞ, ΞΠ, καὶ συνεστάτω, πρὸς τῇ ΛΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ Ε σημείῳ, τῇ ὑπὸ ΜΠΞ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΕΚ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΚΘ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΚΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΜΠΞ γωνία τῇ ὑπὸ ΛΕΚ, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τὸ Σ ὀρθῇ τῇ πρὸς τὸ Λ ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΞΣΠ τῷ ΚΛΕ τριγώνῳ. καὶ ἔστιν ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως ἡ ΤΣ πρὸς ΣΞ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΤΣΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΣΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚ τρίγωνον τῷ ΜΣΞ τριγώνῳ, καὶ τὸ ΘΚΕ τῷ ΜΞΠ· καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΜΞΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΚΕ. ἡ δὲ ὑπὸ ΜΞΠ τῇ ὑπὸ ΜΝΠ ἐστὶν ἴση, τουτέστι τῇ Χ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΕ ἄρα τῇ Χ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΚΕ τῇ ἐφεξῆς τῇ Υ ἐστὶν ἴση· ἦκται ἄρα τῆς τομῆς ἐφαπτομένη ἡ ΗΘ πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ τῇ ΚΕ, γωνίαν ποιοῦσα τὴν ὑπὸ ΗΚΕ ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Υ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ΠΑΠ-

Digitized by Google

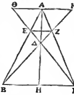
ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΛΗΜΜΑΤΑ
ΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟ ΤΡΙΤΟΝ
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA
IN TERTIUM LIBRUM CONICORUM
APOLLONII PERGÆI.

ΛΗΜΜΑ α΄.

Καταγεγράφθω ἡ ΑΒΓΔΕΖΗ, ἔστω δὲ ἴση ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ. ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ.

Ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΒΖ, ΓΕ ἐπὶ τὰ Κ, Θ σημεῖα. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΑ τῇ ΑΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΘΑ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΚΑ, τουτέστιν ἡ ΓΖ πρὸς ΖΑ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ.



LEMMA I.

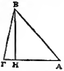
Sit deſcripta figura ΑΒΓΔΕΖΗ; & ſit ΒΗ æqualis ipſi ΗΓ. dico ΕΖ ipſi ΒΓ parallelam eſſe.

DUCATUR enim per Α recta ΘΚ parallela ipſi ΒΓ, & ΒΖ, ΓΚ ad puncta Κ, Θ producantur. itaque quoniam ΒΗ eſt æqualis ipſi ΗΓ; erit [propter æquiangula triangula ΒΔΗ, ΚΔΑ, item ΗΔΓ, ΑΔΘ] & ΘΑ ipſi ΑΚ æqualis: ergo [propter æquiangula triangula ΒΕΓ, ΑΕΘ, item ΒΖΓ, ΚΖΑ] ut ΒΓ ad ΘΑ, hoc eſt ut ΒΕ ad ΕΑ, ita ΒΓ ad ΚΑ, hoc eſt ΓΖ ad ΖΑ: quare ΕΖ ipſi ΒΓ eſt parallela.

ΛΗΜΜΑ β΄.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς Α, Δ γωνίας, ἴσον δὲ ἔστω τὸ ὑπὸ ΒΑΓ τῷ ὑπὸ ΕΔΖ. ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον.

Ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΒΗ, ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΑ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΕΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΔΖ. ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ ΒΑΓ τῷ ὑπὸ ΕΔΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ τῷ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ. ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ ΒΗ, ΑΓ ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ ΕΘ, ΔΖ ἥμισύ ἐστι τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. φανερὸν δὲ ὅτι καὶ τὰ διπλᾶ αὐτῶν παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστίν.



LEMMA II.

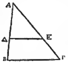
Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ angulos Α, Δ æquales habentia; & ſit rectangulum ΒΑΓ æquale rectangulo ΕΔΖ. dico triangulum triangulo æquale eſſe.

DUctis enim perpendicularibus ΒΗ, ΕΘ; erit [per 4. 6.] ut ΗΒ ad ΒΑ ita ΕΘ ad ΕΔ: ergo [per 1. 6.] ut rectangulum ſub ΒΗ & ΑΓ ad rectangulum ΒΑΓ ita rectangulum ſub ΕΘ & ΔΖ ad rectangulum ΕΔΖ. eſt autem [ex hyp.] rectangulum ΒΑΓ rectangulo ΕΔΖ æquale: ergo [per 14. 5.] & rectangulum ſub ΒΗ & ΑΓ æquale rectangulo ſub ΕΘ & ΔΖ. ſed [per 41. 1.] rectanguli ſub ΒΗ & ΑΓ dimidium eſt ΑΒΓ triangulum; & rectanguli ſub ΕΘ & ΔΖ dimidium triangulum ΔΕΖ: triangulum igitur ΑΒΓ triangulo ΔΕΖ æquale erit. Perſpicuum autem eſt & parallelogramma ipſorum dupla inter ſe æqualia eſſe.



LEMMA III.

Sit triangulum ABΓ, & ſit ΔE ipſi BΓ parallela. dico ut quadratum ex BA ad quadratum ex AΔ ita eſſe triangulum ABΓ ad triangulum AΔE.



QUoniam enim triangulum ABΓ ſimile eſt triangulo AΔB, habebit [per 19. 6.] ABΓ triangulum ad ipſum AΔE duplicatam rationem ejus quam habet BA ad AΔ. ſed quadratum ex BA ad quadratum ex AΔ duplicatam rationem habet ejus quam habet BA ad AΔ: ergo ut quadratum ex BA ad quadratum ex AΔ, ita erit ABΓ triangulum ad triangulum AΔE.

ΛΗΜΜΑ γʹ.

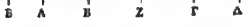
Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ παράλληλος ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ. ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΔΒ τριγώνῳ, τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΒ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ. ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον.

LEMMA IV.

Sint lineæ AB, ΓΔ inter ſe æquales, & ſumatur quodvis punctum E. dico rectangulum ΓEB ſuperare rectangulum ΓAB rectangulo ΔEA.

SEcetur enim BΓ bifariam in Z: ergo punctum Z lineam quoque AΔ bifariam ſecat. & quoniam [per 6. 2.] rectangulum ΓEB una cum quadrato ex BZ æquale eſt quadrato ex EZ: rectangulum autem ΔEA una cum quadrato ex AZ æquale eſt quadrato ex EZ, atque eſt quadratum ex AZ æquale rectangulo ΓAB una cum quadrato ex BZ; commune auferatur quadratum ex BZ: reliquum igitur rectangulum ΓEB æquale eſt rectangulo ΓAB una cum rectangulo ΔEA: quare ΓEB rectangulum ſuperat rectangulum ΓAB ipſo ΔEA rectangulo. Q. E. D.

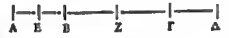


ΛΗΜΜΑ δʹ.

Ἴσαι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε. ὅτι τὸ ὑπὸ ΓΕΒ ὑπερέχει τοῦ ὑπὸ ΓΑΒ τῷ ὑπὸ ΔΕΑ.

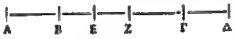
Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα τῷ Ζ· τὸ Ζ ἄρα διχοτομία ἐστὶ καὶ τῆς ΑΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΓΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΖ, ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ ΔΕΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΖ, καὶ ἔτι τὸ ἀπὸ ΑΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΓΑΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΖ, κοινὸν ἐκκεκρούσθω τὸ ἀπὸ ΒΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΓΑΒ καὶ τῷ ὑπὸ ΔΕΑ· ὥστε καὶ τὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΓΑΒ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ ΔΕΑ, ὅπερ ἔ. δ.

Si vero punctum E ſit inter A & B; rectangulum ΓEB minus eſt quam rectangulum ΓAB, eodem ipſo ſpatio, videlicet rectangulo ΔEA: quod ſimili ratione demonſtrabitur.



Ἐὰν δὲ τὸ Ε σημεῖον ᾖ μεταξὺ τῶν Α, Β σημείων, τὸ ὑπὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΓΑΒ ἔλασσον ἔσται τῷ αὐτῷ χωρίῳ τῷ ὑπὸ ΔΕΑ· ὅπερ ἐστὶ κατὰ τὰ αὐτὰ ἡ ἀπόδειξις.

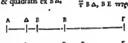
Quod ſi punctum E ſit inter B & Γ; eadem ratione rectangulum ΓEB minus erit quam rectangulum ABΔ rectangulo AEΔ.



Ἐὰν δὲ τὸ Ε σημεῖον ᾖ μεταξὺ τῶν Β, Γ, τὸ ὑπὸ ΓΕΒ τοῦ ὑπὸ ΑΒΔ ἔλασσον ἔσται τῷ ὑπὸ ΑΕΔ, τῇ αὐτῇ ἀγωγῇ.

LEMMA V.

Sit recta AB æqualis ipſi BΓ, & duo puncta Δ, E ſumantur. dico quadratum ex AB quater ſumptum æquale eſſe rectangulo AΔΓ bis, una cum rectangulo AEΓ bis & quadratis ex BΔ, BE bis ſumptis.



HOC autem perſpicuum eſt, quadratum enim ex AB bis ſumptum, propter biſectionem, æquale eſt [per 5. 2.] rectangulo AΔΓ bis & quadrato ex ΔB bis: itemque quadratum ex AB bis eſt æquale rectangulo AEΓ bis & bis quadrato ex EB.

ΛΗΜΜΑ εʹ.

Ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, καὶ δύο σημεῖα τὰ Δ, Ε. ὅτι τὸ τετράκις ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ ΑΕΓ καὶ τοῦ δὶς ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΒΕ τετραγώνων.

Τοῦτο δὲ φανερόν. τὸ μὲν γὰρ δὶς ἀπὸ ΑΒ, διὰ τὴν διχοτομίαν, ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ ΑΔΓ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΒΔ· τὸ δὲ δὶς ἀπὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ ΑΕΓ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΕΒ τετραγώνῳ.

LEMMA VI.

Sit recta AB æqualis ipſi ΓΔ, & ſumatur punctum E. dico quadrata ex AE, BΔ æqualia eſſe quadratis ex BE, EΓ & rectangulo ſub AΓΔ bis ſumpto.

SEcetur BΓ bifariam in Z. & quoniam quadratum ex ΔZ bis ſumptum æquale eſt [per 5. 2.] rect.

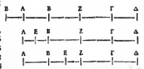
ΛΗΜΜΑ ϛʹ.

Ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ σημεῖον τὸ Ε. ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΒΔ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΕ, ΕΓ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓΔ.

Τετμήσθω δίχα ἡ ΒΓ κατὰ τὸ Ζ. ἐπεὶ οὖν τὸ δὶς ἀπὸ τῆς ΔΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ ΑΓΔ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ

*

ὑπὸ ΓΖ, κοινοῦ προστεθέντος τοῦ δὶς ὑπὸ ΕΖ, ἴσον ἐστὶ τό τε δὶς ὑπὸ ΑΓΔ καὶ τὰ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΒ τοῖς δὶς ἀπὸ τῶν ΔΖ, ΖΒ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν δὶς ἀπὸ ΔΖ, ΖΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ τετράγωνα, τοῖς δὲ δὶς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΒ, ΕΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΒΕ, ΒΓ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓΔ.

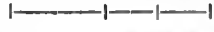


angulo ΑΓΔ bis & bis quadrato ex ΓΖ, addito communi quadrato ex ΒΖ bis, erit rectangulum ΑΓΔ bis una cum quadratis ex ΓΖ, ΖΕ bis æquale quadratis ex ΔΖ, ΖΒ bis ſumptis. ſed [per 9. vel 10. 2.] quadratis ex ΔΖ, ΖΕ bis ſumptis æqualia ſunt quadrata ex ΑΕ, ΕΔ, quadratis autem ex ΓΒ, ΖΒ bis ſumptis æqualia ſunt ex ΒΕ, ΕΓ quadrata: quadrata igitur ex ΑΒ, ΒΔ æqualia ſunt quadratis ex ΒΕ, ΒΓ & rectangulo ΑΓΔ bis ſumpto.

ΛΗΜΜΑ ζ.

Ἔστω τὸ ὑπὸ ΒΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΑ. ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ.

Κοινὸν γὰρ ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ ἴσον ἐστὶ τῇ τῶν ἀπὸ ΑΔ, ΔΓ ὑπεροχῇ, τουτέστι τοῖς ὑπὸ τῶν ΔΑΓ, ΑΓΔ. τὸ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΑΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΒΔ, ΑΓ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ ΔΑΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΓΔ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ.



LEMMA VII.

Sit rectangulum ΒΑΓ una cum quadrato ex ΓΔ æquale quadrato ex ΔΑ. dico ΔΓ ipſi ΔΒ æqualem eſſe.

Commune enim auferatur quadratum ex ΓΔ: & rectangulum ΒΑΓ æquale erit exceſſui quadrati ex ΔΑ ſupra quadratum ex ΔΓ, hoc eſt [per 2. 2.] utrique rectangulo ſub ΔΑΓ & ΑΓΔ. at rectangulum ΒΑΓ æquale eſt rectangulis ſub ΔΑΓ & ſub ΒΔ, ΑΓ. commune auferatur ΔΑΓ; erit igitur reliquum, quod continetur ſub ΑΓ, ΔΒ, æquale rectangulo ΑΓΔ: æqualis igitur eſt ΓΔ ipſi ΔΒ.

ΛΗΜΜΑ η.

Ἔστω τὸ ὑπὸ ΑΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΒ τετραγώνῳ. ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ.

Κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΕ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΓΔ, ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΑΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ· ὥστε τὸ ὑπὸ ΓΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΓΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΕΒ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ ἴση ἐστίν· ὅλη ἄρα ἡ ΑΔ ὅλῃ τῇ ΔΒ ἴση.



LEMMA VIII.

Sit rectangulum ΑΓΒ una cum quadrato ex ΓΔ æquale quadrato ex ΔΒ. dico rectam ΑΔ æqualem eſſe ipſi ΔΒ.

Ponatur ipſi ΓΔ æqualis ΔΕ: ergo [per 5. 2.] rectangulum ΓΕΒ una cum quadrato ex ΔΕ, hoc eſt quadrato ex ΓΔ, æquale eſt quadrato ex ΔΒ, hoc eſt [ex hyp.] rectangulo ΑΓΒ una cum quadrato ex ΓΔ: quare rectangulum ΓΕΒ eſt æquale rectangulo ΑΓΒ: eſt igitur [per 1. 6.] linea ΑΓ æqualis ipſi ΕΒ. ſed & ΓΔ æqualis eſt ΔΕ: tota igitur ΑΔ toti ΔΒ eſt æqualis.

ΛΗΜΜΑ θ.

Ἔστω πάλιν τὸ ὑπὸ ΒΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΒ ἴσον τῷ ἀπὸ ΑΔ. ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ.

Κείσθω τῇ ΔΒ ἴση ἡ ΑΕ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΒΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΕΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ ΔΑΓ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔ, ΑΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΕΑΓ, μετὰ τοῦ ἀπὸ ΕΑ, ὅ ἐστι τὸ ὑπὸ ΓΕΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΔΓ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ, τουτέστιν ἡ ΒΔ, τῇ ΔΓ. ὅ. ἔ. δ.



LEMMA IX.

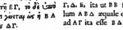
Sit rurſus rectangulum ΒΑΓ una cum quadrato ex ΔΒ æquale quadrato ex ΑΔ. dico lineam ΓΔ æqualem eſſe ipſi ΔΒ.

Ponatur enim ipſi ΔΒ æqualis ΑΕ. & quoniam rectangulum ΒΑΓ una cum quadrato ex ΔΒ, hoc eſt cum quadrato ex ΕΑ, æquale eſt quadrato ex ΑΔ; commune auferatur rectangulum ΔΑΓ: ergo reliquum, quod ſub ΒΔ & ΑΓ continetur, videlicet rectangulum ΕΑΓ, una cum quadrato ex ΕΑ, quod [per 3. 2.] eſt rectangulum ΓΕΑ, æquale erit [per 2. 2.] ipſi ΑΔΓ rectangulo: quare recta ΕΑ, hoc eſt ΒΔ, ipſi ΔΓ æqualis eſt.

ΛΗΜΜΑ ι.

Εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἐφ᾽ ἧς τρία σημεῖα τὰ Γ, Δ, Ε, οὕτως ὥστε ἴσην μὲν εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΕΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΕΔ τῷ ἀπὸ ΕΓ ἴσον. ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΕΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΓ, ἀνάλογον καὶ ἀναστρέψαντι καὶ δὶς τὰ ἡγούμενα, καὶ διελόντι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ.



LEMMA X.

Sit recta linea ΑΒ, in qua ſumantur tria puncta Γ, Δ, Ε, ita ut ΒΕ ſit æqualis ΕΓ, & rectangulum ΑΕΔ æquale quadrato ex ΓΕ. dico ut ΒΑ ad ΑΓ ita eſſe ΒΔ ad ΔΓ.

Quoniam enim rectangulum ΑΕΔ æquale eſt quadrato ex ΕΓ; erit [per 17. 6.] ut ΑΕ ad ΕΓ ita ΓΕ ad ΕΔ: unde per converſionem rationis, antecedentibuſque bis ſumptis, & dividendo proportionales erunt, nempe ΒΑ ad ΑΓ ſicut ΒΔ ad ΔΓ.

LEMMA XI.

Sit rurſus rectangulum Β Γ Δ æquale quadrato ex Γ Ε, & Α Γ ipſi Γ Ε æqualis. dico rectangulum Α Β Ε æquale eſſe rectangulo Γ Β Δ.

QUoniam enim [ex hyp.] rectangulum Β Γ Δ quadrato ex Γ Ε eſt æquale; ut Β Γ ad Γ Ε, hoc eſt [ex hyp.] ad Γ Α, ita erit [per 17.6.] Γ Ε, hoc eſt Γ Α, ad Γ Δ, & * tota ad totam, & per converſionem rationis; & ſpatium ſpatio æquale: ergo rectangulum Α Β Ε æquale eſt Γ Β Δ rectangulo.



Sed illud etiam conſtat, rectangulum nempe Α Δ Β ipſi Β Δ Γ æquale eſſe: nam ſi à quadrato ex Γ Ε & à rectangulo Β Γ Δ æqualibus auferatur commune quadratum ex Γ Δ, quæ relinquentur æqualia erunt.

ΛΕΜΜΑ ια΄.

Ἔστω πάλιν τὸ ὑπὸ Β Γ Δ ἴσον τῷ ἀπὸ Γ Ε, ἴση δὲ ἡ Α Γ τῇ Γ Ε. ὅτι τὸ ὑπὸ Α Β Ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Γ Β Δ.

ΕΠΕΙ γὰρ τὸ ὑπὸ Β Γ Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Γ Ε, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ Β Γ πρὸς Γ Ε, τουτέστι πρὸς τὴν Γ Α, οὕτως ἡ Γ Ε, τουτέστιν ἡ Α Γ, πρὸς τὴν Γ Δ, καὶ ὅλη πρὸς ὅλην, καὶ ἀναστρέψαντι, καὶ χωρίον χωρίῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ Α Β Ε ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Γ Β Δ.

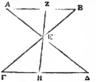
Φανερὸν δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ Α Δ Β ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Β Δ Γ· ἐὰν γὰρ ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ Γ Δ κοινὸν ἀπό τε τοῦ ἀπὸ Γ Ε πρὸς τὸ ὑπὸ Β Γ Δ ἰσότητος, γίνεται τὰ λοιπὰ ἴσα.

LEMMA XII.

In duas æquidiſtantes Α Β, Γ Δ per idem punctum Ε tres lineæ ducantur Α Ε Δ, Β Ε Γ, Ζ Ε Η. dico ut rectangulum Α Ε Β ad rectangulum Α Ζ Β ita eſſe rectangulum Γ Ε Δ ad Γ Η Δ rectangulum.

HOC per compoſitam rationem manifeſtum eſt. ut enim Α Ε ad Ε Δ ita [per 4.6.] eſt Α Ζ ad Η Δ; & ut Β Ε ad Ε Γ ita Ζ Β ad Η Γ; & rationes rectangulorum componuntur ex his rationibus †: proportionalia igitur ſunt.

Sed licet & aliter demonſtrare abſque compoſita ratione hoc pacto. quoniam enim [per 4.6.] ut Α Ε ad Ε Β ita eſt Δ Ε ad Ε Γ; erit [per 1.6.] rectangulum Α Ε Β ad quadratum ex Ε Β ut rectangulum Δ Ε Γ ad quadratum ex Ε Γ. ut autem quadratum Ε Β ad quadratum ex Β Ζ ita [per 1. & 22.6.] quadratum ex Ε Γ ad quadratum ex Γ Η: quare ex æquo [per 22.5.] ut rectangulum Α Ε Β ad quadratum ex Β Ζ ita rectangulum Δ Ε Γ ad quadratum ex Γ Η. ſed ut quadratum ex Β Ζ ad rectangulum Β Ζ Α ita quadratum ex Γ Η ad rectangulum Γ Η Δ: ex æquo igitur, ut rectangulum Α Ε Β ad rectangulum Α Ζ Β ita rectangulum Γ Ε Δ ad rectangulum Γ Η Δ. Q. E. D.



ΛΗΜΜΑ ιβ΄.

Εἰς δύο παραλλήλους τὰς Α Β, Γ Δ, διά τε τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Ε, τρεῖς διήχθωσαν αἱ Α Ε Δ, Β Ε Γ, Ζ Ε Η. ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ Α Ε Β πρὸς τὸ ὑπὸ Α Ζ Β οὕτω τὸ ὑπὸ Γ Ε Δ πρὸς τὸ ὑπὸ Γ Η Δ.

ΔΙΑ τοῦ συνημμένου φανερόν. ὡς μὲν γὰρ ἡ Α Ε πρὸς τὴν Ε Δ οὕτως ἡ Α Ζ πρὸς τὴν Η Δ, ὡς δὲ ἡ Β Ε πρὸς τὴν Ε Γ οὕτως ἡ Ζ Β πρὸς τὴν Η Γ, καὶ σύγκειται ἐκ τούτων τὰ χωρία· ἀνάλογον ἄρα ἐστί.

Ἔστι δὲ καὶ οὕτως ἀποδεῖξαι μὴ προσχρησάμενον τῷ συνημμένῳ. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α Ε πρὸς τὴν Ε Β οὕτως ἡ Δ Ε πρὸς τὴν Ε Γ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Α Ε Β πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Β οὕτως τὸ ὑπὸ Δ Ε Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Ε Γ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ Ε Β πρὸς τὸ ἀπὸ Β Ζ οὕτω τὸ ἀπὸ Ε Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Η· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ Α Ε Β πρὸς τὸ ἀπὸ Β Ζ οὕτω τὸ ὑπὸ Δ Ε Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Η. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ Β Ζ πρὸς τὸ ὑπὸ Β Ζ Α οὕτω τὸ ἀπὸ Γ Η πρὸς τὸ ὑπὸ Γ Η Δ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ Α Ε Β πρὸς τὸ ὑπὸ Α Ζ Β οὕτω τὸ ὑπὸ Γ Ε Δ πρὸς τὸ ὑπὸ Γ Η Δ. ὃ. ἔ. δ.

* Hoc eſt, adhibendo 19am quinti, quæ ſic incipit, & poſtea converſionem rationis, & demum [per 16.6.] æquando rectangulum ſub extremis cum rectangulo ſub mediis. † Nempe ratio rectanguli Α Ε Β ad Γ Ε Δ componitur ex ratione Β Ε ad Ε Δ, & ratione Β Ε ad Ε Γ: & ratio Α Ζ Β ad Γ Η Δ componitur ex ratione Α Ζ ad Η Δ, & ratione Ζ Β ad Η Γ. Cumque componentes rationes æquales ſint, conſtat propoſitum.

ΑΠΟΛ-

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ
ΚΩΝΙΚΩΝ
ΤΟ ΤΡΙΤΟΝ,
ΜΕΤΑ ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑΤΩΝ.

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBER TERTIUS,
CUM COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITÆ.

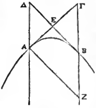
ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν, ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις· ἴσα ἔσται τὰ γινόμενα κατὰ κορυφὴν τρίγωνα.

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ τῆς ΑΒ ἐφαπτέσθωσαν ἥ τε ΑΓ καὶ ἡ ΒΔ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Ε, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Α, Β διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΓΒ, ΔΑ, συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις κατὰ τὰ Γ, Δ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔΕ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΔ ἡ ΑΖ, τεταγμένως ἄρα κατῆκται. Ἔσται δή, ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς, ἴσον τὸ ΑΔΒΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΓΖ τριγώνῳ· καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΑΕΒΖ, λοιπὸν τὸ ΑΔΕ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ.

Ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν, συμπιπτέτωσαν αἱ διάμετροι κατὰ τὸ Η κέντρον. ἐπεὶ οὖν κατῆκται ἡ ΑΖ, καὶ



Prop. I. *Theor.*

Si coni ſectionem vel circuli circumferentiam rectæ lineæ contingentes inter ſe conveniant; per tactus vero ducantur diametri, quæ contingentibus occurrant: triangula ad verticem facta ſibi ipſis æqualia erunt.

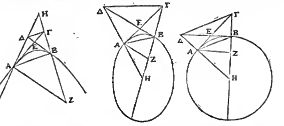
SIT coni ſectio vel circuli circumferentia A B, quam contingant rectæ A Γ, B Δ convenientes in puncto E, & per tactus A, B diametri ſectionis Γ B, Δ A ducantur, quæ contingentibus occurrant in punctis Γ, Δ: dico triangulum A Δ E triangulo E B Γ æquale eſſe.

Ducatur enim à puncto A recta A Z ipſi B Δ parallela, quæ propterea ordinatim applicata erit. Erit igitur, in parabola, parallelogrammum A Δ B Z æquale [per 42.1.huj.] triangulo A Γ Z: quare, ablato communi A E B Z, triangulum A Δ E, quod relinquitur, æquale eſt triangulo Γ B E.

In aliis vero, conveniant diametri in centro H. & quoniam ordinatim applicata eſt A Z, &

ΑΓ ſectionem contingit; rectangulum ΖΗΓ [per 37. 1.huj.] æquale eſt quadrato ex ΒΗ: ut igitur ΖΗ ad ΗΒ ita eſt [per 16. 6.] ΒΗ ad ΗΓ: quare [per 20. 6.] ut ΖΗ ad ΗΓ ita quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΒ. ſed [per 3.lem.huj.] ut quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΗΒ ita triangulum ΑΗΖ ad triangulum ΔΗΒ, & ut ΖΗ ad ΗΓ ita [per 1. 6.] triangulum ΑΗΖ ad triangulum

ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, τὸ ὑπὸ ΖΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΗ πρὸς ΗΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ οὕτως τὸ ΑΗΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΗΒ, ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΓ οὕτως τὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ΑΗΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ΑΗΓ



ΑΗΓ: ergo [per 11. 5.] ut triangulum ΑΗΖ ad triangulum ΑΗΓ ita triangulum ΑΗΖ ad triangulum ΔΗΒ: & propterea [per 9.5.] triangulum ΑΗΓ triangulo ΔΗΒ eſt æquale. commune auferatur ΑΗΒΕ, [in hyperbola ΗΔΕΓ:] reliquum igitur triangulum ΑΕΔ reliquo ΓΕΒ æquale erit.

οὕτως τὸ ΑΗΖ πρὸς τὸ ΔΗΒ· ἴσον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΔΗΒ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΗΒΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΕΔ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΕΒ.

EUTOCIUS.

Tertius conicorum liber, amiciſſime *Anthemi*, dignus ab antiquis exiſtimatus eſt in quem multum ſtudii ac diligentiæ conferretur, quod variæ ipſius editiones oſtendunt. ſed neque epiſtolam præfixam habet quemadmodum alii libri, neque commentarios in ipſum docti alicujus viri ex iis qui ante nos fuerunt, quanquam in eo multa ſint contemplatione digniſſima, ut ipſe *Apollonius* in proœmio totius libri aſſerit. omnia autem à nobis manifeſte explicata ſunt ac demonſtrata ex præcedentibus libris & commentariis in eoſdem.

Invenitur etiam alia demonſtratio, in parabola quidem, hujuſmodi.

Quoniam ΑΓ ſectionem contingit, & ordinatim applicata eſt ΑΖ: erit [per 35. 1.huj.] & ΓΒ æqualis ipſi ΒΖ, & [per 34.1.] ΒΖ ipſi ΑΔ: ergo ΑΔ, ΓΒ inter ſe æquales ſunt. ſed & [per 34. 1.] parallelæ: triangulum igitur ΑΔΕ æquale eſt & ſimile triangulo ΕΒΓ.

In reliquis vero, junctis ΑΒ, ΓΔ, dicendum.

Quoniam [per 37. 1. huj. & 16.6.] ut ΖΗ ad ΗΒ ita eſt ΒΗ ad ΗΓ, ut vero ΖΗ ad ΗΒ ita ΑΗ ad ΗΔ, eſt enim ΑΖ ipſi ΔΒ parallela; ergo [per 11. 5.] ut ΒΗ ad ΗΓ ita ΑΗ ad ΗΔ, & propterea [per 2. 6.] ΑΒ parallela eſt ipſi ΓΔ: triangulum igitur ΑΔΓ æquale eſt [per 37.1.] triangulo ΒΓΔ. & communi ΓΔΕ ablato, relinquitur triangulum ΑΔΕ triangulo ΓΒΕ æquale.

Ad caſus quod attinet, dicendum, in parabola quidem & hyperbola non dari caſus; in ellipſi vero eſſe duos. vel enim contingentes rectæ in punctis tactuum diametris occurrentes productis etiam conveniunt, ſicuti in textûs figura: vel ad alteras partes ad quas eſt Ε, quemadmodum in hyperbola.

*

Τὸ τρίτον τῶν κωνικῶν, ὦ φίλτατέ μοι Ἀνθέμιε, πολλῆς μὲν φροντίδος ὑπὸ τῶν παλαιῶν ἠξίωται, ὡς αἱ πολύτροποι αὐτοῦ ἐκδόσεις δηλοῦσιν. οὔτε δὲ ἐπιστολὴν ἔχει προγεγραμμένην, καθάπερ τὰ ἄλλα, οὔτε σχόλια εἰς αὐτὸ ἀξιόλογα τῶν πρὸ ἡμῶν εὑρίσκεται, καί τοι τῶν ἐν αὐτῷ ἀξίων ὄντων θεωρίας, ὡς καὶ αὐτὸς Ἀπολλώνιος ἐν τῷ προοιμίῳ τοῦ παντὸς βιβλίου φησίν. πάντα δὲ ὑφ' ἡμῶν σαφῶς ἔκκειταί σοι δεικνύμενα ἐκ τῶν προλαβόντων βιβλίων καὶ τῶν εἰς αὐτὰ σχολίων.

Ἔστι δὲ καὶ ἄλλη ἀπόδειξις, ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς.

Ἐπεὶ δὴ ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, καὶ κατῆκται ἡ ΑΖ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΖ. ἀλλὰ ἡ ΒΖ τῇ ΑΔ ἴση· καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΓΒ ἴση. ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ παράλληλος· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ΑΔΕ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ.

Ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν, ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ, λεκτέον.

Ἐπεὶ ἐστιν ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ, ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ, παράλληλος γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΔ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ ΓΔΕ, λοιπὸν τὸ ΑΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΒΕ.

Περὶ δὲ τῶν πτώσεων λεκτέον, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς οὐκ ἔχει, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἔχει δύο. αἱ γὰρ ἐφαπτόμεναι κατὰ τὰς ἁφὰς συμβάλλουσαι ταῖς διαμέτροις καὶ ἐκβαλλόμεναι αὐταῖς συμπίπτουσιν, ὡς ἐν τῷ ῥητῷ κεῖται· ἢ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη καθ' ἅ ἐστι τὸ Ε, ὥσπερ ἔχει καὶ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς ἢ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων· τὸ γινόμενον τετράπλευρον πρὸς τῇ μιᾷ τῶν ἐφαπτομένων καὶ μιᾷ τῶν διαμέτρων ἴσον ἔσται τῷ γινομένῳ τριγώνῳ πρὸς τῇ αὐτῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ ἑτέρᾳ τῶν διαμέτρων.

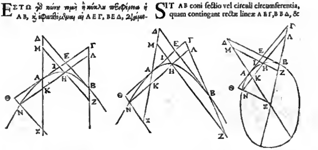
Prop. II. *Theor.*

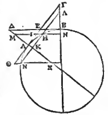
Iiſdem poſitis, ſi in coni ſectione vel circuli circumferentia ſumatur aliquod punctum, & per ipſum parallelæ contingentibus uſque ad diametros ducantur: quadrilaterum, factum ad unam contingentium & ad unam diametrorum, æquale erit triangulo ad eandem contingentem & alteram diametrum conſtituto.

Ἔστω γὰρ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΕΓ, ΒΕΔ, διάμετροι δὲ αἱ ΑΔ, ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ ἤχθωσαν παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΗΚΛ, ΗΜΖ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΙΜ τρίγωνον τῷ ΓΛΗΙ τετραπλεύρῳ.

Ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἴσον τὸ ΗΚΜ τρίγωνον τῷ ΑΛ τετραπλεύρῳ, κοινὸν προσκείσθω ἢ ἀφῃρήσθω τὸ ΙΚ τετράπλευρον, καὶ γίνεται τὸ ΑΙΜ τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΗ τετραπλεύρῳ.

SIT AB coni ſectio vel circuli circumferentia, quam contingant rectæ lineæ AEΓ, BEΔ, & diametri ſint AΔ, BΓ; ſumpto autem in ſectione puncto H, ducantur HKΛ, HMZ contingentibus parallelæ: dico triangulum AIM æquale eſſe quadrilatero ΓΛHI.





Quoniam enim oſtenſum eſt [ad 42. & 43. 1. huj.] HKM triangulum æquale quadrilatero AΛ; commune apponatur vel auferatur quadrilaterum IK, & fiet triangulum AIM quadrilatero ΓH æquale.

EUTOCIUS.

Τὰς πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος εὑρήσεις διὰ τοῦ μβ'. καὶ μγ'. θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου, καὶ τῶν εἰς αὐτὰ γεγραμμένων σχολίων. δεῖ μέντοι εἰδέναι, ὅτι ἐὰν τὸ Η σημεῖον μεταξὺ τῶν Α, Β ληφθῇ, ὥστε παραλλήλους εἶναι τὰς ΔΕΒ, ΜΗΖ· ΑΕΓ, ΑΗΚ, ἐκβληθῇ δὲ ἡ ΛΚ μέχρι τῆς τομῆς κατὰ τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΒΔ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΝΞ· ἔσται διὰ τὰ εἰρημένα ἐν τῷ πρώτῳ βιβλίῳ κατὰ τὸ μθ'. καὶ ν'. θεώρημα καὶ τὸ τούτων σχόλιον, τὸ ΚΝΞ τρίγωνον τῷ ΚΓ τετραπλεύρῳ ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΚΝΞ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΚΜΗ, διὰ τὸ παράλληλον εἶναι ἡ ΜΗ τῇ ΝΞ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἴσον, ἐπεὶ ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ ΑΓ, παράλληλος δὲ αὐτῇ ἡ ΗΝ, καὶ διάμετρος ἡ ΜΞ, καὶ ἴση ἄρα ἡ ΝΚ τῇ ΚΗ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΝΞ τρίγωνον τῷ ΚΓ τετραπλεύρῳ, κοινοῦ προστεθέντος τοῦ ΑΝ, γίνεται τὸ ΑΘΞ τρίγωνον τῷ ΝΓ τετραπλεύρῳ ἴσον.

Caſus hujus theorematis invenientur per quadrageſimum ſecundum & quadrageſimum tertium theorema primi libri, & commentarios in ea conſcriptos. oportet autem ſcire, ſi punctum H inter A, B ſumatur, ita ut æquidiſtantes ſint ΔEB, MHZ, itemque AEΓ, AHK, & producatur ΛK uſque ad ſectionem in N, & per N ducatur NΞ ipſi BΔ æquidiſtans: ex iis quæ tradita ſunt in theoremate quadrageſimo nono & quinquageſimo primi libri, & in ipſa commentariis, erit triangulum KNΞ æquale quadrilatero KΓ. ſed triangulum KNΞ ſimile eſt triangulo KMH, cum MH æquidiſtans ſit NΞ. eſt autem & eidem æquale, quoniam AΓ eſt recta contingens, cui æquidiſtat HN, & MΞ eſt diameter, & NK æqualis KH. quoniam igitur triangulum KNΞ æquale eſt quadrilatero KΓ; adjiciatur commune quadrilaterum AN, ac fiet triangulum AΘΞ æquale quadrilatero NΓ.

Prop.

Prop. III. *Theor.*

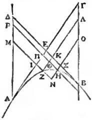
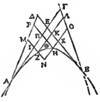
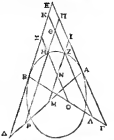
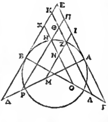
Iiſdem poſitis, ſi in coni ſectione vel circuli circumferentia duo puncta ſumantur; & per ipſa ducantur parallelæ contingentibus uſque ad diametros: quadrilatera, quæ ab ipſis fiunt, diametriſque inſiſtunt, inter ſe æqualia erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς ἢ τῆς περιφερείας δύο σημεῖα ληφθῇ, καὶ δι' αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσιν ἕως τῶν διαμέτρων ταῖς ἐφαπτομέναις· τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν τετράπλευρα, βεβηκότα δὲ ἐπὶ τῶν διαμέτρων, ἴσα ἔσται ἀλλήλοις.

SIT enim coni ſectio, vel circuli circumferentia, lineæque contingentes & diametri, ſicuti jam dictum eſt; &, ſumptis in ſectione duobus punctis Z, H, ducantur per Z quidem lineæ contingentibus parallelæ Z Θ K Λ, N Z I M, per H vero ducantur N H Ξ O, H Θ Π P: dico quadrilaterum A H quadrilatero M Θ, & quadrilaterum Λ N ipſi P N æquale eſſe.

ΕΣΤΩ γὰρ ἡ τομή, ἢ κύκλου περιφέρεια, καὶ ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ διάμετροι, ὡς προείρηται, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ζ ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι ἤχθωσαν ἥ τε ΖΘΚΛ καὶ ἡ ΝΖΙΜ, διὰ δὲ τοῦ Η ἥ τε ΝΗΞΟ καὶ ΗΘΠΡ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τετράπλευρον τῷ ΜΘ, τὸ δὲ ΛΝ τῷ ΡΝ.

Quoniam enim antea [ad 2. 3. huj.] demonſtratum eſt triangulum P Π A æquale quadrilatero Γ H, & triangulum A M I quadrilatero Γ Z; eſt autem A P Π triangulum majus quam triangulum A M I quadrilatero Π M: erit & quadrilaterum Γ H majus quam Γ Z eodem M Π quadrilatero: & propterea quadrilaterum Γ H æquale eſt quadrilateris Γ Z, M Π, hoc eſt ipſis Γ Θ, P Z. commune auferatur Γ Θ: reliquum igitur quadrilaterum A H æquale eſt reliquo Θ M: quare & totum Λ N toti P N æquale erit.

Ἐπεὶ γὰρ προδέδεικται ἴσον τὸ ΡΠΑ τρίγωνον τῷ ΓΗ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΑΜΙ τῷ ΓΖ, τὸ δὲ ΛΡΠ τοῦ ΑΜΙ μεῖζόν ἐστι τῷ ΠΜ τετραπλεύρῳ· καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τοῦ ΓΖ μεῖζόν ἐστι τῷ ΜΠ τετραπλεύρῳ· ὥστε τὸ ΓΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΖ καὶ τῷ ΜΠ, τουτέστι τῷ ΓΘ καὶ τῷ ΡΖ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΜ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΛΝ τῷ ΡΝ ἴσον ἐστίν.

EUTOCIUS.

Hoc theorema plures caſus habet, quos ut in antecedente inveniemus. ſed animadvertendum eſt duo puncta quæ ſumuntur, vel eſſe inter duas diametros, vel extra & ad eaſdem partes. nam ſi alterum quidem extra ſumatur, alterum vero inter diametros, non conſtituentur quadrilatera de quibus in propoſitione dictum eſt. ſed neque ad utraſque diametrorum partes conſtituentur.

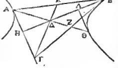
Τὸ θεώρημα τοῦτο πλείους ἔχει πτώσεις, ἃς εὑρήσομεν ὁμοίως τῷ πρὸ αὐτοῦ. δεῖ μέντοι ἐπιστῆσαι ὅτι τὰ λαμβανόμενα δύο σημεῖα ἢ μεταξύ ἐστι τῶν δύο διαμέτρων, ἢ τὰ δύο ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. εἰ γὰρ τὸ μὲν ἕτερον ἐκτὸς λάβοιμεν, τὸ δὲ ἕτερον μεταξὺ τῶν διαμέτρων, οὐ συνίσταται τὰ ἐν τῇ προτάσει λεγόμενα τετράπλευρα. ἀλλ' οὐδὲ ἐφ' ἑκάτερα τῶν διαμέτρων.

Digitized by Google

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δʹ.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν ἀλλήλαις, ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις· ἔσται ἴσα τὰ πρὸς ταῖς ἐφαπτομέναις τρίγωνα.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΓ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, κέντρον δὲ ἔστω τῶν τομῶν τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ ἡ ΓΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΔ ἐπὶ τὸ Ε, ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΔΑ, ΒΔ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ζ, Η· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔΗ τρίγωνον τῷ ΒΔΖ, τὸ δὲ ΑΓΖ τῷ ΒΓΗ.



Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Θ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΘΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΑΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΘ, ἴσον ἂν εἴη τὸ ΑΗΔ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ. ἀλλὰ τὸ ΔΘΛ τῷ ΒΔΖ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΑΗΔ ἄρα τῷ ΒΔΖ ἐστὶν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΓΖ τῷ ΒΓΗ ἴσον.

Prop. IV. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppoſitas ſectiones contingentes inter ſe conveniant, & per tactus ducantur diametri contingentibus occurrentes: triangula, quæ ad contingentes conſtituuntur, æqualia erunt.

Sint oppoſitæ ſectiones A, B, quas contingant rectæ lineæ AΓ, BΓ in puncto Γ convenientes; ſitque ſectionum centrum Δ; & junctis AB, ΓΔ, producatur ΓΔ uſque ad E; jungantur etiam ΔA, BΔ, & ad Z, H producantur: dico triangulum AΔH æquale eſſe triangulo BΔZ; & AΓZ triangulum triangulo BΓH.

Ducatur enim per Θ contingens ſectionem ΘΛ, quæ [per demonſtrata ab *Eutocio* ad 44. 1. huj.] ipſi AH parallela erit. & quoniam [per 30. 1. huj.] AΔ æqualis eſt ΔΘ; erit [per 26. 1.] AHΔ triangulum æquale triangulo ΘΛΔ. ſed [per 1. 3. huj.] & triangulum ΔΘΛ æquale eſt triangulo BΔZ: igitur triangulum AHΔ triangulo BΔZ æquale: unde triangulum AΓZ ipſi BΓH eſt æquale.

EUTOCIUS.

Ἐν τῇ προτάσει τούτου τοῦ θεωρήματος καὶ τῶν ἑξῆς δεῖ ἐπιστῆσαι, ὅτι τὰς ἀντικειμένας λέγει ἀδιορίστως· καὶ τινὰ μὲν τῶν ἀντιγράφων τὰς δύο ἐφαπτομένας ἐπὶ τῆς μιᾶς τομῆς ἔχει, τινὰ δὲ οὐκέτι τὰς δύο ἐφαπτομένας ἐπὶ τῆς μιᾶς, ἀλλ' ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν μίας συμπιπτούσας ἀλλήλαις (ὡς εἴρηται ἐν τῷ δευτέρῳ βιβλίῳ) ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῶν ἀσυμπτώτων. καὶ οὕτως δὲ ἁρμόζειν συμβαίνει τὰ τῆς προτάσεως. ἔξεστι δὲ τοῖς βουλομένοις καταγράφουσιν ἐπισκέπτεσθαι. καὶ δῆλον ἔτι, εἰ μὲν τῆς μιᾶς τῶν τομῶν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτονται, ἡ διὰ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν καὶ τοῦ κέντρου ἡ πλαγία διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων· εἰ δὲ ἑκατέρας μία ἐστὶν ἐφαπτομένη, ἡ διὰ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν καὶ τοῦ κέντρου ἡ ὀρθία διάμετρός ἐστιν.

In propoſitione hujus theorematis & eorum quæ ſequuntur, ſcire oportet *Apollonium* indeterminate dicere *oppoſitas ſectiones*: & nonnulli quidem codices habent duas contingentes in una ſectione: nonnulli vero non duas contingentes in una, ſed ſingulas in utraque ſectione contingentes, quæ inter ſe conveniunt (uti dictum eſt in ſecundo libro) in angulo qui deinceps eſt angulo aſymptotôn; & ita eveniunt ea quæ in propoſitione dicuntur. licet autem iis, qui volunt, hoc deſcriptis figuris conſiderare. ac manifeſtum eſt, ſi unam ſectionum duæ rectæ lineæ contingant; quæ per punctum concurſûs earum & centrum ducitur recta, oppoſitarum ſectionum tranſverſa diameter eſt: ſi vero utramque ſectionem ſingulæ lineæ contingant; quæ per dictum punctum & centrum ducitur, eſt recta diameter ſectionum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ εʹ.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ ληφθῇ ἐφ' ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον, πρὸς τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως ἠγμένῃ διαμέτρῳ, τοῦ ἀπολαμβανομένου τριγώνου πρὸς τῇ συμπτώσει τῶν ἐφαπτομένων διαφέρει, τῷ ἀπολαμβανομένῳ τριγώνῳ πρός τε τῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ.

Prop. V. *Theor.*

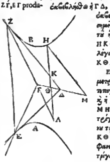
Si duæ rectæ lineæ oppoſitas ſectiones contingentes ſibi ipſis occurrant; & in quavis ſectionum aliquod punctum ſumatur, à quo ducantur duæ lineæ, una quidem contingenti æquidiſtans, altera vero parallela ei quæ tactus conjungit: triangulum, quod ab ipſis conſtituitur ad diametrum per occurſum ductam, à triangulo quod eſt ad occurſum contingentium differt, triangulo facto ad contingentem & ad diametrum illam quæ per tactum ducitur.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΕΔ, ΔΖ συμπιπτέ-

Sint oppoſitæ ſectiones A, B, quarum centrum Γ; & lineæ contingentes ſint EΔ, ΔZ,

quæ ſibi ipſis occurrant in Δ; & junctis EZ, ΓΔ producatur ΓΔ, junctæque etiam ZΓ, EΓ producantur; in ſectione autem ſumatur aliquod punctum H, per quod ducatur HKΘΛ æquidiſtans EZ, & HM parallela ipſi ΔZ: dico triangulum HΘM à triangulo KΘΔ differre triangulo KΛZ.

Quoniam enim [per 38. 2. huj.] oſtenſa eſt ΓΔ diameter oppoſitarum ſectionum, & EZ ad ipſam ordinatim applicatur; & HKΘΛ quidem ducitur parallela EZ, MH vero parallela ΔZ: triangulum MHΘ à triangulo ΓΛΘ differt [per 45. 1. huj.] triangulo ΓΔZ: quare MHΘ triangulum à triangulo KΘΔ differt triangulo KZΛ. conſtat igitur triangulum KZΛ quadrilatero MHKΔ æquale eſſe.



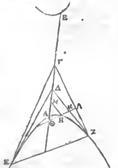
τέμνουσι κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EZ καὶ ἡ ΓΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΓΔ, καὶ αἱ ZΓ, EΓ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ H, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ μὲν τὴν EZ ἡ HKΘΛ, παρὰ δὲ τὴν ΔZ ἡ HM· λέγω ὅτι τὸ HΘM τρίγωνον τοῦ KΘΔ διαφέρει τῷ KΛZ.

Ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ ΓΔ διάμετρος τῶν ἀντικειμένων, ἡ δὲ EZ τεταγμένως ἐπ' αὐτὴν κατηγμένη, καὶ ἡ μὲν HΘ παρὰ τὴν EZ, ἡ δὲ MH παρὰ τὴν ΔZ· τὸ ἄρα MHΘ τρίγωνον διαφέρει τοῦ ΓΛΘ τριγώνου τῷ ΓΔZ· ὥστε τὸ MHΘ τοῦ KΘΔ τριγώνου διαφέρει τῷ KZΛ. φανερὸν δὴ ὅτι ἴσον γίνεται τὸ KZΛ τρίγωνον τῷ MHKΔ τετραπλεύρῳ.

EUTOCIUS.

Quintum quidem theorema ſatis conſtat: verumtamen in figura quæ diametrum habet rectam, ita dicemus. quoniam oſtenſum eſt [ad 45. 1. huj] triangulum HΘM majus eſſe quam triangulum ΓΛΘ triangulo ΓΔZ; erit triangulum HΘM æquale triangulo ΓΘΛ una cum triangulo ΓΔZ: ergo & æquale triangulo KΔΘ una cum triangulo KΛZ: triangulum igitur HMΘ à triangulo KΔΘ differt triangulo KΛZ. communi ablato triangulo ΘΔK; reliquum KΛZ triangulum æquale eſt quadrilatero KΔMH.

In figura vero quæ tranſverſam diametrum habet, hoc modo. quoniam prius demonſtratum eſt [ad 44. 1.] ΓΛΘ triangulum majus eſſe quam triangulum MΘH triangulo ΓΔZ; erit ΓΘΛ triangulum æquale triangulo ΘHM una cum triangulo ΓΔZ. commune auferatur quadrilaterum ΓΔKΛ: reliquum igitur KΘΔ triangulum æquale eſt triangulo ΘHM una cum triangulo ΛZK. rurſus commune auferatur MΘH: ergo triangulum ZKΛ quadrilatero ΔMHK æquale erit. Caſus habet plures quos ex demonſtratis in quadrageſimo quarto & quadrageſimo quinto theoremate primi libri addiſcere oportet. Cum autem dicitur, *auferatur vel apponatur quadrilaterum vel triangulum*, ablationes & appoſitiones juxta proprietatem caſuum fieri debent. quoniam vero ſequentia plures caſus continent, ob punctorum ſumptiones & parallelas lineas; ne confuſionem commentariis afferamus multas figuras deſcribentes, unam in ſingulis theorematibus faciemus, quæ oppoſitas ſectiones & diametros & lineas contingentes habeat; ut ſervetur illud quod in propoſitione dictum eſt. *Iiſdem poſitis*, & parallelas quouſque occurrant producemus, in unoquoque occurſu literas ponentes, ita ut quilibet, obſervatis conſequentiis, facile poſſit caſus omnes demonſtrare.



Ἔστι δὲ σαφὲς τὸ πέμπτον θεώρημα· λεκτέον δὲ ἐπὶ μὲν τῆς καταγραφῆς τῆς ἐχούσης τὴν ὀρθίαν διάμετρον· ἐπεὶ δέδεικται τὸ HΘM τοῦ ΓΛΘ μεῖζον τῷ ΓΔZ, ἴσον ἔσται τὸ HΘM τῷ ΓΘΛ καὶ τῷ ΓΔZ· ὥστε καὶ τῷ KΔΘ μετὰ τοῦ KΛZ· τὸ ἄρα HMΘ τοῦ KΔΘ διαφέρει τῷ KΛZ. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘΔK, λοιπὸν τὸ KΛZ ἴσον τῷ KΔMH.

Ἐπὶ δὲ τῆς ἐχούσης τὴν πλαγίαν διάμετρον· ἐπειδὴ προδέδεικται τὸ ΓΛΘ τοῦ MΘH μεῖζον τῷ ΓΔZ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘΛ τῷ ΘHM μετὰ τοῦ ΓΔZ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΔKΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ KΘΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘHM μετὰ τοῦ ΛKZ. ἔτι κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ MΘH· λοιπὸν ἄρα τὸ ZKΛ τῷ ΔMHK ἴσον. Πτώσεις δὲ ἔχει πολλάς, ἃς δεῖ ἐφοδεύειν ἀπὸ τῶν δεδειγμένων ἐν τῷ μδ'. καὶ με'. θεωρήματι τοῦ πρώτου βιβλίου. Ἐν δὲ τῷ λέγειν « ἀφῃρήσθω ἢ προσκείσθω τετράπλευρον ἢ τρίγωνον », τὰς ἀφαιρέσεις ἢ προσθέσεις κατὰ τὴν οἰκειότητα τῶν πτώσεων χρὴ ποιεῖσθαι. ἐπειδὴ δὲ τὰ ἑξῆς πολύπτωτά ἐστι διὰ τὰ λαμβανόμενα σημεῖα καὶ τὰς παραλλήλους, ἵνα μὴ ὄχλον παρέχωμεν τοῖς ἐντυγχάνουσι, πολλὰς ποιοῦντες καταγραφὰς καθ' ἕκαστον τῶν θεωρημάτων, μίαν ποιοῦμεν ἔχουσαν τὰς ἀντικειμένας καὶ τὰς διαμέτρους καὶ τὰς ἐφαπτομένας, ἵνα σώζηται τὸ ἐν τῇ προτάσει λεγόμενον « τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων » καὶ τὰς παραλλήλους ὅπου ποτὲ συμπίπτουσι, στοιχεῖα καθ' ἑκάστην σύμπτωσιν θέντες, ἵνα φυλάττων τις τὰ ἀκόλουθα δύνηται πάσας τὰς πτώσεις ἀποδεικνύειν.

ΠΡΟ-

Digitized by Google

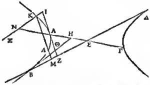
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ΄.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, συμπίπτουσαι ταῖς τε ἐφαπτομέναις καὶ ταῖς διαμέτροις· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τετράπλευρον, πρὸς τῇ μιᾷ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῇ μιᾷ τῶν διαμέτρων, ἴσον ἔσται τῷ γινομένῳ τριγώνῳ, πρός τε τῇ αὐτῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ ἑτέρᾳ τῶν διαμέτρων.

Prop. VI. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſi in una oppoſitarum ſectionum aliquod punctum ſumatur, & ab eo ducantur rectæ lineæ contingentibus parallelæ, quæ & contingentibus & diametris occurrant: quadrilaterum ab ipſis factum, ad unam contingentium & ad unam diametrorum, æquale erit triangulo, quod ad eandem contingentem & ad alteram diametrum conſtituitur.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι αἱ ΑΕΓ, ΒΕΔ, καὶ τῆς ΑΒ τομῆς ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΖ, ΒΗ, συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Θ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Κ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΚΛΜ, ΚΝΞ· λέγω ὅτι τὸ ΚΖ τετράπλευρον τῷ ΑΙΝ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον.



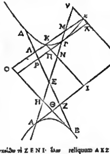
Ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ τῆς ΑΒ ἐφάπτεται ἡ ΑΖ συμπίπτουσα τῇ ΒΔ, καὶ παρὰ τὴν ΑΖ ἦκται ἡ ΚΛ· ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΙΝ τρίγωνον τῷ ΚΖ τετραπλεύρῳ.

Sint oppoſitæ ſectiones, quarum diametri ΑΕΓ, ΒΕΔ, & ſectionem ΑΒ contingant rectæ lineæ ΑΖ, ΒΗ convenientes inter ſe in puncto Θ; ſumatur autem aliquod punctum Κ in ſectione, à quo parallelæ contingentibus ducantur ΚΛΜ, ΚΝΞ: dico quadrilaterum ΚΖ æquale eſſe triangulo ΑΙΝ.

Quoniam enim oppoſitæ ſectiones ſunt ΑΒ, ΓΔ, & ſectionem ΑΒ contingit recta linea ΑΖ ipſi ΒΔ occurrens, & ducta eſt ΚΛ parallela ipſi ΑΖ: triangulum ΑΙΝ [per 2. 3. huj.] quadrilatero ΚΖ æquale erit.

EUTOCIUS.

Αἱ πτώσεις τούτου τοῦ θεωρήματος καὶ τῶν ἑξῆς πάντων, ὡς εἴρηται ἐν τοῖς τοῦ πέμπτου θεωρήματος σχολίοις, πολλαί εἰσιν· ἐπὶ πασῶν μέντοι τὰ αὐτὰ συμβαίνει. ὑπὲρ δὲ πλείονος σαφηνείας, καταγεγράφθω μία ἐξ αὐτῶν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΠΡ· φανερὸν δὴ ὅτι παράλληλός ἐστι τῇ ΑΖ καὶ τῇ ΜΛ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἐν τῷ δευτέρῳ θεωρήματι, κατὰ τὴν τῆς ὑπερβολῆς καταγραφήν, τὸ ΓΠΝ τῷ ΛΚΠΡ τετραπλεύρῳ ἴσον, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΜΠ· τὸ ἄρα ΜΚΝ τρίγωνον τῷ ΜΛΡΓ ἴσον ἐστί. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΡΕ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ΑΒΖ, διὰ τὰ ἐν τῷ μα΄. τοῦ πρώτου βιβλίου· ὅλον ἄρα τὸ ΜΒΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΚΝ καὶ τῷ ΛΕΖ. κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΚΜΝ, λοιπὸν τὸ ΛΕΖ τῷ ΚΛΕΝ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΖΕΝΙ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΙΝ τρίγωνον τῷ ΚΛΖΙ ἴσον ἐστίν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΒΟΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΝΗΟ.



Caſus hujus theorematis, & quidem omnium ſequentium, multi ſunt; ut dictum eſt in ſcholiis ad quintam propoſitionem: eadem tamen eveniunt in ſingulis. Verum, majoris evidentiæ gratiâ, deſcribatur eorum unus, & ducatur recta ΓΠΡ ſectionem contingens in Γ: patet igitur eam ipſis ΑΚ, ΜΛ parallelam eſſe. Quoniam autem, per ſecundum theorema hujus, in figura hyperbolæ, demonſtratum eſt triangulum ΓΠΝ quadrilatero ΛΚΠΡ æquale, commune addatur quadrilaterum ΜΠ; ac triangulum ΜΚΝ quadrilatero ΜΛΡΓ æquale erit. commune adjiciatur triangulum ΓΡΕ, ipſi ΑΞΖ [per 41. primi huj.] æquale: erit igitur totum triangulum ΜΞΛ triangulis ΜΚΝ, ΛΞΚ ſimul æquale. utrinque auferatur commune triangulum ΚΜΝ; ac reliquum ΛΞΖ quadrilatero ΚΛΞΝ æquabitur. dein addatur commune quadrilaterum ΖΞΝΙ; totum igitur triangulum ΑΙΝ quadrilatero ΚΛΖΙ æquale eſt †. Pariter triangulum ΒΟΛ æquale erit quadrilatero ΚΝΗΟ.

† Ac ſi producatur ΛΜ ad κ, ac ducatur νκα ipſi ΒΗ parallela: erunt, ob ΚΜ ipſi Μκ æqualem, triangula ΚΜΝ, κΜν æqualia; ac proinde quadrilaterum ΙΝνα parallelogrammo Κα æquale. adjiciantur æqualia ΑΙΝ & ΚΛΚΙ, ac fiet triangulum Ανα quadrilatero κΛΚα æquale.

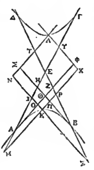
Prop.

Prop. VII. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſi in utraque ſectione aliqua puncta ſumantur; & ab ipſis ducantur lineæ contingentibus parallelæ, quæ & contingentibus & diametris occurrant: quadrilatera à lineis ductis conſtituta & diametris inſiſtentia inter ſe æqualia erunt.

PONANTUR enim eadem quæ ſupra; & in utraque ſectione puncta K, Λ ſumantur, per quæ ducantur ΜΚΠΡΧ, ΝΣΤΛ ipſi ΑΖ parallelæ; & ΝΙΟΚΞ, ΧΦΥΛ parallelæ ipſi ΒΗ: dico eadem evenire quæ in propoſitione dicta ſunt.

Nam cum triangulum ΑΟΙ [per 2. 3. huj.] quadrilatero ΡΟ æquale ſit, commune apponatur ΕΟ; & erit totum triangulum ΑΒΖ æquale quadrilatero ΚΕ. eſt autem [per *Eutoc.* 6. 3. huj.] & ΒΕΗ triangulum quadrilatero ΑΒ æquale: & [per 1. 3. huj.] triangulum ΑΕΖ triangulo ΒΗΕ: ergo & quadrilaterum ΑΕ æquale eſt quadrilatero ΙΚΡΕ. commune apponatur ΝΕ: totum igitur ΤΚ toti ΙΛ; & ΚΤ ipſi ΡΛ æquale erit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἐφ' ἑκατέρας τῆς τομῆς σημεῖά τινα ληφθῇ, καὶ ἀπ' αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, συμπίπτουσαι ταῖς τε ἐφαπτομέναις καὶ ταῖς διαμέτροις· τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν τετράπλευρα, βεβηκότα δὲ ἐπὶ τῶν διαμέτρων, ἴσα ἔσται ἀλλήλοις.

ΥΠΟΚΕΙΣΘΩ γὰρ τὰ προειρημένα, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν τομῶν σημεῖα τὰ Κ, Λ, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ μὲν τὴν ΑΖ ἤχθωσαν ἡ ΜΚΠΡΧ καὶ ἡ ΝΣΤΛ, παρὰ δὲ τὴν ΒΗ ἡ ΝΙΟΚΞ καὶ ἡ ΧΦΥΛ· λέγω ὅτι ἔσται τὰ τῆς προτάσεως.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΟΙ τρίγωνον τῷ ΡΟ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΕΟ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΕ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΒΕΗ τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΕ τετραπλεύρῳ, καὶ ἔστι τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἴσον τῷ ΒΗΕ· καὶ τὸ ΑΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΙΚΡΕ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΝΕ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΙΛ, καὶ τὸ ΚΤ τῷ ΡΛ.

Prop. VIII. *Theor.*

Iiſdem poſitis, pro punctis Κ, Λ ſumantur Γ, Δ, in quibus diametri cum ſectionibus conveniunt; & per ipſa contingentibus parallelæ ducantur: dico ΞΕ quadrilaterum quadrilatero ΕΤ; & quadrilaterum ΞΙ quadrilatero ΤΟ æquale eſſe.

QUONIAM enim triangulum ΑΗΘ oſtenſum eſt [per 1. 3. huj.] æquale triangulo ΘΒΖ: & [per 1. lem.] linea quæ à puncto Α ducitur ad Β æquidiſtat lineæ à puncto Η ad Ζ ductæ: erit [per 2. 6.] ut ΑΕ ad ΕΗ ita ΒΕ ad ΕΖ; & per converſionem rationis ut ΕΑ ad ΑΗ ita ΕΒ ad ΒΖ. eſt autem ut ΓΑ ad ΑΕ ita ΔΒ ad ΒΕ; utraque enim [per 30. 1. huj.] utriuſque eſt dupla: ergo ex æquali [per 22. 5.] ut ΓΑ ad ΑΗ ita ΔΒ ad ΒΖ. & ſunt triangula ſimilia, propter lineas [ex hyp.] parallelas: ut igitur ΓΤΑ trian-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ η.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, εἰλήφθω ἀντὶ τῶν Κ, Λ τὰ Γ, Δ, καθ' ἃ συμβάλλουσιν αἱ διάμετροι ταῖς τομαῖς, καὶ δι' αὐτῶν ἤχθωσαν αἱ παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΞΕ τετράπλευρον τῷ ΕΤ, καὶ τὸ ΞΙ τῷ ΟΤ.

ΕΠΕΙ γὰρ ἴσον ἐδείχθη τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΘΒΖ, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β παράλληλος τῇ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΗ οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς ΕΖ, καὶ ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς ΒΖ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας διπλῆ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΖ. καὶ ἔστιν ὅμοια τὰ τρίγωνα, διὰ τὰς παραλλήλους· ὡς ἄρα τὸ ΓΤΑ τρίγωνον πρὸς τὸ

ΑΘΗ

ΑΘΗ οὕτως τὸ ΞΒΔ πρὸς τὸ ΘΒΖ, καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δὲ τὸ ΑΗΘ τῷ ΘΖΒ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΥΑΓ τῷ ΔΒΞ, ὧν τὸ ΑΗΘ ἴσον ἐδείχθη τῷ ΒΘΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΘ τετράπλευρον ἴσον τῷ ΓΘ· ὥστε καὶ τὸ ΞΕ τῷ ΕΤ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΟ τῇ ΑΖ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΟΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΖ· ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΔΕΙ τῷ ΒΕΗ. ἀλλὰ τῷ ΒΕΗ τὸ ΑΕΖ ἴσον· καὶ τὸ ΓΟΕ ἴσον τῷ ΔΕΙ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΞΕ τετράπλευρον ἴσον τῷ ΕΤ· ὅλον ἄρα τὸ ΞΙ ἴσον ἐστὶ τῷ ΟΤ.

gulum ad triangulum ΑΘΗ ita triangulum ΞΒΔ ad triangulum ΘΒΖ; & permutando. triangulum autem ΑΗΘ æquale eſt [per 1. 3. huj.] triangulo ΘΖΒ: ergo & ΥΑΓ triangulum triangulo ΔΒΞ eſt æquale; quorum triangulum ΑΗΘ æquale eſt triangulo ΒΘΖ, ut oſtenſum eſt: reliquum igitur quadrilaterum ΔΘ eſt æquale quadrilatero ΓΘ: & propterea quadrilaterum ΞΒ quadrilatero ΒΤ. itaque quoniam [per dem. ab *Eut.* ad 44. 1. huj.] ΓΟ æquidiſtat ΑΖ, triangulum ΓΟΒ æquale eſt triangulo ΑΕΖ: ſimiliter autem & triangulum ΔΒΙ triangulo ΒΕΗ. ſed [per 1. 3. huj.] ΒΕΗ triangulum triangulo ΑΕΖ eſt æquale: ergo & triangulum ΓΟΒ triangulo ΔΕΙ. eſtque ΞΕ quadrilaterum æquale quadrilatero ΕΤ: totum igitur ΞΙ toti ΟΤ æquale erit.

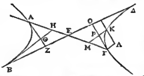
ΠΡΟΤΑΣΙΣ θʹ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν τὸ μὲν ἕτερον τῶν σημείων μεταξὺ ᾖ τῶν διαμέτρων, οἷον τὸ Κ, τὸ δὲ ἕτερον ἐπὶ τῶν Γ, Δ ταὐτόν, οἷον τὸ Γ, καὶ ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΕΟ τρίγωνον τῷ ΚΕ τετραπλεύρῳ, καὶ τὸ ΛΟ τῷ ΛΜ.

Prop. IX. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſi alterum quidem punctum ſit inter diametros, ut Κ; alterum vero ſit idem quod unum punctorum Γ, Δ, ut Γ; & parallelæ ducantur: dico triangulum ΓΕΟ æquale eſſe quadrilatero ΚΕ; & quadrilaterum ΛΟ æquale ipſi ΛΜ.

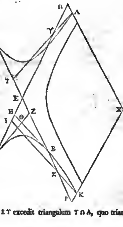
Τοῦτο δὲ φανερόν. ἐπεὶ ἴσον ἐδείχθη τὸ ΓΕΟ τρίγωνον τῷ ΑΕΖ, τὸ δὲ ΑΕΖ ἴσον τῷ ΚΕ τετραπλεύρῳ· ὥστε καὶ τὸ ΓΡΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΟ, καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΛΟ.



Illud vero perſpicue apparet. nam demonſtratum eſt [per 4. 3. huj.] ΓΕΟ triangulum æquale triangulo ΑΕΖ; triangulumque ΑΕΖ [per corol. 2. 3. huj.] æquale eſt quadrilatero ΕΒ; ergo & triangulum ΓΡΜ quadrilatero ΚΟ; & quadrilaterum ΛΜ quadrilatero ΛΟ eſt æquale.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιʹ.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων εἰλήφθω τὰ Κ, Λ σημεῖα, μὴ καθ' ὃ συμβάλλουσι διάμετροι ταῖς τομαῖς· δεικτέον δὴ ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΤΡΧ τετράπλευρον τῷ ΩΧΚΙ τετραπλεύρῳ.



Ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτονται αἱ ΑΖ, ΒΗ, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροί εἰσιν αἱ ΑΕ, ΒΕ, καὶ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας εἰσὶν αἱ ΑΥ, ΚΙ· μεῖζόν ἐστι τὸ ΤΤΕ τοῦ ΤΩΑ τῷ ΕΖΑ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΞΕΙ τοῦ ΞΡΚ μεῖζόν ἐστι τῷ ΒΕΗ. ἴσον δὲ τὸ ΑΕΖ τῷ ΒΕΗ· τῷ αὐτῷ ἄρα ὑπερέχει τό τε ΥΕΤ τοῦ ΤΩΛ, καὶ τὸ

Prop. X. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſumantur Κ, Λ, quæ non ſint puncta in quibus diametri ſectionibus occurrunt: demonſtrandum eſt quadrilaterum ΛΥΡΧ quadrilatero ΩΧΚΙ æquale eſſe.

Quoniam enim rectæ lineæ ΑΖ, ΒΗ ſectionem contingunt; & per tactus diametri ΑΕ, ΒΕ ducuntur; & ſunt ΑΤ, ΚΙ contingentibus parallelæ: triangulum ΥΤΕ majus eſt [per 43. 1. huj.] quam triangulum ΤΩΑ triangulo ΕΖΑ. ſimiliter & triangulum ΞΒΙ majus eſt quam triangulum ΞΡΚ triangulo ΒΕΗ. ſed [per 1. 3. huj.] triangulum ΑΕΖ æquale eſt triangulo ΒΕΗ: quare eodem exceſſu & triangulum ΥΕΥ excedit triangulum ΤΩΑ, quo triangulum ΞΕΙ excedit ipſum

ΞPK: triangulum igitur TΥE una cum triangulo ΞPK æquale eſt triangulo ΞEI una cum triangulo TΩΛ. [vid. *Eut.* comment. in 48. 2. huj.] commune apponatur KΞETΛX: ergo quadrilaterum ΛTPX quadrilatero ΩXKI eſt æquale.

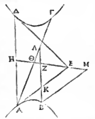
ΞΕΙ τῷ ΞΡΚ· τὸ ΤΥΕ ἄρα μετὰ τοῦ ΞΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΕΙ μετὰ τοῦ ΤΩΛ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΞΕΥΛΧ· τὸ ΛΤΡΧ ἄρα τετράπλευρον ἴσον ἐστὶ τῷ ΩΧΚΙ τετραπλεύρῳ.

Prop. XI. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſi in qualibet ſectione punctum ſumatur, & ab ipſo rectæ ducantur, una quidem contingenti parallela, altera vero parallela ei quæ tactus conjungit: triangulum, quod ab ipſis fit ad diametrum per occurſum contingentium ductam, à triangulo contento linea contingente & diametro per tactum differt, triangulo quod ad contingentium occurſum conſtituitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἐφ' ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι ληφθῇ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσιν, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον, πρὸς τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἠγμένῃ διαμέτρῳ, διαφέρει τοῦ ἀπολαμβανομένου τριγώνου, πρός τε τῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ, τῷ ἀπολαμβανομένῳ τριγώνῳ πρὸς τῇ συμπτώσει τῶν ἐφαπτομένων.



Sint ſectiones oppoſitæ AB, ΓΔ; & lineæ contingentes AE, ΔE, quæ in puncto E ſibi ipſis occurrant; ſit autem centrum Θ; junganturque ΛΔ & EΘH; & ſumpto in ſectione AB quovis puncto B, ducatur BZΛ quidem ipſi AH parallela, BM vero parallela ipſi AE: dico triangulum BZM à triangulo AKΛ differre triangulo KEZ.

Lineam enim ΛΔ ab ipſa EΘ bifariam ſecari [ex 38, & 39. 2. huj.] perſpicuum eſt; & EΘ diametrum eſſe conjugatam ei, quæ per Θ ducta ipſi ΛΔ æquidiſtat: quare AH applicata eſt ad EH. quoniam igitur HE diameter eſt, lineaque AE ſectionem contingit, & applicata eſt AH, à ſumpto autem in ſectione puncto B ad EH applicatur BZ ipſi AH parallela, & BM parallela ipſi AE: patet triangulum BMZ [per 45. 1. huj.] à triangulo ΛΘZ differre triangulo ΘΔE: ergo BZM triangulum à triangulo AKΛ differt triangulo KZE; ac ſimul patet quadrilaterum BKEM triangulo AKΛ æquale eſſe.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΕ, ΔΕ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἥτε ΛΔ καὶ ἡ ΕΘΗ, εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Β, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθωσαν παρὰ μὲν τὴν ΑΗ ἡ ΒΖΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ ἡ ΒΜ· λέγω ὅτι τὸ ΒΖΜ τρίγωνον τοῦ ΑΚΛ διαφέρει τῷ ΚΕΖ.

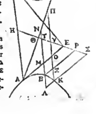
Ὅτι μὲν γὰρ ἡ ΛΔ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΕΘ φανερόν, καὶ ὅτι ἡ ΕΘ διάμετρός ἐστι συζυγὴς τῇ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΛΔ ἀγομένῃ· ὥστε κατηγμένη ἐστὶν ἡ ΑΗ ἐπὶ τὴν ΕΗ. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΗΕ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΑΕ, κατηγμένη δὲ ἡ ΑΗ, καὶ ληφθέντος ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ Β κατήγονται ἐπὶ τὴν ΕΗ ἡ μὲν ΒΖ παρὰ τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΒΜ παρὰ τὴν ΑΕ· δῆλον ὅτι τὸ ΒΜΖ τρίγωνον τοῦ ΛΘΖ διαφέρει τῷ ΘΔΕ· ὥστε καὶ τὸ ΒΖΜ τοῦ ΑΚΛ διαφέρει τῷ ΚΖΕ· καὶ συναποδέδεικται ὅτι τὸ ΒΚΕΜ τετράπλευρον ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΚΑ τριγώνῳ.

Prop. XII. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſi in una ſectione ſumantur duo puncta, & ab utriſque ſimiliter æquidiſtantes ducantur: quadrilatera ab ipſis conſtituta inter ſe æqualia erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν τομῶν δύο σημεῖα ληφθῇ, καὶ ἀφ' ἑκατέρου παράλληλοι ἀχθῶσιν ὁμοίως· ἴσα ἔσται τὰ γινόμενα ὑπ' αὐτῶν τετράπλευρα.



Sint eadem quæ ſupra; & in ſectione AB ſumantur quævis puncta B, K, à quibus ducantur lineæ ΛBMN, KΞOTΠ ipſi AΔ parallelæ, itemque BΞP, ΛKΣ parallelæ ipſi AE: dico quadrilaterum BΠ æquale eſſe quadrilatero KP.

Ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Κ, καὶ δι' αὐτῶν ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ ΑΔ αἱ ΛΒΜΝ, ΚΞΟΤΠ, τῇ δὲ ΑΕ αἱ ΒΞΡ, ΛΚΣ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΠ τῷ ΚΡ.

Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἴσον τὸ μὲν ΑΟΠ τρίγωνον τῷ ΚΟΕΣ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΑΜΝ τῷ ΒΜΕΡ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΞΡΣ, λεῖπον ἢ προσλαβὸν τὸ ΒΜΟΞ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝΠΟ, καὶ κοινοῦ προστεθέντος ἢ ἀφαιρουμένου τοῦ ΒΜΞΟ, τὸ ΒΝΠΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΞΡΣ.

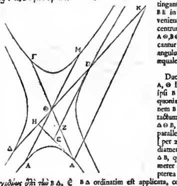
Quoniam enim demonſtratum eſt [in præced.] triangulum ΑΟΠ æquale quadrilatero ΚΟΕΣ, ac triangulum ΑΜΝ æquale quadrilatero ΒΜΕΡ: erit reliquum ΚΞΡΣ, auctum vel minutum quadrilatero ΒΜΟΞ æquale, quadrilatero ΜΝΠΟ; & communi ΒΜΞΟ appoſito vel ablato, quadrilaterum ΒΝΠΞ quadrilatero ΚΞΡΣ æquale erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγʹ.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις τῶν ἐφεξῆς τομῶν εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι ἀχθῶσιν· ἴσα ἔσται τὰ τρίγωνα, ὧν κορυφὴ κοινὴ τὸ κέντρον ἐστὶ τῶν ἀντικειμένων.

Prop. XIII. *Theor.*

Si in oppoſitis ſectionibus conjugatis, rectæ eas contingentes quæ deinceps ſunt in unum punctum conveniant; & per tactus diametri ducantur: triangula, quorum communis vertex eſt ſectionum centrum, inter ſe æqualia erunt.



Ἔστωσαν συζυγεῖς ἀντικείμεναι, ἐφ' ὧν τὰ Α, Β, Γ, Δ σημεῖα, καὶ τῶν Α, Β τομῶν ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΕ, ΒΕ, συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΘ, ΒΘ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Δ, Γ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΖΘ τρίγωνον τῷ ΑΗΘ τριγώνῳ.

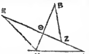
Ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Θ παρὰ τὴν ΒΕ αἱ ΑΚ, ΘΛΜ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται τῆς Β τομῆς ἡ ΒΖΕ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς διάμετρός ἐστιν ἡ ΔΘΒ, καὶ παρὰ τὴν ΒΕ ἐστὶν ἡ ΛΜ· συζυγής ἐστιν ἡ ΛΜ διάμετρος τῇ ΒΔ διαμέτρῳ, ἡ καλουμένη δευτέρα διάμετρος. διὰ δὴ τοῦτο κατῆκται ἡ ΑΚ τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΒΔ, καὶ ἐφάπτεται ἡ ΑΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΚΘΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ. ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς ΒΖ καὶ ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ· καὶ [a] ὡς ἄρα ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ. καὶ εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΒΘΖ, ΗΘΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἴσον ἄρα τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΒΘΖ τριγώνῳ.

Sint oppoſitæ ſectiones quæ conjugatæ appellantur Α, Β, Γ, Δ, & ſectiones Α, Β contingant rectæ lineæ ΑΕ, ΒΕ in puncto Β convenientes; ſit autem centrum Θ, & junctæ ΑΘ, ΒΘ ad Γ, Δ producantur: dico ΒΖΘ triangulum triangulo ΑΗΘ æquale eſſe.

Ducantur enim per Α, Θ lineæ ΑΚ, ΘΛΜ ipſi ΒΕ parallelæ. & quoniam ΒΖΕ ſectionem Β contingit, & per tactum diameter eſt ΔΘΒ, duciturque ΛΜ parallela ipſi ΒΕ; erit [per 20. 2. huj.] ΛΜ diameter conjugata ipſi ΔΒ, quæ ſecunda diameter appellatur. propterea autem ΑΚ ad ΒΔ ordinatim eſt applicata, contingitque ΑΗ: ergo [per 38. 1. huj.] rectangulum ΚΘΗ æquale eſt quadrato ΒΘ: & [per 17. 6.] ut ΚΘ ad ΘΒ ita ΒΘ ad ΘΗ. ſed [per 4. 6.] ut ΚΘ ad ΘΒ ita ΚΑ ad ΒΖ & ΑΘ ad ΘΖ: ut igitur ΑΘ ad ΘΖ ita ΒΘ ad ΘΗ. & ſunt anguli ΒΘΖ, ΗΘΖ duobus rectis æquales: ergo ΑΗΘ triangulum triangulo ΒΘΖ æquale erit.

EUTOCIUS.

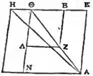
[a] Ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ, καί εἰσιν αἱ πρὸς τῷ Θ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἴσον τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΒΘΖ τριγώνῳ.] Ἐκκείσθω χωρὶς ἡ καταγραφὴ μόνων τῶν τριγώνων, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΘ ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΘΞ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ, καὶ ἡ ΞΘ πρὸς ΘΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΘΞ· ὥστε καὶ τὸ ΑΗΘ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΗΘΞ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΞΘ πρὸς ΘΖ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΘΗ, καὶ



[a] Quoniam ut ΑΘ ad ΘΖ ita ΒΘ ad ΘΗ, & ſunt anguli ΒΘΖ, ΗΘΖ duobus rectis æquales; ergo ΑΗΘ triangulum triangulo ΒΘΖ æquale erit.] Deſcribantur ſeorſum triangula; & productâ ΑΘ ad Ξ, fiat ut ΗΘ ad ΘΒ ita ΖΘ ad ΘΞ. itaque quoniam ut ΒΘ ad ΘΗ ita eſt ΑΘ ad ΘΖ & ΞΘ ad ΘΖ: erit [per 9. 5.] ΑΘ ipſi ΘΞ æqualis: & propterea [per 1. 6.] triangulum ΑΗΘ æquale triangulo ΗΘΞ. ſed ut ΞΘ ad ΘΖ ita ΘΒ ad ΘΗ, & circa æquales angulos,

gulos ad verticem Θ latera ſunt reciproce proportionalia: triangulum igitur ZΘB [per 15.6] triangulo HΘΞ eſt æquale, & idcirco triangulo AHΘ.

Sed & aliter demonſtrare poſſumus triangula æqualia eſſe. quoniam enim oſtenſum eſt ut KΘ ad ΘB ita ΘB ad ΘH, & ut KΘ ad ΘB ita AK ad BZ; erit ut AK ad BZ ita BΘ ad ΘH: quare rectangulum ſub AK, ΘH æquale eſt rectangulo ſub BZ, BΘ. & quoniam anguli HΘN, ΘBZ [per 29.1.] ſunt æquales, ſi parallelogramma rhomboidea deſcripſerimus iiſdem lateribus contenta, quæ angulos ad B, Θ æquales habeant, etiam inter ſeſe [per 14.6] æqualia erunt: propterea quod latera ſunt reciproce proportionalia. ſed rhomboides ZBΘA in angulo B trianguli ΘBZ duplum eſt; ejus namque diameter eſt ZΘ: rhomboides autem quod continetur ſub HΘ & linea æquali AK, videlicet ΘAN, in angulo HΘN, duplum eſt trianguli AHΘ; ſunt enim in eadem baſi ΘH & ſub eadem recta quæ à puncto A ducitur ipſi HΘ parallela: triangulum igitur AHΘ triangulo ZBΘ æquale eſt.



περὶ ἴσας γωνίας τὰς κατὰ κορυφὴν πρὸς τῷ Θ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραί· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΘΒ τρίγωνον τῷ ΗΘΞ, ὥστε καὶ τῷ ΑΗΘ.

Ἔστι δὲ καὶ ἄλλως δεῖξαι ἴσα τὰ τρίγωνα. ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΘΗ, ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς ΒΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΚ, ΘΗ ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΖ, ΒΘ ὀρθογωνίῳ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΗΘΝ, ΘΒΖ, ἐὰν ἀναγράψωμεν παραλληλόγραμμα ῥομβοειδῆ ὑπὸ τῶν αὐτῶν περιεχόμενα πλευρῶν τοῖς ὀρθογωνίοις, ἴσας ἔχοντα πρὸς ταῖς Θ, Β γωνίας· ἴσα ἔσται καὶ αὐτά, διὰ τὸ τὰς πλευρὰς ἀντιπεπονθέναι. ἔστι δὲ τὸ περιεχόμενον ῥομβοειδὲς ὑπὸ τῶν ΖΒ, ΒΘ ἐν τῇ Β γωνίᾳ διπλάσιον τοῦ ΘΒΖ τριγώνου, διάμετρος γὰρ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΖΘ· τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ΗΘ καὶ τῆς ἴσης τῇ ΑΚ, ὑπὸ τῆς ΘΑΝ ἀναγραφόμενον ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΝ γωνίᾳ, διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΗΘ τριγώνου· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΘΗ καὶ ὑπὸ τῆς αὐτῆς παραλλήλου τῆς ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΗΘ ἀγομένης· ὥστε ἴσον τὸ ΑΗΘ τῷ ΖΒΘ.

Prop. XIV. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſi in quavis ſectione punctum ſumatur; & ab ipſo ducantur lineæ parallelæ contingentibus uſque ad diametros: triangulum, quod ad centrum conſtituitur, à triangulo circa eundem angulum differt, triangulo baſim habente lineam contingentem & verticem ſectionum centrum.

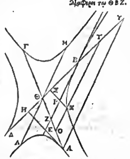
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἐφ' ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι ληφθῇ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων· τὸ γινόμενον πρὸς τῷ κέντρῳ τρίγωνον τοῦ γινομένου περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τριγώνου διοίσει τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐφαπτομένην, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον.

SINT alia quidem eadem; ſumatur autem punctum in B ſectione, quod ſit Ξ; & per ipſum ducatur ΞPΣ parallela ipſi AH, & OΞT parallela ipſi BE: dico triangulum OΘT à triangulo ΞΣT differre triangulo ΘBZ.

ΕΣΤΩ τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Ξ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ μὲν τὴν ΑΗ ἤχθωσαν ἡ ΞΡΣ, παρὰ δὲ τὴν ΒΕ ἡ ΟΞΤ· λέγω ὅτι τὸ ΟΘΤ τρίγωνον τοῦ ΞΣΤ διαφέρει τῷ ΘΒΖ.

Ducatur enim à puncto A linea AΥ ipſi BZ parallela. quoniam igitur ex iis quæ dicta ſunt [in præc.] ſectionis AΛ diameter eſt ΛΘM; conjugata autem ipſi & ſecunda diameter ΔΘB; atque à puncto A ducitur AH ſectionem contingens; & applicata eſt AΥ quæ ipſi BZ parallela eſt: habebit [per 40. 1. huj.] AΥ ad ΥH rationem compoſitam ex ratione ΘΥ ad ΥA & ex ratione tranſverſi lateris figuræ quæ fit ad BZ ad latus rectum. ſed [per 4. 6.] ut AΥ ad ΥH ita ΞT ad TΣ, & ut ΘΥ ad ΥA ita ΘT ad TO & ΘB ad BZ; ut autem figuræ, quæ ad ΛM, tranſverſum latus ad rectum, ita [ut oſtenſum in nota ad 20.2.] figuræ, quæ ad BΔ, rectum latus ad tranſverſum: ergo ΞT ad TΣ rationem habebit compoſitam ex



Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΖ ἡ ΑΥ. ἐπεὶ οὖν, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, τῆς ΑΛ τομῆς διάμετρος μέν ἐστιν ἡ ΛΘΜ, συζυγὴς δὲ αὐτῇ καὶ δευτέρα διάμετρος ἡ ΔΘΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐφάπτεται ἡ ΑΗ, κατῆκται δὲ παρὰ τὴν ΒΖ ἡ ΑΥ· ἕξει ἡ ΑΥ πρὸς τὴν ΥΗ τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΥ πρὸς ΥΑ καὶ ἐξ οὗ ὃν ἔχει ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΑΜ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΥ πρὸς ΥΗ οὕτως ἡ ΞΤ πρὸς ΤΣ, ὡς δὲ ἡ ΘΥ πρὸς ΥΑ οὕτως ἡ ΘΤ πρὸς ΤΟ καὶ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ, ὡς δὲ ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΑΜ εἴδους πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν· ἕξει ἄρα ἡ ΞΤ πρὸς ΤΣ τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΒ πρὸς

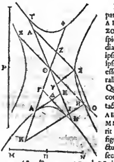
πρὸς ΒΖ, τουτέστιν ἡ ΘΤ πρὸς ΤΟ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μα΄. τοῦ α΄. βιβλίου, τὸ ΤΘΟ τρίγωνον τοῦ ΞΤΣ διαφέρει τῷ ΒΖΘ· ὥστε καὶ τῷ ΛΗΘ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε΄.

Ἐὰν μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι ἀχθῶσι, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐφ' ὁποτέρας τῶν συζυγῶν τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων· τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῇ τομῇ τρίγωνον τοῦ γινομένου τριγώνου πρὸς τῷ κέντρῳ μεῖζόν ἐστι τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐφαπτομένην κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῶν ἀντικειμένων.

ΕΣΤΩΣΑΝ κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι, αἱ ΑΒ, ΗΣ, Τ, Ξ, ὧν κέντρον τὸ Θ, καὶ τῆς ΑΒ τομῆς ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΔΕ, ΒΔΓ, καὶ διὰ τῶν Α, Β ἁφῶν ἤχθωσαν διάμετροι αἱ ΑΘΖΦ, ΒΘΤ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΣ τομῆς σημεῖόν τι τὸ Σ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ μὲν τὴν ΒΓ ἡ ΣΖΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ ἡ ΣΤ· λέγω ὅτι τὸ ΣΛΤ τρίγωνον τοῦ ΘΛΖ τριγώνου μεῖζόν ἐστι τῷ ΘΓΒ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΒΓ ἡ ΞΘΗ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ διὰ τοῦ Η ἡ ΚΙΗ, παρὰ δὲ τὴν ΒΤ ἡ ΣΟ· φανερὸν δὴ ὅτι συζυγής ἐστι διάμετρος ἡ ΞΗ τῇ ΒΤ, καὶ ὅτι ἡ ΣΟ παράλληλος οὖσα τῇ ΒΤ κατῆκται τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΘΗΟ, καὶ ὅτι παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΣΛΘΟ. Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς ἐστιν ἡ ΒΘ, καὶ ἑτέρα ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ ΑΕ, γεγονέτω ὡς ΔΒ πρὸς ΒΕ οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΒΓ· ἡ ἄρα ΜΝ ἐστὶν ἡ καλουμένη ὀρθία τοῦ παρὰ τὴν ΒΤ εἴδους. δίχα τετμήσθω ἡ ΜΝ κατὰ τὸ Π· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ οὕτως ἡ ΜΠ πρὸς ΒΓ. τετμήσθω δὴ ὡς ἡ ΞΗ πρὸς ΤΒ οὕτως ἡ ΤΒ πρὸς Ρ· ἔσται δὴ καὶ ἡ Ρ ἡ καλουμένη ὀρθία τοῦ παρὰ τὴν ΞΗ εἴδους. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ οὕτως ἡ ΜΠ πρὸς ΓΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ, ὡς δὲ ἡ ΜΠ πρὸς ΓΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ τῷ ἀπὸ ΘΗ,



PROP. XV. *Theor.*

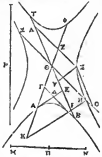
ratione ΘΒ ad ΒΖ, hoc eſt ΘΤ ad ΤΟ, & ex ratione recti lateris figuræ, quæ eſt ad ΒΔ, ad latus tranſverſum: quare, per ea quæ demonſtrata ſunt in quadrageſimo primo theoremate primi libri, triangulum ΤΘΟ à triangulo ΞΤΣ differt triangulo ΒΖΘ; & propterea [per 13. 3. huj.] triangulo ΛΗΘ.

Si rectæ lineæ unam oppoſitarum ſectionum conjugatarum contingentes conveniant, & per tactus diametri ducantur; ſumatur autem punctum in quavis ſectionum conjugatarum, & ab ipſo ducantur parallelæ contingentibus uſque ad diametros: triangulum, quod ab ipſis ad ſectionem conſtituitur, majus eſt quam triangulum quod ad centrum, triangulo baſim habente lineam contingentem & verticem centrum ſectionum.

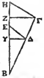
SINT oppoſitæ ſectiones conjugatæ ΑΒ, ΗΣ, Τ, Ξ, quarum centrum Θ, & ſectionem ΑΒ contingant ΑΔΕ, ΒΔΓ, & per tactus Α, Β diametri ΑΘΖΦ, ΒΘΤ ducantur; ſumaturque in ΗΣ ſectione punctum Σ; à quo ducatur ΣΖΛ ipſi ΒΓ parallela, & ΣΤ ipſi ΑΒ: dico ΣΛΤ triangulum majus eſſe quam triangulum ΘΛΖ, triangulo ΘΓΒ.

Ducatur enim per Θ, ΞΘΗ parallela ipſi ΒΓ; & per Η ipſi ΑΒ parallela ducatur ΚΙΗ, & ΣΟ parallela ipſi ΒΤ: quare perſpicuum eſt [per 20. 2. huj.] diametrum ΞΗ conjugatam eſſe ipſi ΒΤ; & ΣΟ, quia parallela ipſi ΒΤ, ad ΘΗΟ ordinatim eſſe applicatam; itemque parallelogrammum eſſe ΣΛΘΟ. Quoniam igitur ΒΓ ſectionem contingit, duciturque ΒΘ per tactum, & contingens alia eſt ΑΕ; fiat ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΜΝ ad duplam ipſius ΒΓ: & erit [per 50. 1. huj.] ΜΝ ea quæ figuræ ad ΒΤ conſtitutæ rectum latus appellatur. bifariam ſecetur ΜΝ in Π: erit igitur ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΜΠ ad ΒΓ. deinde fiat ut ΞΗ ad ΤΒ ita ΤΒ ad lineam Ρ: erit igitur Ρ [ex natura ſecund. diam.] latus rectum figuræ quæ fit ad ΞΗ. itaque quoniam ut ΔΒ ad ΒΕ ita ΜΠ ad ΓΒ, & [per 1. 6.] ut ΔΒ ad ΒΕ ita quadratum ΔΒ ad ΔΒΕ rectangulum; ut autem ΜΠ ad ΓΒ ita rectangulum ſub ΜΠ, ΒΘ ad rectangulum ΓΒΘ: erit igitur ut quadratum ex ΔΒ ad rectangulum ΔΒΕ ita rectangulum ſub ΜΠ, ΒΘ ad rectangulum ΓΒΘ. ſed rectangulum ſub ΜΠ, ΒΘ æquale eſt quadrato ex ΘΗ; propterea quod

[ex natura ſec.diam.] quadratum ex ΞΗ eſt æquale rectangulo ſub ΤΒ & ΜΝ, & rectangulum ſub ΜΠ, ΒΘ quarta pars eſt rectanguli ſub ΤΒ & ΜΝ; quadratum vero ex ΗΘ eſt etiam quarta pars quadrati ex ΗΞ: ut igitur quadratum ex ΔΒ ad rectangulum ΔΒΕ ita eſt quadratum ex ΗΘ ad rectangulum ΓΒΘ; & permutando, ut quadratum ex ΔΒ ad quadratum ex ΗΘ ita rectangulum ΔΒΕ ad ΓΒΘ rectangulum. ſed [per 19. & 20. 6.] ut quadratum ex ΔΒ ad quadratum ex ΗΘ ita triangulum ΔΒΕ ad triangulum ΗΘΙ, ſimilia enim ſunt [per 4.6.]; & ut rectangulum ΔΒΕ ad rectangulum ΓΒΘ ita ΔΒΕ triangulum ad triangulum ΓΒΘ*. ergo ut triangulum ΔΒΕ ad triangulum ΗΘΙ ita [per 11.5.] triangulum ΔΒΕ ad ipſum ΓΒΘ triangulum: quare [per 9.5.] triangulum ΗΘΙ triangulo ΓΒΘ eſt æquale: & idcirco triangulum ΗΘΚ à triangulo ΘΙΚ differt triangulo ΗΘΙ, hoc eſt triangulo ΓΒΘ. Rurſus quoniam ΘΒ ad ΒΓ compoſitam rationem habet ex ratione ΘΒ ad ΜΠ & ex ratione ΜΠ ad ΒΓ; & ut ΘΒ ad ΜΠ ita ΤΒ ad ΜΝ, & ita latus rectum Ρ [ut oſtenſum in nota ad 20. 2.huj.] ad ΞΗ; ut autem ΜΠ ad ΒΓ ita ΔΒ ad ΒΕ: habebit igitur ΘΒ ad ΒΓ rationem compoſitam ex ratione ΔΒ ad ΒΕ & ratione Ρ ad ΞΗ. & quoniam parallelæ ſunt ΒΓ, ΣΛ, triangulum ΘΓΒ ſimile eſt triangulo ΘΛΖ; & ob id ut ΘΒ ad ΒΓ ita eſt ΘΛ ad ΛΖ: quare ΘΛ ad ΛΖ compoſitam rationem habet ex ratione ipſius Ρ ad ΞΗ & ratione ΔΒ ad ΒΕ, hoc eſt ΗΘ ad ΘΙ. quoniam igitur ΗΣ eſt hyperbola, cujus diameter quidem ΞΗ, rectum vero latus Ρ; & ab aliquo ipſius puncto Σ applicatur ΣΟ, deſcribiturque ab ea quæ ex centro, videlicet à ΘΗ, figura ΘΙΗ; & ab applicata ΣΟ, vel ΘΛ ipſi [per 34. 1.] æquali, figura ΘΛΖ; à ΘΟ autem, quæ eſt inter centrum & applicatam, vel à ΣΛ ipſi ΘΟ æquali, deſcribitur ΣΛΤ figura ſimilis figuræ ΘΙΗ quæ fit ab eâ quæ ex centro; & rationes habentur compoſitæ, prout dictum eſt †: erit [per 41. 1. huj.] triangulum ΣΛΤ majus quam ΘΛΖ triangulum triangulo ΘΗΙ, hoc eſt [ut modo oſtenſum] triangulo ΘΓΒ.



διότι τὸ μὲν ἀπὸ ΞΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΤΒ, ΜΝ, καὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΜΠ, ΒΘ τέταρτον τοῦ ὑπὸ ΤΒ, ΜΝ, τὸ δὲ ἀπὸ ΗΘ τέταρτον τοῦ ἀπὸ ΗΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΒΕ οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΘ οὕτως ΔΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΙ, ὅμοια γάρ· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΔΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΒΘ οὕτως τὸ ΔΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΓΒΘ. ὡς ἄρα τὸ ΔΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΙ οὕτως τὸ ΔΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΘ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΙ τῷ ΓΒΘ· τὸ ἄρα ΗΘΚ τρίγωνον τοῦ ΘΙΚ διαφέρει τῷ ΘΙΗ, τουτέστι τῷ ΓΒΘ. Πάλιν ἐπεὶ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΒ πρὸς ΜΠ καὶ ἡ ΜΠ πρὸς ΒΓ, ἀλλ' ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΜΠ οὕτως ἡ ΤΒ πρὸς ΜΝ καὶ ἡ Ρ πρὸς ΞΗ, ὡς δὲ ἡ ΜΠ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ· ἕξει ἄρα ἡ ΘΒ πρὸς ΒΓ τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ καὶ ἡ Ρ πρὸς ΞΗ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΣΛ, καὶ ὅμοιον τὸ ΘΓΒ τρίγωνον τῷ ΘΛΖ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΘΒ πρὸς ΓΒ οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς ΛΖ· ἕξει ἄρα ἡ ΘΛ πρὸς ΛΖ τὸν συγκείμενον λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ Ρ πρὸς ΞΗ καὶ ἡ ΔΒ πρὸς ΒΕ, τουτέστιν ἡ ΗΘ πρὸς ΘΙ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΗΣ, διάμετρον ἔχουσα τὴν ΞΗ ὀρθίαν δὲ τὴν Ρ, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Σ κατῆκται ἡ ΣΟ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΘΗ εἶδος τὸ ΘΙΗ, ἀπὸ δὲ τῆς κατηγμένης τῆς ΣΟ, ἤτοι τῆς ΘΛ ἴσης αὐτῇ, τὸ ΘΛΖ· ἀπὸ δὲ τῆς ΘΟ μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς κατηγμένης, ἤτοι τῆς ΣΛ ἴσης αὐτῇ, τὸ ΣΛΤ εἶδος, ὅμοιον τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῷ ΘΙΗ, καὶ ἔχει τοὺς συγκειμένους λόγους, ὡς εἴρηται· τὸ ἄρα ΣΛΤ τρίγωνον τοῦ ΘΛΖ μεῖζόν ἐστι τῷ ΘΓΒ.



* Quod autem rectangulum ΔΒΕ ad rectangulum ΓΒΗ ſit ut triangulum ΔΒΕ ad ΓΒΗ triangulum, ſic oſtenditur. A punctis Δ & Γ in ΒΗ demittantur normales ΔΥ, ΓΖ; eritque ut ΔΥ ad ΔΒ ita ΓΖ ad ΓΒ. ut autem ΔΥ ad ΔΒ ita rectangulum ſub ΔΥ & ΒΕ ad rectangulum ΔΒΕ; & ut ΓΖ ad ΓΒ ita rectangulum ſub ΓΖ & ΒΗ ad rectangulum ΓΒΗ: eſt igitur ut rectangulum ſub ΔΥ & ΒΕ ad rectangulum ΔΒΕ ita rectangulum ſub ΓΖ & ΒΗ ad rectangulum ΓΒΗ. Sed rectangulum ſub ΔΥ & ΒΕ æquale eſt duplo triangulo ΔΒΕ, & rectangulum ſub ΓΖ & ΒΗ æquale duplo triangulo ΓΒΗ: eſt igitur ut triangulum ΔΒΕ ad rectangulum ΔΒΕ ita triangulum ΓΒΗ ad rectangulum ΓΒΗ, & permutando rectangulum ΔΒΕ ad rectangulum ΓΒΗ ut triangulum ΔΒΕ ad ΓΒΗ triangulum.

† Nempe triangulum ΛΘΖ eſt ſemiſſis parallelogrammi, cujus diameter eſt ΘΖ, æquianguli parallelogrammis, quorum ſemiſſes ſunt triangula ΛΥΣ, ΘΙΗ & diametri ΥΣ, ΙΗ; eſtque [ut modo oſtenſum] ΘΛ (hoc eſt ΣΟ) ad ΛΖ in ratione compoſita ex ratione ΘΗ ad ΘΙ & ratione Ρ ad ΞΗ: ergo [per 41.1 huj.] parallelogrammum, cujus dimidium ΛΥΣ & ΥΣ diameter, erit æquale parallelogrammo ſimili, cujus dimidium eſt ΙΘΗ & ΙΗ diameter, ſimul & parallelogrammo æquiangulo, cujus dimidium ΘΛΖ cujuſque diameter eſt ΘΖ. & conſequenter triangulum ΛΥΣ æquale eſt triangulis ΙΘΗ, ΘΛΖ ſimul ſumptis. Ac manifeſtum eſt quadrilaterum ΘΖ, ΣΥ triangulo ΙΘΗ, hoc eſt triangulo ΘΓΒ, æqualem eſſe.

*

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ'.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν, ἀπὸ δέ τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἐφαπτομένων, τέμνουσα τήν τε τομὴν καὶ τὴν ἑτέραν τῶν ἐφαπτομένων· ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἁφῇ τετράγωνον.

Ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς αἱ ΑΓ, ΓΒ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὴν ΓΒ ἡ ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ.

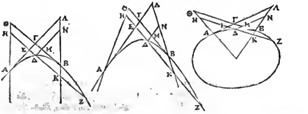
Ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Β διάμετροι ἥτε ΑΗΘ καὶ ἡ ΒΚΛ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΛ παράλληλος ἡ ΔΜΝ· φανερὸν δὴ αὐτόθεν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΖ, καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΛΔ τετραπλεύρῳ, καὶ τὸ ΒΛΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΚ τῇ ΚΔ ἐστὶν ἴση, καὶ πρόσκειται ἡ ΔΕ· τὸ ὑπὸ ΖΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΚΕ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΛΚ τρίγωνον τῷ ΔΝΚ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΔ οὕτως τὸ ΕΛΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΝΚ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς ὅλον τὸ ΕΛΚ τρίγωνον οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΔΚ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΔΝΚ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΛ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΕΛΚ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΕΛΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΑΓΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΛΔ τετράπλευρον οὕτως

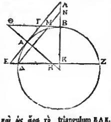
Prop. XVI. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ coni ſectionem vel circuli circumferentiam contingentes in unum conveniant; & ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt in ſectione, ducatur linea uni contingentium parallela, quæ & ſectionem & alteram contingentium ſecet: ut qnadrata contingentinm inter ſeſe, ita erit rectangulum, contentum lineis quæ interjiciuntur inter ſectionem & contingentem, ad quadratum lineæ inter parallelam & tactum interjectæ.

SIT coni ſectio vel circuli circumferentia Α Β, quam contingant rectæ lineæ Α Γ, Γ Β in puncto Γ convenientes; & ſumpto in ſectione aliquo puncto Δ, ab eo ducatur Ε Δ Ζ, quæ ipſi Γ Β parallela ſit: dico ut quadratum ex Β Γ ad quadratum ex Γ Α ita eſſe rectangulum Ζ Ε Δ ad quadratum ex Ε Α.

Ducantur enim per Α, Β diametri Α Η Θ, Β Λ Β; & per Δ ducatur Δ Μ Ν parallela ipſi Α Λ: perſpicuum eſt igitur [per 46. & 47.1.huj.] rectam Δ Β ipſi Β Ζ æqualem eſſe; triangulumque Α Ε Η [per 2. 3.huj.] æquale quadrilatero Δ Λ; & triangulum Β Λ Γ [per 1.3.huj.] triangulo Α Γ Θ. itaque quoniam Ζ Κ æqualis eſt Β Δ, & ipſi adjicitur Δ Ε; rectangulum Ζ Ε Δ una cum quadrato ex Δ Κ æquale erit [per 6.2.] quadrato ex Κ Ε. & quoniam triangulum Ε Λ Κ ſimile eſt triangulo Δ Ν Κ: erit [per 3.lem.3.huj.] ut quadratum ex Ε Κ ad quadratum ex Κ Δ ita triangulum Ε Λ Κ ad triangulum Δ Ν Κ; & permutando ut totum quadratum ex Ε Κ ad totum triangulum Ε Λ Κ ita ablatum quadratum ex Δ Κ ad ablatum triangulum Δ Ν Κ: ergo [per 19.5.] eſt reliquum rectangulum Ζ Ε Δ ad reliquum quadrilaterum Δ Λ ut quadratum ex Ε Κ ad triangulum Ε Λ Κ. ſed [per 19. & 20. 6.] ut quadratum ex Ε Κ ad Ε Λ Κ triangulum ita eſt quadratum ex Γ Β ad triangulum Α Γ Β: ut igitur Ζ Ε Δ rectangulum ad quadrilaterum Δ Λ ita quadratum





quadratum ex Γ B ad A Γ B triangulum. eſt autem quadrilaterum Δ A triangulo A B H æquale; & triangulum A Γ B æquale triangulo A Θ Γ: quare ut rectangulum Z B Δ ad triangulum A B H ita quadratum ex Γ B ad A Θ Γ triangulum; & permutando ut rectangulum Z B Δ ad quadratum Γ B ita A E H triangulum ad triangulum A Θ Γ. ſed [per 3.lem.3.huj.] ut triangulum A H B ad triangulum A Θ Γ ita quadratum ex E A ad quadratum ex A Γ: ergo ut rectangulum Z E Δ ad quadratum ex Γ B ita quadratum ex E A ad quadratum ex A Γ, & permutando.

τὸ ἀπὸ Γ B πρὸς τὸ A Γ B τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ μὲν Δ A τῷ A E H τριγώνῳ, τὸ δὲ A Γ B τῷ A Θ Γ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Z E Δ πρὸς τὸ A E H τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ Γ B πρὸς τὸ A Θ Γ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ὑπὸ Z E Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ B οὕτως τὸ A E H τρίγωνον πρὸς τὸ A Θ Γ. ὡς δὲ τὸ A H E πρὸς τὸ A Θ Γ οὕτως τὸ ἀπὸ E A πρὸς τὸ ἀπὸ A Γ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Z E Δ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ B οὕτως τὸ ἀπὸ E A πρὸς τὸ ἀπὸ A Γ, καὶ ἐναλλάξ.

EUTOCIUS.

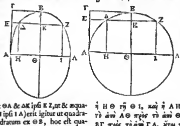
In aliquibus codicibus hoc theorema ut ſeptimum decimum apponebatur. ſed re vera caſus eſt ſexti decimi theorematis: eo enim tantum differt, quod lineæ contingentes A Γ, Γ B diametris parallelæ ſint; cætera vero eadem eſſe patet. in commentariis igitur illud ponere oportebat, uti ſcripſimus in ſcholio ad decimum quartum theorema ſecundi libri.

Ἔν τισι τῶν ἀντιγράφων τοῦτο τὸ θεώρημα ὡς ιζ΄. φέρεται. ἔστι δὲ κατ' ἀλήθειαν πτῶσις τοῦ ις΄. μόνον γὰρ ὅτι αἱ A Γ, Γ B ἐφαπτόμεναι παράλληλοι γίνονται ταῖς διαμέτροις, τὰ δὲ ἄλλα ἐστὶ τὰ αὐτά. ἐν σχολίοις ἂν ἔδει τοῦτο κεῖσθαι, ὥσπερ ἐγράψαμεν εἰς τὸ ιδ΄. τοῦ δευτέρου βιβλίου.

Si in ellipſi & circulo diametri quæ tranſeunt per tactus contingentibus parallelæ ſint, eadem prorſus evenient quæ in propoſitione dicuntur.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου αἱ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι παράλληλοι ὦσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ οὕτως ἔσται τὰ τῆς προτάσεως.

Quoniam [per 21. 1. huj.] ut quadratum ex B Θ ad rectangulum Λ Θ A ita quadratum ex Δ H ad rectangulum Λ H A; atque eſt rectangulum quidem Λ Θ A quadrato ex A Θ æquale, rectangulum autem Λ H A æquale rectangulo I A H; (recta enim AΘ æqualis eſt ΘΛ & ΔK ipſi K Z, ut & æqualis H Θ ipſi Θ I & Λ H ipſi I A) erit igitur ut quadratum ex A Θ ad quadratum ex Θ B, hoc eſt quadratum ex B Γ ad quadratum ex Γ A, ita rectangulum I A H ad quadratum ex Δ H, hoc eſt rectangulum Z E Δ ad quadratum ex E A.



Ἐπεὶ ὡς τὸ ἀπὸ B Θ πρὸς τὸ ὑπὸ Λ Θ A οὕτως τὸ ἀπὸ Δ H πρὸς τὸ ὑπὸ Λ H A· καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ Λ Θ A ἴσον τῷ ἀπὸ Θ A, τὸ δὲ ὑπὸ Λ H A ἴσον τῷ ὑπὸ I A H· (ἴση γὰρ ἡ A Θ τῇ Θ Λ, καὶ ἡ Δ K τῇ K Z, καὶ ἡ H Θ τῇ Θ I, καὶ ἡ Λ H τῇ I A) ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ AΘ πρὸς τὸ ἀπὸ Θ B, τουτέστι τὸ ἀπὸ B Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ A, οὕτω τὸ ὑπὸ I A H πρὸς τὸ ἀπὸ Δ H, τουτέστι τὸ ὑπὸ Z E Δ πρὸς τὸ ἀπὸ E A.

Prop. XVII. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ coni ſectionem vel circuli circumferentiam contingentes in unum conveniant; ſumantur autem in ſectione duo quævis puncta, & ab iis ducantur lineæ contingentibus parallelæ, quæ & ſibi ipſis & ſectioni occurrant: ut quadrata contingentium inter ſeſe, ita erunt inter ſe rectangula contenta ſub rectis ſimiliter ſumptis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ΄.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς δύο τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀχθῶσιν ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας τε καὶ τὴν γραμμήν· ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

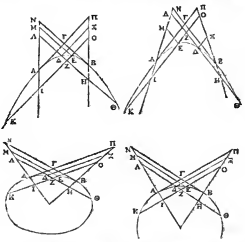
SIT coni ſectio vel circuli circumferentia A B, quam contingant rectæ lineæ A Γ, Γ B, in puncto Γ convenientes; ſumanturque in ſectione puncta Δ, E, & ab ipſis ducantur E Z I K, Δ Z H Θ, quæ lineis A Γ, Γ B parallelæ ſint: dico ut quadratum ex A Γ ad quadratum ex Γ B ita eſſe rectangulum K Z E ad rectangulum Θ Z Δ.

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ A B, καὶ τῆς A B ἐφαπτόμεναι αἱ A Γ, Γ B συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, E, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ τὰς A Γ, Γ B ἤχθωσαν αἱ E Z I K, Δ Z H Θ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ A Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ B οὕτως τὸ ὑπὸ K Z E πρὸς τὸ ὑπὸ Θ Z Δ.

Ἤχθωσαν

Ηχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Β διάμετροι αἱ Α Λ Μ Ν, Β Ο Ξ Π, ἐκβεβλήσθωσαν αἵ τε ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ παράλληλοι μέχρι τῶν διαμέτρων, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Δ, Ε παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ Δ Ξ, Ε Μ· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ Κ Ι τῇ Ι Ε ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ Θ Η τῇ Η Δ. ἐπεὶ οὖν ἡ Κ Ε τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ι, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ· τὸ ὑπὸ Κ Ζ Ε μετὰ τοῦ ἀπὸ Ζ Ι ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Ε Ι. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ τρίγωνα διὰ τὰς παραλλήλους, ἔστιν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ Ε Ι πρὸς ὅλον τὸ Ι Μ Ε τρίγωνον,

Ducantur enim per Α, Β diametri Α Λ Μ Ν, Β Ο Ξ Π, & producantur contingentes rectæ, ut & ipſis parallelæ uſque ad diametros; & à punctis Δ, Ε parallelæ contingentibus ducantur Δ Ξ, Ε Μ: conſtat ideoque [per 46 & 47. 1. huj.] Κ Ι æqualem eſſe ipſi Ι Ε, & Θ Η ipſi Η Δ. quoniam igitur Κ Ε ſecatur in partes æquales in puncto Ι, & in partes inæquales in Ζ: rectangulum Κ Ζ Ε una cum quadrato ex Ζ Ι æquale eſt [per 5 vel 6. 2.] quadrato ex Ε Ι. & cum triangula ſimilia ſint, ob lineas parallelas; erit [per 3. lem. 3. huj.] ut totum quadratum ex Ε Ι ad totum triangulum Ι Μ Ε ita ablatum quadratum ex Ι Ζ ad ablatum



οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ Ι Ζ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ Ζ Ι Λ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ Κ Ζ Ε πρὸς λοιπὸν τὸ Ζ Μ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ Ε Ι πρὸς ὅλον τὸ Ι Μ Ε τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ Ε Ι πρὸς Ι Μ Ε τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ Γ Α πρὸς τὸ Γ Α Ν· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Κ Ζ Ε πρὸς τὸ Ζ Μ τετράπλευρον οὕτως τὸ ἀπὸ Α Γ πρὸς τὸ Γ Α Ν. ἴσον δὲ τὸ μὲν Α Γ Ν τῷ Γ Π Β, τὸ δὲ Ζ Μ τῷ Ζ Ξ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Κ Ζ Ε πρὸς τὸ Ζ Ξ οὕτως τὸ ἀπὸ Α Γ πρὸς τὸ Γ Β Π. Ομοίως δὴ δειχθήσεται, καὶ ὡς τὸ ὑπὸ Θ Ζ Δ πρὸς τὸ Ξ Ζ οὕτως τὸ ἀπὸ Γ Β πρὸς τὸ Γ Π Β. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς μὲν τὸ ὑπὸ Κ Ζ Ε πρὸς τὸ Ζ Ξ τετράπλευρον οὕτως τὸ ἀπὸ Α Γ πρὸς τὸ Γ Π Β, διὰ δὲ τὸ ἀνάπαλιν ὡς τὸ Ζ Ξ τετράπλευρον πρὸς τὸ ὑπὸ Θ Ζ Δ οὕτως τὸ Π Γ Β πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Β· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ Α Γ πρὸς τὸ ἀπὸ Γ Β οὕτως τὸ ὑπὸ Κ Ζ Ε πρὸς τὸ ὑπὸ Θ Ζ Δ.

triangulum Ζ Ι Λ: quare & reliquum Κ Ζ Ε rectangulum ad reliquum quadrilaterum Ζ Μ eſt [per 19. 5.] ut totum quadratum ex Ε Ι ad totum Ι Μ Ε triangulum. ſed ut quadratum ex Ε Ι ad triangulum Ι Μ Ε ita quadratum ex Γ Α ad triangulum Γ Α Ν: ut igitur Κ Ζ Ε rectangulum ad quadrilaterum Ζ Μ ita quadratum ex Α Γ ad Γ Α Ν triangulum. atque [per 1. 3. huj.] eſt æquale triangulum Α Γ Ν triangulo Γ Π Β, & [per 3. 3. huj.] quadrilaterum Ζ Μ quadrilatero Ζ Ξ: ergo ut rectangulum Κ Ζ Ε ad Ζ Ξ quadrilaterum ita quadratum ex Α Γ ad triangulum Γ Β Π. Similiter demonſtrabitur & ut rectangulum Θ Ζ Δ ad quadrilaterum Ξ Ζ ita eſſe quadratum ex Γ Β ad triangulum Γ Π Β. itaque quoniam ut rectangulum Κ Ζ Ε ad quadrilaterum Ζ Ξ ita quadratum ex Α Γ ad Γ Π Ξ triangulum; & invertendo ut quadrilaterum Ζ Ξ ad rectangulum Θ Ζ Δ ita triangulum Π Γ Β ad quadratum ex Γ Β: erit ex æquali, ut quadratum ex Α Γ ad quadratum ex Γ Β ita rectangulum Κ Ζ Ε ad rectangulum Θ Ζ Δ.

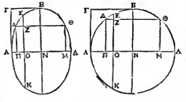
EUTOCIUS.

Hoc etiam theorema ſimiliter ac præcedens poſitum eſt: quod nos, quaſi caſum auferentes, hoc loco adſcripſimus.

Si in ellipſi aut circuli circumferentia diametri quæ per tactus ducuntur parallelæ ſint contingentibus ΑΓ, ΓΒ; erit itidem ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΓ ita rectangulum ΚΖΕ ad rectangulum ΔΖΘ.

Ducantur enim per ΔΘ ordinatim applicatæ ΔΠ, ΘΜ. & quoniam ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ ita quadratum ex ΒΝ ad quadratum ex ΝΛ, hoc eſt ad rectangulum ΑΝΛ; ut autem quadratum ex ΒΝ ad rectangulum ΑΝΛ ita [per 21. 1. huj.] quadratum ex ΔΠ, hoc eſt quadratum ex ΖΟ, ad rectangulum ΑΠΛ; & quadratum ex ΕΟ ad rectangulum ΑΟΛ: & eſt reliquum ad reliquum ut totum ad totum. itaque ſi à quadrato ex ΕΟ auferatur quadratum ex ΔΠ, hoc eſt quadratum ex ΖΟ, relinquitur [per 5.2.] rectangulum ΚΖΕ; eſt enim ΚΟ ipſi ΟΕ æqualis. rurſus ſi à rectangulo ΑΟΛ auferatur rectangulum ΑΠΛ, relinquitur [per *Pappi* lem. 3. in lib.2.] ΜΟΠ rectangulum, hoc eſt rectangulum ΘΖΔ; namque ΑΠ eſt æqualis ΜΛ, & ΠΝ ipſi ΝΜ: ut igitur quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ ita reliquum rectangulum ΚΖΕ ad reliquum ΔΖΘ.

Quod ſi punctum Ζ extra ſectionem cadat, additiones & ablationes contrario facere oportebit.



Καὶ τοῦτο ὁμοίως τῷ πρὸ αὐτοῦ ἔκειτο θεώρημα· ὅπερ ἡμεῖς ὡς πτῶσιν ἀφελόντες ἐνταῦθα ἐγράψαμεν.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἢ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας αἱ διὰ τῶν ἁφῶν ἀγόμεναι διάμετροι παράλληλοι ὦσι ταῖς ἐφαπτομέναις τῶν ΒΓ, ΓΑ· καὶ οὕτως ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ οὕτω τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΖΘ.

Ἤχθωσαν διὰ τῶν Δ, Θ τεταγμένως κατηγμέναι αἱ ΔΠ, ΘΜ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτω τὸ ἀπὸ ΒΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΝΛ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΝΛ οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΟ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΠΛ, καὶ τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΟΛ· καὶ λοιπὸν πρὸς λοιπὸν ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ἐὰν ἄρα ἀπὸ μὲν τοῦ ἀπὸ ΕΟ ἀφαιρεθῇ τὸ ἀπὸ ΔΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΟ, καταλείπεται τὸ ὑπὸ ΚΖΕ· ἴση γὰρ ἡ ΚΟ τῇ ΟΕ. ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ὑπὸ ΑΟΛ ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπὸ ΑΠΛ, λείπεται τὸ ὑπὸ ΜΟΠ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΘΖΔ, ἴση γὰρ ἡ ΑΠ τῇ ΜΛ καὶ ἡ ΠΝ τῇ ΝΜ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτω λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΔΖΘ.

Ὅταν δὲ τὸ Ζ ἐκτὸς τῆς τομῆς, τὰς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις ἀνάπαλιν ποιητέον.

Prop. XVIII. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppoſitas ſectiones contingentes in unum conveniant; ſumatur autem in quavis ſectione aliquod punctum, & ab eo ducatur recta uni contingentium parallela quæ & ſectionem & alteram contingentium ſecet: ut quadrata contingentium inter ſeſe; ita erit rectangulum, contentum rectis quæ interjiciuntur inter ſectionem & contingentem, ad quadratum ejus quæ inter parallelam & tactum interjicitur.

Sint oppoſitæ ſectiones ΑΒ, ΜΝ, & contingentes rectæ ΑΓΛ, ΒΓΘ, quæ in puncto Γ conveniant; per tactus autem ducantur diametri ΑΜ, ΒΝ, & ſumatur in ſectione ΜΝ quodvis punctum Δ, à quo ducatur ΖΔΕ ipſi ΒΘ parallela: dico ut quadratum ex ΒΓ ad quadratum ex ΓΑ ita eſſe rectangulum ΖΕΔ ad quadratum ex ΑΕ.

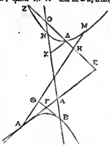
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ ληφθῇ τι σημεῖον ἐφ' ὁποτερασοῦν τῶν τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ μίαν τῶν ἐφαπτομένων τέμνουσα τήν τε τομὴν καὶ τὴν ἑτέραν ἐφαπτομένην· ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἁφῇ τετράγωνον.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΜΝ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓΛ, ΒΓΘ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι αἱ ΑΜ, ΒΝ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΜΝ τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὴν ΒΘ ἡ ΖΔΕ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΓΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ.

Ἤχθω

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Δ τῇ ΑΕ παράλληλος ἡ ΔΞ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΒ, καὶ διάμετρος αὐτῆς ἡ ΒΝ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΒΘ, καὶ τῇ ΒΘ παράλληλος ἡ ΔΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΟ τῇ ΟΔ. καὶ πρόσκειται ἡ ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΟ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΟ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΛ τῇ ΔΞ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΟΛ τρίγωνον τῷ ΔΞΟ· ἔστιν ἄρα ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ΕΟΛ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΔΟ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΞΔΟ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΔΛ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ΕΟΛ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ΕΟΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΔΛ τετράπλευρον οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ ΔΛ τετράπλευρον τῷ ΑΕΗ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΒΛΓ τῷ ΑΓΘ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΑΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΑΓΘ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ΑΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ.



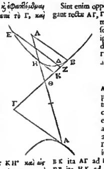
Ducatur enim per Δ ipſi ΑΕ parallela ΔΞ. & quoniam ΑΒ eſt hyperbola, cujus diameter ΒΝ; rectaque ΒΘ ſectionem contingit, & ipſi ΒΘ parallela eſt ΔΖ: erit [per 48.1.huj.] ΖΟ æqualis ΟΔ. adjungitur autem ΕΔ; ergo [per 6.2.] rectangulum ΖΕΔ una cum quadrato ex ΔΟ æquale eſt quadrato ex ΟΕ. & cum ΕΛ parallela ſit ΔΞ, triangulum ΕΟΛ ſimile eſt triangulo ΔΞΟ: eſt igitur [per 3. lem. 3. huj.] ut totum quadratum ex ΕΟ ad triangulum ΕΟΛ ita ablatum quadratum ex ΔΟ ad ablatum ΞΔΟ triangulum: quare & reliquum rectangulum ΔΕΖ ad quadrilaterum ΔΛ eſt ut quadratum ex ΕΟ ad triangulum ΕΟΛ. ſed ut quadratum ex ΕΟ ad ΕΟΛ triangulum ita [per 19. & 20. 6.] quadratum ex ΒΓ ad triangu- ΒΓΛ: ut igitur rectangulum ΖΕΔ ad quadrilaterum ΔΛ ita quadratum ex ΒΓ ad ΒΓΛ triangulum. æquale autem eſt quadrilaterum ΔΛ [per 6.3. huj.] triangulo ΑΕΗ, & triangulum ΒΓΛ [per 1. 3. huj.] triangulo ΑΓΘ: ergo ut ΖΕΔ rectangulum ad triangulum ΑΕΗ ita quadratum ex ΒΓ ad ΑΓΘ triangulum. ſed ut triangulum ΑΕΗ ad quadratum ex ΕΑ ita triangulum ΑΓΘ ad quadratum ex ΑΓ: ex æquali igitur ut quadratum ex ΒΓ ad quadratum ex ΓΑ ita rectangulum ΖΕΔ ad quadratum ex ΕΑ.

EUTOCIUS.

Ἐν τισιν ἀντιγράφοις εὑρέθη ἑτέρα ἀπόδειξις τούτου τοῦ θεωρήματος, ἐὰν ἑκατέρας τῶν τομῶν ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι συμπίπτωσι, καὶ οὕτως ἔχῃ τὰ σημεῖα.

Ἔστωσαν γὰρ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΓΒ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΔΕΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Α διάμετρος ἡ ΑΘΗ, διὰ δὲ τῶν Β, Η παρὰ τὴν ΕΖ αἱ ΗΚ, ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ τοῦ Β ἐφάπτεται μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἡ ΒΘ, τεταγμένως δὲ ἦκται ἡ ΒΛ· ἔστιν ὡς ἡ ΛΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΛΘ πρὸς ΘΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΛΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς ΒΚ, ὡς δὲ ἡ ΛΘ πρὸς ΘΗ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΚΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς ΒΚ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΗΚ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς ΚΒ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτω τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ οὕτως ἐδείχθη τὸ ὑπὸ ΕΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ.



In aliquibus exemplaribus alia demonſtratio hujus theorematis invenitur, cum rectæ lineæ utramque ſectionem contingentes conveniant.

Sint enim oppoſitæ ſectiones Α,Β, quas contingant rectæ ΑΓ, ΓΒ in puncto Γ concurrentes; ſumaturque aliquod punctum Δ in ſectione Β, & ab eo ducatur ΔΕΖ ipſi ΑΓ parallela: dico ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ ita eſſe rectangulum ΕΖΔ ad quadratum ex ΖΒ.

Ducatur enim per Α diameter ΑΘΗ, & per Β,Η ducantur ΗΒ, ΒΛ parallelæ ipſi ΕΖ. quoniam igitur ΒΘ in puncto Β hyperbolam contingit, & ordinatim applicata eſt ΒΛ: erit [per 36. 1.] ut ΛΑ ad ΑΗ ita ΛΘ ad ΘΗ. ſed [per 2.6.] ut ΛΑ quidem ad ΑΗ ita ΓΒ ad ΒΚ, ut vero ΛΘ ad ΘΗ ita ΑΓ ad ΒΗ: quare ut ΓΒ ad ΒΚ ita ΑΓ ad ΗΚ, & permutando ut ΑΓ ad ΓΒ ita ΗΚ ad ΒΒ, & [per 22. 6.] ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ ita quadratum ex ΗΚ ad quadratum ex ΚΒ. ſed demonſtratum eſt [per 16.3.huj.] rectangulum ΒΖΔ eſſe ad quadratum ex ΖΒ ut quadratum ex ΗΒ ad quadratum ex ΚΒ: ergo ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ ita ΕΖΔ rectangulum ad quadratum ex ΖΒ.

PROP.

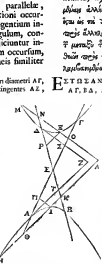
Prop. XIX. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppoſitas ſectiones contingentes in unum conveniant; & ducantur contingentibus parallelæ, quæ & ſibi ipſis & ſectioni occurrant: ut quadrata contingentium inter ſeſe; ita erit rectangulum, contentum lineis quæ interjiciuntur inter ſectionem & linearum occurſum, ad rectangulum quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν, ἀχθῶσι δὲ παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις ἀλλήλας τέμνουσαι καὶ τὴν τομήν· ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

SINT oppoſitæ ſectiones, quarum diametri AΓ, BΔ, centrumque E; & contingentes AZ, ZΔ in Z conveniant; ſumanturque quævis puncta, & ab ipſis ducantur HΘIKA, MNΞOA rectis AZ, ZΔ parallelæ: dico ut quadratum ex AZ ad quadratum ex ZΔ ita eſſe rectangulum HAI ad rectangulum MAΞ.



Ducantur enim per Ξ, I lineæ IΠ, ΞP parallelæ ipſis AZ, ZΔ. itaque quoniam [per 19. & 20. 6.] ut quadratum ex AZ ad AZΣ triangulum ita quadratum ex ΘA ad triangulum ΘAO, & quadratum ex ΘI ad triangulum ΘIΠ: erit [per 6.2. & 19.5.] & reliquum rectangulum HAI ad reliquum IΠOA quadrilaterum, ut quadratum ex AZ ad triangulum AZΣ. atque [per 4.3. huj.] eſt triangulum AZΣ triangulo ΔZT æquale, & [per 7.3. huj.] ΠOAI quadrilaterum quadrilatero KPΞA: ut igitur quadratum ex AZ ad triangulum ΔTZ ita rectangulum HAI ad quadrilaterum PΞAK. ut autem triangulum ΔTZ ad quadratum ex ZΔ ita quadrilaterum PΞAK ad rectangulum MAΞ, [quod eodem prorſus modo probatur quo præmiſſa:] ergo ex æquali ut quadratum ex AZ ad quadratum ex ZΔ ita rectangulum HAI ad rectangulum MAΞ.

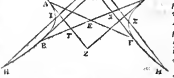
ἘΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι αἱ ΑΓ, ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΖ, ΖΔ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπό τινων σημείων ἤχθωσαν παρὰ τὰς ΑΖ, ΖΔ αἱ ΗΘΙΚΛ, ΜΝΞΟΛ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΖ.

Ἤχθωσαν γὰρ παρὰ τὰς ΑΖ, ΖΔ διὰ τῶν Ξ, Ι αἱ ΙΠ, ΞΡ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΣ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ΘΛΟ, καὶ τὸ ἀπὸ ΘΙ πρὸς τὸ ΘΙΠ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς λοιπὸν τὸ ΙΠΟΛ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΣ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ ΑΣΖ τῷ ΔΖΤ, καὶ τὸ ΠΟΛΙ τῷ ΚΡΞΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΔΤΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ΡΞΛΚ. ὡς δὲ τὸ ΔΤΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ οὕτως τὸ ΡΞΛΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ· καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ.

EUTOCIUS.

In aliquibus codicibus demonſtratio hujus theorematis invenitur hujuſmodi.

Ἔν τισιν ἀντιγράφοις εὑρέθη ἀπόδειξις τούτου τοῦ θεωρήματος τοιαύτη.



Ducatur MA quidem ipſi ZA parallela ſectionem ΔΓ ſecans, HA vero parallela ZΔ ſecans ipſam AB: demonſtrandum eſt ut quadratum ex ΔZ ad quadratum ex ZA ita eſſe rectangulum HAI ad rectangulum MAΞ.

Ducantur enim per tactus A, Δ diametri AΓ, ΔB; & per B, Γ ipſæ BΠ, ΓΠ contingentibus parallelæ: ergo BΠ, ΓΠ ſectiones in pun-

Ἤχθω δὴ ἡ μὲν ΜΛ παρὰ τὴν ΖΑ τέμνουσα τὴν ΔΓ τομήν, ἡ δὲ ΗΛ παρὰ τὴν ΖΔ τέμνουσα τὴν ΑΒ· δεικτέον ὅτι ὁμοίως ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ.

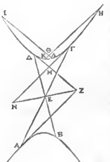
Ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Δ ἁφῶν διάμετροι αἱ ΑΓ, ΔΒ, καὶ διὰ τῶν Β, Γ ἤχθωσαν παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΒΠ, ΓΠ· ἐφάψονται δὴ αἱ ΒΠ, ΓΠ

ΓΠ τῆς τομῆς κατὰ τὰ Β, Γ. καὶ ἐπεὶ κέντρον ἐστὶ τὸ Ε, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΕ τῇ ΕΔ. ἡ δὲ ΑΕ τῇ ΕΓ· διὰ δὴ τοῦτο καὶ, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΤΖ τῇ ΓΣΠ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΤΕ τῇ ΕΣ. ἡ δὲ ΔΖ τῇ ΤΒ· ὥστε καὶ ἡ ΒΣ τῇ ΤΔ. καὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΠΣ τρίγωνον τῷ ΔΤΖ τριγώνῳ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΠ τῇ ΔΖ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡ ΓΠ τῇ ΑΖ ἴση. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΓ οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ.

ctis Β, Γ contingunt*. & quoniam Ε centrum eſt ſectionum, erit ΒΕ ipſi ΕΔ æqualis. at ΑΕ æqualis eſt ΕΓ: quare & cum parallelæ ſint ΑΤΖ, ΓΣΠ; & ΤΕ quidem æqualis erit [per 30. 1. huj.] ΕΣ. verum ΔΖ æqualis eſt ΤΒ; ergo & ΒΣ ipſi ΤΔ. atque triangulum ΒΠΣ triangulo ΔΤΖ æquale: recta igitur ΒΠ æqualis eſt ipſi ΔΖ. ſimiliter vero ΓΠ æqualis ipſi ΑΖ demonſtrabitur. ſed [per 18. 3. huj.] ut quadratum ex ΒΠ ad quadratum ex ΠΓ ita rectangulum ΗΛΙ ad rectangulum ΜΛΞ: ut igitur quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΑ ita ΗΛΙ rectangulum ad rectangulum ΜΛΞ.

Ἄλλως.

Ἤχθω πάλιν ἑκατέρα τῶν ΗΘΚ, ΙΘΛ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, τέμνουσα τὴν ΔΓ τομήν. δεικτέον ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΙΘΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ. ἤχθω γὰρ διὰ τῆς Α ἁφῆς διάμετρος ἡ ΑΓ, παρὰ δὲ τὴν ΑΖ ἤχθω ἡ ΓΜ· ἐφάψεται δὴ ἡ ΓΜ τῆς ΓΔ τομῆς κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ ΔΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΓ οὕτως τὸ ὑπὸ ΙΘΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΙΘΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ.



Aliter.

Rurſus ducatur utraque linearum ΗΘΚ, ΙΘΛ parallela contingenti, ſecanſque ΔΓ ſectionem. oſtendendum eſt ut quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΑ ita eſſe rectangulum ΙΘΛ ad rectangulum ΗΘΚ. ducatur enim per tactum Α diameter ΑΓ, & per Γ ipſa ΓΜ parallela ΑΖ: ergo [per ſchol. *Eut.* in 44. 1. huj.] ΓΜ continget ſectionem ΓΔ in puncto Γ, atque erit ut quadratum ex ΔΜ ad quadratum ex ΜΓ ita [per 17. 3. huj.] rectangulum ΙΘΛ ad rectangulum ΗΘΚ. ut autem quadratum ex ΔΜ ad quadratum ex ΜΓ ita quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΑ †: quare ut quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΑ ita rectangulum ΙΘΛ ad rectangulum ΗΘΚ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κʹ.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν συμπίπτουσα ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν, ἀχθῇ δέ τις ἑτέρα εὐθεῖα παρὰ τὴν αὐτὴν τέμνουσα τάς τε τομὰς καὶ τὰς ἐφαπτομένας· ἔσται ὡς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ταῖς τομαῖς προσπιπτουσῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετράγωνον, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης εὐθειῶν πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἁφῇ τετράγωνον.

Prop. XX. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppoſitas ſectiones contingentes ſibi ipſis occurrant; & per occurſum ducatur recta tactus conjungenti parallela, quæ ſecet utramque ſectionem; ducatur autem alia recta parallela eidem, ſectioneſque & contingentes ſecans: erit ut rectangulum, contentum ſub ſegmentis quæ inter occurſum contingentium & ſectiones interjiciuntur, ad quadratum ipſius contingentis; ita rectangulum, quod continetur ſub rectis inter ſectiones & contingentem interjectis, ad quadratum ejus quæ ad tactum intercipitur.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ὧν κέντρον τὸ Ε, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΖ, ΓΖ, καὶ

SINT oppoſitæ ſectiones ΑΒ, ΓΔ, quarum centrum Ε, & ΑΖ, ΖΓ lineæ contingentes; jun-

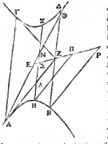
* Per converſum ejus quod demonſtrat *Eutocius* in 44. 1. huj.

† Juncta enim ΖΞ & producta donec cum ΓΜ concurrat in Ν, erit hæc [per 37 & 39 2 huj.] parallela ΓΔ, unde triangula ΔΜΓ, ΖΜΝ ſunt æquiangula: quare ΖΜ eſt ad ΜΝ ut ΔΜ ad ΜΓ. & permutando, componendo, invertendoque, & rurſus permutando ΔΜ erit ad ΜΓ ut ΔΖ ad ΓΝ. eſt autem ΑΖ æqualis ΓΝ, ut modo oſtenſum; eſt igitur ut ΔΜ ad ΜΓ ita ΔΖ ad ΖΑ, & [per 22. 6.] horum quadrata ſunt proportionalia.

Digitized by Google

gantur autem ΑΓ, ΒΖ, ΑΕ, quæ protrahantur; perque Ζ ducatur ΒΖΘΔ ipſi ΑΓ parallela, & ſumpto in ſectione quovis puncto Η ducatur ΗΛΣΝΞ parallela ipſi ΑΓ: dico ut rectangulum ΒΖΔ ad quadratum ex ΖΛ ita eſſe rectangulum ΗΛΞ ad quadratum ex ΑΛ.

ἐπιζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ αἱ ΕΖ, ΑΕ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, ἤχθω δὲ διὰ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΒΖΘΔ, καὶ εἰλήφθω ὃ ἔτυχε σημεῖον τὸ Η, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΗΛΣΝΞ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΛ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ.



Ducantur enim à punctis Η, Β lineæ ΗΠ, ΒΡ parallelæ ipſi ΑΖ. & quoniam [per 19. & 20. 6.] ut quadratum ex ΒΖ ad ΒΖΡ triangulum ita quadratum ex ΗΣ ad triangulum ΗΣΠ, & quadratum ex ΑΣ ad triangulum ΑΣΖ: erit & reliquum rectangulum ΗΛΞ ad quadrilaterum ΗΛΖΠ ut quadratum ex ΒΖ ad triangulum ΒΖΡ. quadratum autem ex ΒΖ æquale eſt rectangulo ΒΖΔ; triangulumque ΒΡΖ [per 11. 3. huj.] triangulo ΑΖΘ, & [per 5. 3. huj.] quadrilaterum ΗΛΖΠ triangulo ΑΛΝ: ergo ut rectangulum ΒΖΔ ad triangulum ΑΖΘ ita ΗΛΞ rectangulum ad triangulum ΑΛΝ. ſed [per 3. lem 3. huj.] ut triangulum ΑΖΘ ad quadratum ex ΑΖ ita triangulum ΑΛΝ ad quadratum ex ΑΛ: ex æquali igitur, ut rectangulum ΒΖΔ ad quadratum ex ΖΑ ita rectangulum ΗΛΞ ad quadratum ex ΑΛ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Η, Β παρὰ τὴν ΑΖ αἱ ΗΠ, ΒΡ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΒΖΡ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΗΣ πρὸς τὸ ΗΣΠ, καὶ τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ΑΣΖ· καὶ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΗΛΞ πρὸς τὸ ΗΛΖΠ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΒΖΡ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΒΖ τῷ ὑπὸ ΒΖΔ, τὸ δὲ ΒΡΖ τρίγωνον τῷ ΑΖΘ, τὸ δὲ ΗΛΖΠ τετράπλευρον τῷ ΑΛΝ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ΑΖΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΞ πρὸς τὸ ΑΛΝ. ὡς δὲ τὸ ΑΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ οὕτως τὸ ΑΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΛΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ.

Prop. XXI. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſi in ſectione duo puncta ſumantur, & per ipſa ducantur rectæ lineæ, una quidem contingenti parallela, altera vero lineæ tactus conjungenti, quæ & ſibi ipſis & ſectionibus occurrant: erit ut rectangulum, contentum lineis quæ interjiciuntur inter occurſum contingentium & ſectiones, ad quadratum contingentis; ita rectangulum, contentum ſegmentis inter ſectiones & rectarum occurſum interjectis, ad rectangulum ſub rectis inter ſectionem & occurſum interjectis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς δύο σημεῖα ληφθῇ, καὶ δι' αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, τέμνουσαι ἀλλήλας τε καὶ τὰς τομάς· ἔσται ὡς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ταῖς τομαῖς περατουμένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετράγωνον, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως.

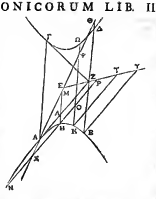
Sint eadem quæ ſupra; & ſumptis in ſectione punctis Η, Κ, per ea ducantur ΝΞΗΟΡ, ΚΤ, ΒΤ ipſi ΑΖ parallelæ, & ΗΛΜ, ΚΟΨΩ parallelæ ipſi ΑΓ: dico ut rectangulum ΒΖΔ ad quadratum ex ΖΑ ita eſſe ΚΟΩ rectangulum ad rectangulum ΝΟΗ.

Quoniam enim eſt [per 3. lem. 3. huj.] ut quadratum ex ΑΖ ad triangulum ΑΖΘ ita quadratum ex ΑΛ ad ΑΛΜ triangulum, & quadratum ex ΞΟ ad triangulum ΞΟΨ, & quadratum ex ΞΗ ad triangulum ΞΗΜ: erit ut totum quadratum ex ΞΟ ad totum triangulum ΞΟΨ ita quadratum ex ΞΗ ablatum ad ablatum triangulum ΞΗΜ: quare [per 19. 5.] & reliquum rectangulum ΝΟΗ ad reliquum quadrilate-

Ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, εἰλήφθω δὲ τὰ Η, Κ σημεῖα, καὶ δι' αὐτῶν ἤχθωσαν παρὰ μὲν τὴν ΑΖ αἱ ΝΞΗΟΡ, ΚΤ, ΒΤ· παρὰ δὲ τὴν ΑΓ αἱ ΗΛΜ, ΚΟΨΩ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΟΩ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΟΗ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΘ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΛ πρὸς τὸ ΑΛΜ, καὶ τὸ ἀπὸ ΞΟ πρὸς τὸ ΞΟΨ, καὶ τὸ ἀπὸ ΞΗ πρὸς τὸ ΞΗΜ· ὡς ἄρα ὅλον τὸ ἀπὸ ΞΟ πρὸς ὅλον τὸ ΞΟΨ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΞΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΞΗΜ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς λοιπὸν τὸ ΗΟΨΜ τετράπλευρόν

ἐστιν



ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΘ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΖΘ τῷ ΒΤΖ, τὸ δὲ ΗΟΨΜ τῷ ΚΟΡΤ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΒΤΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς τὸ ΚΟΡΤ. ὡς δὲ τὸ ΒΤΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΒΖΔ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ΚΟΡΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΟΩ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΟΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΟΩ, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΟΩ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΟΗ.

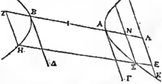
rum ΗΟΨΜ eſt ut quadratum ex ΑΖ ad ΑΖΘ triangulum. ſed [per 11.3.huj.] triangulum ΑΖΘ æquale eſt triangulo ΒΤΖ, & [per 12. 3. huj.] quadrilaterum ΗΟΨΜ quadrilatero ΚΟΡΤ: ergo ut quadratum ex ΑΖ ad triangulum ΒΤΖ ita rectangulum ΝΟΗ ad quadrilaterum ΚΟΡΤ. ut autem triangulum ΒΤΖ ad quadratum ex ΒΖ, hoc eſt ad rectangulum ΒΖΔ, ita demonſtratum eſt [in præced.] quadrilaterum ΚΟΡΤ ad rectangulum ΚΟΩ: ex æquali igitur, ut quadratum ex ΑΖ ad rectangulum ΒΖΔ ita rectangulum ΝΟΗ ad rectangulum ΚΟΩ; & [per 4. 5.] invertendo, ut rectangulum ΒΖΔ ad quadratum ex ΖΑ ita rectangulum ΚΟΩ ad rectangulum ΝΟΗ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ἐπιψαύωσιν, ἀχθῶσι δέ τινες εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς τομάς, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· ἔσται ὡς τοῦ πρὸς τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως.

Prop. XXII. *Theor.*

Si oppoſitas ſectiones contingant duæ rectæ lineæ inter ſe parallelæ; ducantur autem aliæ rectæ, quæ & ſibi ipſis & ſectionibus occurrant, una quidem contingenti parallela, altera vero parallela ei quæ tactus conjungit: erit ut tranſverſum latus ad rectum figuræ, quæ ad lineam tactus conjungentem conſtituitur; ita rectangulum, contentum lineis inter ſectiones & rectarum occurſum interjectis, ad rectangulum ſub rectis inter ſectionem & occurſum interjectis.



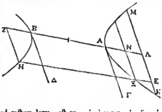
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΔ παράλληλοι ἔστωσαν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, διήχθωσαν δὲ ἡ μὲν ΕΞΗ παρὰ τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ΕΚΛΜ παρὰ τὴν ΑΓ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν τοῦ εἴδους πλευρὰν οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΕΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΕΜ.

Ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Ξ παρὰ τὴν ΑΓ αἱ ΗΖ, ΞΝ. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν παράλληλοί εἰσιν, ἔσται διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, τεταγμένως δὲ ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΚΑ, ΞΝ, ΗΖ· ἔσται δὴ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευρὰν οὕτως τό τε ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ

Sint oppoſitæ ſectiones Α, Β, quas contingant rectæ lineæ ΑΓ, ΒΔ inter ſe parallelæ; & junctâ ΑΒ ducatur ΒΞΗ ipſi ΑΒ parallela, & ΚΒΛΜ parallela ipſi ΑΓ: dico ut ΑΒ ad rectum figuræ latus, ita eſſe ΗΕΞ rectangulum ad rectangulum ΒΕΜ.

Ducantur enim per Η, Ξ rectæ ΗΖ, ΞΝ ipſi ΑΓ parallelæ. & quoniam ΑΓ, ΒΔ parallelæ ſunt inter ſe & ſectiones contingunt, erit [per converſ. 31. 2. huj.] & ΑΒ diameter, & rectæ ΚΑ, ΞΝ, ΗΖ ad ipſam ordinatim applicabuntur: ut igitur ΑΒ ad rectum latus ita [per 21. 1. huj.] ΒΛΑ rectangulum ad quadratum

quadratum ex ΛK, & rectangulum BNΛ ad quadratum ex NΞ, hoc eſt ad quadratum ex ΛE: quare [per 19. 5.] ut totum rectangulum BΛA ad totum quadratum ex KΛ ita erit rectangulum BNΛ ablatum (hoc eſt ZΛN, quia NΛ, BZ æquales ſint) ad ablatum quadratum ex ΛE: reliquum igitur ZΛN rectangulum [per 4. lem. 3. huj.] ad reliquum KEM rectangulum [per 5. 2.] erit ut diameter AB ad rectum latus. eſt autem rectangulum ZΛN æquale ipſi HEΞ; ergo ut AB tranſverſum figuræ latus ad rectum ita HEΞ rectangulum ad rectangulum BEM.



ΛΚ, καὶ τὸ ὑπὸ ΒΝΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΛΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ὅλον τὸ ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΚΛ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΒΝΛ, (τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΛΝ, ἴση γὰρ ἡ ΝΛ τῇ ΒΖ) πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΛΕ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΛΝ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΚΕΜ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΖΛΝ τῷ ὑπὸ ΗΕΞ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ τοῦ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΕΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΕΜ.

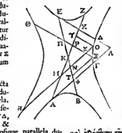
Prop. XXIII. *Theor.*

Si in oppoſitis ſectionibus conjugatis, duæ rectæ lineæ oppoſitas ſectiones contingentes conveniant in quavis ſectionum; ducantur autem aliquæ rectæ contingentibus parallelæ, quæ & ſibi ipſis & alteris ſectionibus oppoſitis occurrant: ut quadrata contingentium inter ſeſe; ita erit rectangulum, contentum rectis quæ inter ſectiones & occurſum interjiciuntur, ad rectangulum quod rectis ſimiliter ſumptis continetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τῶν κατ' ἐναντίον τομῶν ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν ἐπὶ μιᾶς ἧς ἔτυχε τομῆς, ἀχθῶσι δέ τινες παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς ἑτέρας ἀντικειμένας· ἔσται ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

Sint oppoſitæ ſectiones conjugatæ AB, ΓΔ, EZ, HΘ, ſitque earum centrum K; & ſectiones AB, EZ contingant rectæ lineæ AΦΓΛ, EXΔΛ convenientes in Λ, & junctæ AK, EK ad B, Z producantur; à puncto autem H ducatur HMNΞO ipſi AΛ parallela, & à puncto Θ ducatur ΘΠPΞΣ parallela ipſi EΛ: dico ut quadratum ex EΛ ad quadratum ex AΛ ita eſſe ΘΞΣ rectangulum ad rectangulum HΞO.



Ducatur enim per Σ recta ΣT parallela AΛ; & per O ducatur OT ipſi EΛ parallela. quoniam igitur oppoſitarum ſectionum conjugatarum AB, ΓΔ, EZ, HΘ diameter eſt BE, & EΛ ſectionem contingit, ipſique parallela ducta eſt ΘΣ: erit [per 20. 2. huj.] ΘΠ æqualis ΠΣ; & eadem ratione HM æqualis MO. & quoniam ut quadratum ex EΛ ad EΦΛ triangulum ita eſt [per 19. & 20. 6.] quadratum ex ΠΣ ad triangulum ΠTΣ; & quadratum ex ΠΞ ad triangulum ΠNΞ: erit etiam & reliquum rectangulum ſub ΘΞΣ [per 5. 2.] ad quadrilaterum TNΞΣ ut quadratum ex EΛ ad triangulum ΦΛE.

Ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, κέντρον δὲ αὐτῶν τὸ Κ, καὶ τῶν ΑΒ, ΕΖ τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΦΓΛ, ΕΧΔΛ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΕΚ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η παρὰ τὴν ΑΛ ἤχθω ἡ ΗΜΝΞΟ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΕΛ ἡ ΘΠΡΞΣ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Σ παρὰ μὲν τὴν ΑΛ ἡ ΣΤ, παρὰ δὲ τὴν ΕΛ ἀπὸ τοῦ Ο ἡ ΟΤ. ἐπεὶ οὖν συζυγῶν ἀντικειμένων τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ διάμετρός ἐστιν ἡ ΒΕ, καὶ ἐφάπτεται τῆς τομῆς ἡ ΕΛ, καὶ παρ' αὐτὴν ἦκται ἡ ΘΣ, ἴση ἐστὶν ἡ ΘΠ τῇ ΠΣ· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΗΜ τῇ ΜΟ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΕΦΛ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΠΣ πρὸς τὸ ΠΤΣ, καὶ τὸ ἀπὸ ΠΞ πρὸς τὸ ΠΝΞ· καὶ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ΤΝΞΣ τετράπλευρόν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΦΛΕ τρίγωνον.

τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΦΑ τρίγωνον τῷ ΑΛΧ, τὸ δὲ ΤΝΞΣ τετράπλευρον τῷ ΞΡΤΟ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΑΛΧ οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ΞΡΤΟ τετράπλευρον. ἔστι δὲ ὡς τὸ ΑΛΧ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ οὕτως τὸ ΞΡΤΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ.

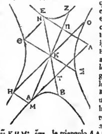
ſed [per 4. 3. huj.] ΕΦΑ triangulum æquale eſt triangulo ΑΛΧ; & [ex 15. 3.huj.] quadrilaterum ΤΝΞΣ quadrilatero ΞΡΤΟ: ut igitur quadratum ex ΕΑ ad ΑΛΧ triangulum ita rectangulum ΘΞΣ ad quadrilaterum ΞΡΤΟ. ut autem triangulum ΑΛΧ ad quadratum ex ΑΛ ita quadrilaterum ΞΡΤΟ ad rectangulum ΗΞΟ [quod ſimiliter probatur atque prius iſtud]: ergo ex æquali, ut quadratum ex ΕΑ ad quadratum ex ΑΛ ita eſt rectangulum ΘΞΣ ad rectangulum ΗΞΟ.

EUTOCIUS.

Τὸ θεώρημα τοῦτο πολλὰς ἔχει πτώσεις, ὥσπερ καὶ τὰ ἄλλα· ἐπειδὴ δὲ ἔν τισιν ἀντιγράφοις ἀντὶ θεωρημάτων πτώσεις εὑρίσκονται καταγεγραμμέναι, καὶ ἄλλως πως ἀποδείξεις, ἀφαιρήσομεν αὐτὰς ἐκεῖθεν. ἵνα δὲ οἱ ἐντυγχάνοντες ἀπὸ τῆς διαφόρου παραδόσεως στοχάζωνται τῆς ἡμετέρας ἐπινοίας, ἐξεθέμεθα ταύτας ἐν τοῖς σχολίοις.

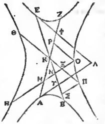
Hoc theorema plures habet caſus, ſicut & alia. verum quoniam in aliquibus exemplaribus loco theorematum caſus inveniuntur deſcripti, & diverſæ quædam demonſtrationes, nobis viſum eſt ipſas auferre. ut autem ii, qui in hæc inciderint, de hac differenti diſpoſitione ſententiam meam perpendere poſſint, eas in commentariis expoſuimus.

Παρήχθωσαν δὴ αἱ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΗΚΟ, ΘΚΣ διὰ τοῦ Κ κέντρου· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ οὕτω τὸ ὑπὸ ΘΚΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΚΟ. ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Θ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΘΝ, ΗΜ· γίνεται δὴ ἴσον τὸ μὲν ΗΚΜ τρίγωνον τῷ ΛΚΤ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΘΝΚ τρίγωνον τῷ ΕΚΠ τριγώνῳ. ἴσον δὲ τὸ ΛΤΚ τῷ ΕΚΠ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΚΜ τῷ ΚΘΝ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΛΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΕΤ τρίγωνον οὕτω τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ΘΚΝ τρίγωνον, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΛΕΤ τρίγωνον ἴσον τῷ ΛΑΠ, τὸ δὲ ΘΚΝ τῷ ΚΗΜ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΠΑ τρίγωνον οὕτω τὸ ἀπὸ ΘΚ πρὸς τὸ ΗΚΜ τρίγωνον. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΛΠΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ οὕτω τὸ ΗΚΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ· καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ οὕτω τὸ ἀπὸ ΚΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΘΚΣ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΗΚΟ.



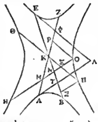
Itaque per centrum Κ tranſeant rectæ ΗΚΟ, ΘΚΣ contingentibus parallelæ: dico ſic quoq; ut quadratum ex ΕΑ ad quadratum ex ΑΛ ita etiam eſſe rectangulum ΘΚΣ ad rectangulum ΗΚΟ. ducantur enim per Η, Θ rectæ ΘΝ, ΗΜ contingentibus parallelæ: erit igitur [per 15.3.huj.] triangulum ΗΚΜ triangulo ΛΚΤ æquale, triangulumq; ΘΝΚ æquale triangulo ΕΚΠ. ſed [per 4.3.huj.] triangulo ΕΚΠ æquale ΛΤΚ triangulum: ergo triangulum ΗΚΜ ipſi ΚΘΝ æquale erit. & quoniam ut quadratum ex ΛΕ ad triangulum ΛΕΤ ita [per 22.6.] quadratum ex ΚΘ ad triangulum ΘΚΝ; atque eſt triangulum ΛΕΤ æquale triangulo ΛΑΠ, triangulum vero ΘΚΝ triangulo ΚΗΜ: ut igitur quadratum ex ΕΑ ad triangulum ΛΠΑ ita quadratum ex ΘΚ ad triangulum ΗΚΜ. eſt vero ut triangulum ΛΠΑ ad quadratum ex ΑΛ ita triangulum ΗΚΜ ad quadratum ex ΗΚ: ergo ex æquali ut quadratum ex ΕΑ ad quadratum ex ΑΛ ita quadtatum ex ΚΘ, hoc eſt rectangulum ΘΚΣ, ad quadratum ex ΗΚ, hoc eſt ad rectangulum ΗΚΟ.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἡ μὲν ΘΚΠ, τουτέστιν ἡ παρὰ τὴν ΕΑ ἀγομένη, διὰ τοῦ Κ κέντρου ἐμπίπτῃ, ἡ δὲ ΗΟ μὴ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ οὕτω τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ. ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Ο, Π ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι αἱ ΟΡ, ΠΣ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΜΟΡ τοῦ ΜΝΚ τριγώνου μεῖζόν ἐστι τῷ ΛΚΤ, τὸ δὲ ΛΚΤ ἴσον τῷ ΚΣΠ· ἴσον ἄρα τὸ ΜΟΡ τοῖς ΜΝΚ, ΚΣΠ τριγώνοις· ὥστε λοιπὸν τὸ ΞΡ τετράπλευρον τῷ ΞΣ τετραπλεύρῳ ἴσον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΚΛΤ



Iiſdem manentibus, ſi recta ΘΚΠ, hoc eſt ipſi ΕΑ parallela, tranſeat per Κ centrum, ΗΟ vero per centrum non tranſeat: dico ſimiliter ut quadratum ex ΕΑ ad quadratum ex ΑΛ ita eſſe rectangulum ΘΞΠ ad rectangulum ΗΞΟ. ducantur enim per Ο, Π contingentibus parallelæ ΟΡ, ΠΣ. quoniam igitur [per 15. 3. huj.] triangulum ΜΟΡ excedit triangulum ΜΝΚ triangulo ΛΚΤ; triangulum autem ΛΚΤ æquale eſt triangulo ΚΣΠ: erit ΜΟΡ triangulum æquale triangulis ΜΝΚ, ΚΣΠ: quare ſublato communi, videlicet triangulo ΜΞΚ, reliquum quadrilaterum ΞΡ quadrilatero ΞΣ eſt æquale. & quoniam [per 22. 6.] eſt ut

quadratum ex ΕΛ ad triangulum ΕΛΤ ita quadratum ex ΠΚ ad triangulum ΚΣΠ, & ita quadratum ex ΚΞ ad triangulum ΚΞΝ: erit [per 19. 5.] ut quadratum ex ΕΛ ad ΕΛΤ triangulum ita reliquum, rectangulum ſcilicet ΘΞΠ, per 5.2^di, ad quadrilaterum ΞΣ. eſt autem triangulo ΕΛΤ æquale triangulum ΑΦΛ, & quadrilaterum ΞΡ quadrilatero ΞΣ: ergo ut quadratum ex ΕΛ ad triangulum ΑΛΦ ita rectangulum ΘΞΠ ad quadrilaterum ΞΣ. ac pari argumento, ut triangulum ΑΛΦ ad quadratum ex ΛΑ ita quadrilaterum ΞΣ ad rectangulum ΗΞΟ: ex æquali igitur ut quadratum ex ΕΛ ad quadratum ex ΛΑ ita rectangulum ΘΞΠ ad rectangulum ΗΞΟ.



τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΠΚ πρὸς τὸ ΚΣΠ, καὶ τὸ ἀπὸ ΚΞ πρὸς τὸ ΚΞΝ τρίγωνον· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΕΛΤ τρίγωνον οὕτω λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ΞΣ τετράπλευρον. καὶ ἔστι τῷ μὲν ΕΛΤ τριγώνῳ ἴσον τὸ ΑΦΛ, τὸ δὲ ΞΡ τετράπλευρον τῷ ΞΣ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΑΛΦ οὕτω τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ΞΣ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ ΑΛΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ οὕτω τὸ ΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ· καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ οὕτω τὸ ὑπὸ ΘΞΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ.

Licet & hoc modo idem demonſtrare.

Si recta ducatur ſectionem ΕΖ contingens in puncto quo eidem occurrit diameter ΑΖ; recta ducta ipſi ΑΤ parallela erit, & eandem rationem habet ad abſciſſam ab ipſa è recta ΕΦ puncto Ε adjacentem, quam habet ΛΑ ad ΛΕ. Eademque erunt reliqua ac in prop. XIX.

Ἔστι δὲ καὶ οὕτως δεῖξαι.

Ἐὰν γὰρ τῆς ΕΖ τομῆς ἀχθῇ ἐπιψαύουσα καθ᾽ ὃ συμβάλλει ἡ ΑΖ διάμετρος τῇ ΕΖ τομῇ, γίνεται παράλληλος ἡ ἀχθεῖσα τῇ ΑΤ, καὶ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν ἀποτεμνομένην ὑπ᾽ αὐτῆς πρὸς τῷ Ε ἀπὸ τῆς ΕΦ, τῷ ὃν ἔχει ἡ ΛΑ πρὸς τὸ ΛΕ. καὶ τὰ λοιπὰ ὅμοια ἔσται τῷ ιθ′.

Prop. XXIV. *Theor.*

Si in oppoſitis ſectionibus conjugatis à centro ad ſectiones ducantur duæ rectæ, quarum una quidem appelletur tranſverſa diameter, altera vero recta; & ducantur aliæ his diametris parallelæ, quæ & ſibi ipſis & ſectionibus occurrant, ita ut occurſus ſit in loco inter quatuor ſectiones intermedio: rectangulum contentum portionibus lineæ diametro tranſverſæ parallelæ, una cum eo ad quod rectangulum ſub portionibus lineæ rectæ diametro parallelæ rationem habet eandem quam diametri rectæ quadratum ad quadratum tranſverſæ, æqnale erit duplo quadrati qnod ſit e dimidia tranſverſæ diametri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ′.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἀπὸ τοῦ κέντρου διαχθῶσι πρὸς τὰς τομὰς δύο εὐθεῖαι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν πλαγία διάμετρος, ἡ δὲ ὀρθία, ἀχθῶσι δέ τινες παρὰ τὰς δύο διαμέτρους συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ ταῖς τομαῖς, ἡ δὲ σύμπτωσις ᾖ ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν τεσσάρων τομῶν· τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, μετὰ τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ ὀρθίᾳ ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.

SINT oppoſitæ ſectiones conjugatæ Α, Β, Γ, Δ, quarum centrum Ε; perque Ε ducantur ΑΕΓ tranſverſa diameter & ΔΕΒ recta; & ducantur ΖΗΘΙΚΛ, ΜΝΞΟΠΡ parallelæ ipſis ΑΓ, ΔΒ, quæ in puncto Ξ conveniant, primum quidem intra angulum ΣΕΦ vel ΥΕΤ: dico rectangulum ΖΞΛ, una cum eo ad quod rectangulum ΜΞΡ rationem habet eandem quam quadratum ex ΔΒ ad quadratum ex ΑΓ, æquale eſſe duplo quadrati ex ΑΕ.

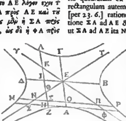
Ducantur enim aſymptoti ſectionum ΣΕΤ, ΥΕΦ; & per Α ducatur ΣΗΑΦ ſectionem con-

ΕΣΤΩΣΑΝ κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, ὧν κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε διήχθωσαν ἥτε ΑΕΓ πλαγία καὶ ἡ ΔΕΒ ὀρθία, καὶ παρὰ τὰς ΑΓ, ΔΒ ἤχθωσαν αἱ ΖΗΘΙΚΛ, ΜΝΞΟΠΡ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ξ, πρῶτον μὲν κατὰ τὰ ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΣΕΦ γωνίας ἢ τῆς ὑπὸ ΥΕΤ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ, μετὰ τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ ΜΞΡ ὃν τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ.

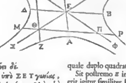
Ἤχθωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΣΕΤ, ΥΕΦ, καὶ διὰ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΣΗΑΦ

Digitized by Google

ΣΗΑΦ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΣΑΦ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΔΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΣΑΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ. τὸ δὲ ὑπὸ ΣΑΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ τῆς ΣΑ πρὸς ΑΕ καὶ τοῦ τῆς ΦΑ πρὸς ΑΕ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΣΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς ΞΘ, ὡς δὲ ἡ ΦΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΠΞ πρὸς ΞΚ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΝΞ πρὸς ΞΘ καὶ τοῦ τῆς ΠΞ πρὸς ΞΚ. σύγκειται δὲ ἐκ τῶν αὐτῶν ὁ τοῦ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΠΜΝ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΡΝΜ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΚΖΘ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΛΘΖ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΡΝΜ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΖ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΠΞΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΡΝΜ τῷ ὑπὸ ΡΞΜ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΡΞΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΖΘ. δεικτέον οὖν ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΑ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ καὶ τοῦ ὑπὸ ΚΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΕΑ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΚΖΘ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΘΖ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΚΖΘ, τουτέστι τῷ ἀπὸ ΑΕ.



Συμπιπτέτωσαν δὴ αἱ ΖΛ, ΜΡ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων κατὰ τὸ Θ. ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ ΖΘΛ τῷ ἀπὸ ΑΕ, καὶ τὸ ὑπὸ ΜΘΡ τῷ ἀπὸ ΔΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΘΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΘΛ· ὥστε τὸ δὶς ὑπὸ ΖΘΛ ἴσον ζητοῦμεν τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ.



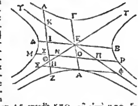
Ἔστω δὲ τὸ Ξ ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΣΕΤ γωνίας, ἢ τῆς ὑπὸ ΦΕΤ· ἔσται δὴ ὁμοίως, διὰ τὴν συναφὴν τῶν λόγων, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ. τῷ δὲ ἀπὸ ΔΞ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΠΜΝ, τουτέστι

tingens. quoniam igitur [per 56. 1. & 1.2.huj.] rectangulum Σ Α Φ æquale eſt quadrato ex Δ Ε; erit ut rectangulum Σ Α Φ ad quadratum ex Ε Α ita quadratum ex Δ Ε ad quadratum ex Ε Α. rectangulum autem Σ Α Φ ad quadratum ex Α Ε [per 23. 6.] rationem habet compoſitam ex ratione Σ Α ad Α Ε & ex ratione Φ Α ad Α Ε. ſed ut Σ Α ad Α Ε ita Ν Ξ ad Ξ Θ; & ut Φ Α ad Α Ε ita Π Ξ ad Ξ Κ: quare ratio quadrati ex Δ Ε ad quadratum ex Α Ε componitur ex ratione Ν Ξ ad Ξ Θ & ratione Π Ξ ad Ξ Κ. ratio autem rectanguli Π Ξ Ν ad rectangulum Κ Ξ Θ [per 23. 6.] compoſita eſt ex iiſdem rationibus: ut igitur quadratum ex Δ Ε ad quadratum ex Α Ε ita rectangulum Π Ξ Ν ad rectangulum Κ Ξ Θ; & propterea [per 12.5.] ut quadratum ex Δ Ε ad quadratum ex Α Ε ita quadratum ex Δ Ε una cum rectangulo Π Ξ Ν ad quadratum ex Α Ε una cum rectangulo Κ Ξ Θ. atqui eſt [per 11.2.huj.] quadratum ex Δ Ε æquale rectangulo Π Μ Ν, hoc eſt rectangulo Ρ Ν Μ; & quadratum ex Α Ε æquale rectangulo Κ Ζ Θ, hoc eſt Λ Θ Ζ. quare ut quadratum ex Δ Ε ad quadratum ex Α Ε ita rectangulum Ρ Ν Μ una cum rectangulo Π Ξ Ν ad rectangulum Λ Θ Ζ una cum rectangulo Κ Ξ Θ. rectangulum autem Π Ξ Ν una cum rectangulo Ρ Ν Μ æquale eſt [per 4.lem.3.huj.] rectangulo Ρ Ξ Μ: ergo ut quadratum ex Δ Ε ad quadratum ex Ε Α ita Ρ Ξ Μ rectangulum ad rectangulum Κ Ξ Θ una cum rectangulo Κ Ζ Θ. itaque demonſtrare oportet rectangulum Ζ Ξ Α una cum rectangulo Κ Ξ Θ & rectangulo Κ Ζ Θ æquale eſſe duplo quadrati ex Ε Α. commune auferatur quadratum ex Α Ε, hoc eſt [per 11.2.huj.] rectangulum Κ Ζ Θ: reliquum igitur, rectangulum nempe Κ Ξ Θ una cum rectangulo Α Ξ Ζ demonſtrandum eſt æquale quadrato ex Α Ε. quod quidem ita ſe habet: nam [per 4. lem. 3. huj.] rectangulum Κ Ξ Θ una cum rectangulo Α Ξ Ζ æquale eſt rectangulo Λ Θ Ζ ſive Κ Ζ Θ, hoc eſt [per 11.2.huj.] quadrato ex Α Ε.

Conveniant deinde Ζ Λ, Μ Ρ in una aſymptotôn ad punctum Θ. æquale autem eſt rectangulum ΖΘΛ quadrato ex Α Ε; & rectangulum Μ Θ Ρ quadrato ex Δ Ε: quare ut quadratum ex Δ Ε ad quadratum ex Ε Α ita rectangulum Μ Θ Ρ ad rectangulum Ζ Θ Λ. & propterea quærimus duplum rectanguli Ζ Θ Λ æquale duplo quadrati ex Α Ε. quod quidem ita eſt.

Sit poſtremo Ξ intra angulum Σ Ε Τ vel Φ Ε Τ: erit igitur ſimiliter [atque in caſ. 1.] per compoſitionem rationum, ut quadratum ex Δ Ξ ad quadratum ex Ε Α ita Π Ξ Ν rectangulum ad rectangulum Κ Ξ Θ. ſed [per 11. 2.huj.] quadrato ex Δ Ξ rectangulum Π Μ Ν, hoc eſt Ρ Ν Μ, eſt æquale;

le; & quadrato ex ΑΕ æquale eſt rectangulum ΛΘΖ: ergo ut rectangulum ΡΝΜ ad rectangulum ΛΘΖ ita ablatum ΠΞΝ rectangulum ad ablatum rectangulum ΚΞΘ: reliquum igitur rectangulum [per 4. lem. 3. huj.] ΡΞΜ ad reliquum, videlicet ad exceſſum quo quadratum ex ΑΕ excedit rectangulum ΚΞΘ, eſt ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ: itaque demonſtrare oportet rectangulum ΖΞΛ una cum exceſſu quo quadratum ex ΑΕ excedit ΚΞΘ rectangulum, æquale eſſe duplo quadrati ex ΑΕ. commune auferatur quadratum ex ΑΕ, hoc eſt [ut hactenus oſtenſum] rectangulum ΖΘΛ: ergo reliquum, nempe rectangulum [per 4. lem. 3. huj.] ΚΞΘ, una cum exceſſu quo quadratum ex ΑΕ excedit rectangulum ΚΞΘ, demonſtrandum eſt quadrato ex ΑΕ æquale eſſe. quod quidem ita eſt: nam minus, nempe rectangulum ΚΞΘ, una cum exceſſu eſt æquale majori, videlicet quadrato ex ΑΕ.



τὸ ὑπὸ ΡΝΜ, τῷ δὲ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΛΘΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΡΝΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΖ οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΚΞΘ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΡΞΜ πρὸς λοιπὴν τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ. δεικτέον ἄρα, ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ προσλαβὸν τὴν ὑπεροχὴν ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΘΛ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τῆς ὑπεροχῆς ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ ΑΕ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ἔλασσον τὸ ὑπὸ ΚΞΘ προσλαβὸν τὴν ὑπεροχὴν ἴσον ἐστὶ τῷ μείζονι τῷ ἀπὸ ΑΕ.

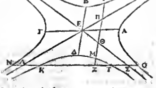
Prop. XXV. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſit rectarum ipſis ΑΓ, ΒΔ parallelarum occurſus intra unam ſectionum Β, Δ, atque, ut ſupponitur, in puncto Ξ: dico rectangulum contentum portionibus ejus quæ tranſverſæ diametro parallela eſt, videlicet ΟΞΝ, majus eſſe quam illud ad quod rectangulum ſub portionibus lineæ rectæ diametro parallelæ, ſive ad ΡΞΜ, eandem rationem habet quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſverſæ, duplo quadrati è dimidia tranſverſæ diametri.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἔστω ἡ σύμπτωσις τῶν παραλλήλων ταῖς ΑΓ, ΒΔ ἐντὸς μιᾶς τῶν Β, Δ τομῶν, ὡς ὑπόκειται, κατὰ τὸ Ξ· λέγω ὅτι τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΟΞΝ, τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ ὀρθίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΡΞΜ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας, μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.

EST enim propter eandem rationem [atque in præc.] ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ ita rectangulum ΠΞΘ ad rectangulum ΣΞΛ. quadratum autem ex ΔΕ æquale eſt [per 11. 2. huj.] rectangulo ΠΜΘ; & quadratum ex ΑΕ æquale rectangulo ΛΟΣ: ergo ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ ita ΠΜΘ rectangulum ad rectangulum ΛΟΣ. itaque quoniam ut totum rectangulum ΠΞΘ ad totum ΛΞΣ ita ablatum rectangulum ΠΜΘ ad ablatum ΛΟΣ, hoc eſt ad ΣΤΛ; erit & reliquum [per 4. lem. 3. huj.] ΡΞΜ ad reliquum [per 4. lem. part. ult.] ΤΞΚ ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ. oſtendere



ΔΙΑ γὰρ τὰ αὐτά ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΠΞΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΣΞΛ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΠΜΘ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΕ τῷ ὑπὸ ΛΟΣ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΠΜΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΟΣ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ὑπὸ ΠΞΘ πρὸς ὅλον τὸ ὑπὸ ΛΞΣ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΠΜΘ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΛΟΣ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΣΤΛ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΡΞΜ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΤΞΚ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ. δεικτέον ἄρα ὅτι τὸ ὑπὸ ΟΞΝ

Digitized by Google

ΟΞΝ τοῦ ὑπὸ ΤΞΚ μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ ΤΞΚ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον ὅτι τὸ ὑπὸ ΟΤΝ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ.

igitur oportet rectangulum ΟΞΝ majus eſſe quam rectangulum ΤΞΚ duplo quadrati ex ΑΕ. commune auferatur ΤΞΚ: reliquum ergo, nempe [per 4. lem.part.ult.] rectangulum ΟΤΝ, oſtendendum æquale eſſe duplo quadrati ex ΑΕ. quod quidem [per 23. 2. huj.] ita ſe habet.

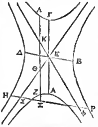
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛʹ.

Ἐὰν ἡ κατὰ τὸ Ξ σύμπτωσις τῶν παραλλήλων ἐντὸς ᾖ μιᾶς τῶν Α, Γ τομῶν, ὡς ὑπόκειται· τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΞΖ, ᾧ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ τῆς ἑτέρας τῶν τμημάτων, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΡΞΗ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας, ἔλασσον ἔσται τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.

Prop. XXVI. *Theor.*

Quod ſi parallelarum occurſus ad punctum Ξ ſit intra unam ſectionum Α, Γ, ut poſitum eſt: rectangulum quod continetur ſub portionibus lineæ parallelæ tranſverſæ diametro, hoc eſt ΑΞΖ, minus erit quam illud ad quod rectangulum portionibus alterius lineæ contentum, ſive ΡΞΗ, eandem rationem habet quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſverſæ, duplo quadrati ejus quod à dimidia tranſverſæ diametri conſtitnitur.

Ἐπεὶ γὰρ, διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΦΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ ΡΞΗ λόγον ἔχει πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ τὸν τοῦ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας. δεικτέον ἄρα ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΞΖ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ ἔλασσόν ἐστι τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΞΖ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ ἔλασσόν ἐστι τῷ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΛΘΖ. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ὑπὸ ΛΘΖ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΑΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΚΞΘ.



Quoniam enim, propter eadem quæ prius [in 24.3.huj.] dicta ſunt, ut quadratum ex ΔΕ ad quadratum ex ΕΑ ita eſt ΦΞΣ rectangulum ad rectangulum ΚΞΘ: habebit [per 12.5.] totum rectangulum ΡΞΗ ad rectangulum ΚΞΘ una cum quadrato ex ΑΕ rationem eandem quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſverſæ. ergo demonſtrare oportet rectangulum ΑΞΖ minus eſſe quam rectangulum ΚΞΘ una cum quadrato ex ΑΕ duplo quadrati ex ΑΕ. commune auferatur quadratum ex ΑΕ: reliquum igitur, nempe rectangulum ΑΞΖ, minus eſſe quam ΚΞΘ quadrato ex ΑΕ, hoc eſt [per 11.2.huj.] rectangulo ΛΘΖ, demonſtrandum reſtat. quod quidem ita ſe habet: nam [per 4. lem.3.huj.] rectangulum ΛΘΖ una cum ΑΞΖ æquale eſt rectangulo ΚΞΘ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζʹ.

Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας συζυγεῖς διάμετροι ἀχθῶσι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν ὀρθία, ἡ δὲ πλαγία, καὶ παρ' αὐτὰς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ τῇ γραμμῇ· τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς γραμμῆς τετράγωνα, προσλαβόντα τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν, ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς γραμμῆς, ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εἴδη τῷ ὑποκειμένῳ εἴδει πρὸς τῇ ὀρθίᾳ διαμέτρῳ, ἴσα ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς πλαγίας διαμέτρου τετραγώνῳ.

Prop. XXVII. *Theor.*

Si in ellipſi vel circuli circumferentia conjugatæ diametri ducantur, quarum altera quidem ſit recta, altera vero tranſverſa; & ducantur duæ rectæ lineæ diametris parallelæ, quæ & ſibi ipſis & ſectioni occurrant: quadrata è portionibus lineæ tranſverſæ diametro parallelæ, quæ inter ſectionem & linearum occurſum interjiciuntur, una cum figuris ex portionibus lineæ rectæ diametro parallelæ inter ductarum occurſum & ſectionem interjectis, ſimilibus & ſimiliter deſcriptis ei quæ ad rectam diametrum conſtituitur, quadrato tranſverſæ diametri æqualia erunt.

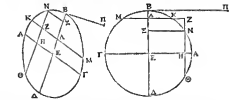
Digitized by Google

SIT ellipſis vel circuli circumferentia A B Γ Δ, cujus centrum E; ducanturque ipſius duæ conjugatæ diametri, recta quidem A E Γ, tranſverſa vero B E Δ; & ducantur K Z Λ M, N Z H Θ, quæ ipſis A Γ, B Δ æquidiſtent: dico quadrata ex N Z, Z Θ, una cum figuris ex K Z, Z M ſimilibus & ſimiliter deſcriptis ei quæ fit ad A Γ, quadrato ex B Δ æqualia eſſe.

Ducatur enim à puncto N recta N Ξ parallela A E; ergo ad B Δ ordinatim applicata erit. & B Π ſit rectum figuræ latus. quoniam igitur ut B Π ad A Γ ita eſt A Γ ad B Δ; erit [per 20. & 22. 6.] ut B Π ad B Δ ita quadratum ex A Γ ad quadratum ex B Δ. quadratum autem ex B Δ [per 17.6. & 15. 1. huj.] eſt æquale figuræ quæ ad A Γ conſtituitur: ergo ut B Π ad B Δ ita quadratum ex A Γ ad figuram quæ eſt ad A Γ. ſed [per 22. 6.] ut quadratum ex A Γ ad figuram quæ ad A Γ ita quadratum ex N Ξ ad figuram quæ fit ex N Ξ ſimilem ei quæ ad A Γ: ergo ut Π B ad B Δ ita quadratum ex N Ξ ad figuram quæ fit ex N Ξ ſimilem ei quæ ad A Γ. eſt autem [per 21. 1. huj.] & ut Π B ad B Δ ita quadratum ex N Ξ ad rectangulum B Ξ Δ: quare [per 9. 5.] figura quæ fit ex N Ξ, hoc eſt ex Z Λ, ſimilis ei quæ ad A Γ, rectangulo B Ξ Δ eſt æqualis. eodem modo demonſtrahimus figuram quæ fit ex K Λ ſimilem illi quæ ad A Γ rectangulo B Λ Δ æqualem eſſe. & quoniam recta linea N Θ ſecatur in partes æquales in H & in partes inæquales in Z; quadrata ex Θ Z, Z N [per 9. 2.] dupla ſunt quadratorum ex Θ N, H Z, hoc eſt ex N H, H Z. eadem quoque ratione quadrata ex M Z, Z K quadratorum ex K Λ, Λ Z ſunt dupla; & [per 22. 6.] figuræ quæ fiunt ex M Z, Z K ſimiles ei quæ ad A Γ duplæ ſunt figurarum ſimilium quæ ex K Λ, Λ Z. figuræ autem quæ fiunt ex K Λ, Λ Z rectangulis B Λ Δ, B Ξ Δ [ut modo oſtenſum] ſunt æquales; & quadrata ex N N, N Z æqualia ſunt quadratis ex Ξ E, B Λ: ergo quadrata ex N Z, Z Θ, una cum figuris ex K Z, Z M ſimilibus ei quæ ad A Γ, dupla ſunt rectangulorum B Ξ Δ, B Λ Δ & quadratorum ex Ξ E, B Λ. itaque quoniam recta B Δ ſecatur in partes æquales in E & in inæquales in Ξ, rectangulum B Ξ Δ [per 5. 2.] una cum quadrato ex Ξ B æquale eſt quadrato ex B E: ſimiliter & rectangulum B Λ Δ una cum quadrato ex Λ E æquale eſt quadrato ex B E: quare rectangula B Ξ Δ,

ΕΣΤΩ γὰρ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓΔ, ἧς κέντρον τὸ Ε, καὶ ἤχθωσαν αὐτῆς δύο συζυγεῖς διάμετροι, ὀρθία μὲν ἡ ΑΕΓ, πλαγία δὲ ἡ ΒΕΔ, καὶ παρὰ τὰς ΑΓ, ΒΔ ἤχθωσαν αἱ ΚΖΛΜ, ΝΖΗΘ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΝΖ, ΖΘ τετράγωνα, προσλαβόντα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΖ, ΖΜ εἴδη ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ν παρὰ τὴν ΑΕ ἡ ΝΞ· τεταγμένως ἄρα κατῆκται ἐπὶ τὴν ΒΔ. καὶ ἔστω ὀρθία ἡ ΒΠ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΒΠ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΒΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΠ πρὸς ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ. τὸ δὲ ἀπὸ ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΠ πρὸς ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ εἶδος. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ εἶδος οὕτω τὸ ἀπὸ ΝΞ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΝΞ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΝΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΞΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος (τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΛ) ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει, τῷ ὑπὸ ΒΞΔ. ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι τὸ ἀπὸ ΚΛ εἶδος, ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει, ἴσον τῷ ὑπὸ ΒΛΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΝΘ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ, τὰ ἀπὸ τῶν ΘΖ, ΖΝ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΘΗ, ΗΖ, τουτέστι τῶν ἀπὸ ΝΗ, ΗΖ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ ἀπὸ ΜΖ, ΖΚ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΚΛ, ΛΖ τετραγώνων, καὶ τὰ ἀπὸ ΜΖ, ΖΚ εἴδη (ὅμοια τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει) διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΚΛ, ΛΖ ὁμοίων εἰδῶν. ἴσα δέ ἐστι τὰ μὲν ἀπὸ ΚΛ, ΛΖ εἴδη τοῖς ὑπὸ ΒΛΔ, ΒΞΔ, τὰ δὲ ἀπὸ ΝΗ, ΗΖ τετράγωνα τοῖς ἀπὸ ΞΕ, ΕΛ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖ, ΖΘ τετράγωνα μετὰ τῶν ἀπὸ ΚΖ, ΖΜ εἰδῶν (ὁμοίων τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει) διπλάσιά ἐστι τῶν ὑπὸ ΒΞΔ, ΒΛΔ καὶ τῶν ἀπὸ ΞΕ, ΕΛ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΔ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ξ, τὸ ὑπὸ ΒΞΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΞΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ. ὁμοίως δὴ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΛΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΛΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ· * ὥστε τὰ ὑπὸ ΒΞΔ καὶ ὑπὸ ΒΛΔ καὶ τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΛΕ ἴσα



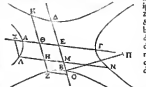
* Vide Lemma quintum *Pappi* in hunc librum.

ἐπὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΒΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖ, ΖΘ τετράγωνα μετὰ τῶν ἀπὸ ΚΖ, ΖΜ εἰδῶν (ὁμοίων τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει) διπλάσιά ἐστι τοῦ δὶς ἀπὸ ΒΕ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΒΔ διπλάσιον τοῦ δὶς ἀπὸ ΒΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖ, ΖΘ τετράγωνα, προσλαβόντα τὰ ἀπὸ ΚΖ, ΖΜ εἴδη ὅμοια τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει, ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις συζυγεῖς διάμετροι ἀχθῶσι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν ὀρθία, ἡ δὲ πλαγία, ἀχθῶσι δὲ παρ' αὐτὰς δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ ταῖς τομαῖς· τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν, ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν, τετράγωνα πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν, ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν, τετράγωνα λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας.

ΕΣΤΩΣΑΝ κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ὀρθία μὲν ἡ ΑΕΓ, πλαγία δὲ ἡ ΒΕΔ, καὶ παρ' αὐτὰς ἤχθωσαν αἱ ΖΗΘΚ, ΛΗΜΝ τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς τομάς· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΛΗ, ΗΝ τετράγωνα πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗ, ΗΚ λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.



Ηχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Ζ τεταγμένως αἱ ΑΞ, ΖΟ· παράλληλοι ἄρα εἰσὶ ταῖς ΑΓ, ΒΔ. ἀπὸ δὲ τοῦ Β ἤχθω ἡ ὀρθία τῆς ΒΔ ἡ ΒΠ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, καὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ, καὶ τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΟΔ, καὶ τὸ ὑπὸ ΓΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΞΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΟΖ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΕΘ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΟΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΑΞ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΜΕ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΓΞΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΞΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΟΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΟΕ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ οὕτως τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΕΘ πρὸς τὰ ἀπὸ ΟΕ, ΕΜ, τουτέστι τὰ ἀπὸ ΛΜ, ΜΗ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΘ, ΘΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ ΛΜ,

ΒΑΔ & quadrata ex ΞΕ, ΑΕ æqualia ſunt duplo quadrati ex ΒΕ: quadrata igitur ex ΝΖ, ΖΘ, una cum figuris ex ΚΖ, ΖΜ ſimilibus ei quæ ad ΑΓ, dupli quadrati ex ΒΕ ſunt dupla. atqui quadratum ex ΒΔ duplum eſt dupli quadrati ex ΒΕ: ergo quadrata ex ΝΖ, ΖΘ una cum figuris ex ΚΖ, ΖΜ ſimilibus ei quæ ad ΑΓ, quadrato ex ΒΔ æqualia erunt.

Prop. XXVIII. *Theor.*

Si in oppoſitis ſectionibus conjugatis diametri conjugatæ ducantur, quarum altera recta ſit, altera tranſverſa; & ducantur duæ rectæ lineæ diametris parallelæ, quæ & ſibi ipſis & ſectionibus occurrant: quadrata ex portionibus lineæ rectæ diametro parallelæ, quæ inter linearum occurſum & ſectiones interjiciuntur, ad quadrata ex portionibus alterius lineæ, quæ tranſverſæ diametro æquidiſtat, inter ſectiones & occurſum linearum interjectis, eandem rationem habent quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſverſæ.

SINT oppoſitæ ſectiones conjugatæ ΑΒ, ΓΔ, quarum diameter quidem recta ſit ΑΕΓ, tranſverſa vero ΒΕΔ: & ipſis parallelæ ducantur ΖΗΘΚ, ΛΗΜΝ, quæ & ſibi ipſis & ſectionibus occurrant. dico quadrata ex ΛΗ, ΗΝ ad quadrata ex ΖΗ, ΗΚ eandem rationem habere quam quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΔ.

A punctis enim Α, Ζ ordinatim applicentur ΑΞ, ΖΟ, quæ parallelæ erunt diametris ΑΓ, ΒΔ. & à puncto Β ducatur ipſius ΒΔ rectum latus ΒΠ: itaque conſtat [per 20. 6.] ut ΠΒ ad ΒΔ ita eſſe quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΔ, & [per 15. 5.] quadratum ex ΑΕ ad quadratum ex ΕΒ; & [per 21. 1. huj.] quadratum ex ΖΟ ad ad rectangulum ΒΟΔ; & rectangulum ΓΞΑ ad quadratum ex ΑΞ: eſt igitur [per 12. 5.] ſicut unum antecedentium ad unum conſequentium ita antecedentia omnia ad omnia conſequentia: quare ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΔ ita rectangulum ΓΞΑ una cum quadrato ex ΑΕ & quadrato ex ΟΖ, hoc eſt quadrato ex ΕΘ, ad rectangulum ΔΟΒ una cum quadrato ex ΒΕ & quadrato ex ΑΞ, hoc eſt quadrato ex ΜΕ. ſed [per 6.2.] rectangulum ΓΞΑ una cum quadrato ex ΑΕ æquale eſt quadrato ex ΞΕ, & rectangulum ΔΟΒ una cum quadrato ex ΒΕ æquale quadrato ΟΕ: ergo ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΔ ita ſunt quadrata ex ΞΕ, ΕΘ ad quadrata ex ΟΕ, ΕΜ, hoc eſt quadrata ex ΛΜ, ΜΗ ad quadrata ex ΖΘ, ΘΗ. quadratorum autem ex ΛΜ, ΜΗ

MH dupla ſunt quadrata ex ΛH, HN, ut [ad 9. 2.] demonſtratum eſt; & quadratorum ex ZΘ, ΘH quadrata ex ZH, HK ſunt dupla: ut igitur quadratum ex ΛΓ ad quadratum ex BΔ ita quadrata ex ΛH, HN ad quadrata ex ZH, HK.

MH διπλάσια τὰ ἀπὸ ΛΗ, ΗΝ, ὡς δέδεικται· τῶν δὲ ἀπὸ ΖΘ, ΘΗ τὰ ἀπὸ ΖΗ, ΗΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ οὕτως τὰ ἀπὸ ΛΗ, ΗΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗ, ΗΚ.

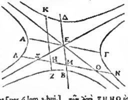
Prop. XXIX. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſi linea rectæ diametro parallela ſecet aſymptotos: quadrata ex portionibus ipſius quæ inter linearum occurſum & aſymptotos interjiciuntur, una cum dimidio quadrati facti è recta diametro, ad quadrata ex portionibus ejus quæ tranſverſæ diametro æquidiſtat inter occurſum linearum & ſectiones interjectis, eandem rationem habent quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſverſæ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων, ἐὰν ἡ τῇ ὀρθίᾳ παράλληλος τέμνῃ τὰς ἀσυμπτώτους· τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν, ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν ἀσυμπτώτων, προσλαβόντα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετραγώνου, πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων, ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν, τετράγωνα λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον.

Sint eadem quæ ſupra, & recta ΛN ſecet aſymptotos in punctis Ξ, O; demonſtrandum eſt quadrata ex ΞH, HO, una cum dimidio quadrati ex ΑΓ (hoc eſt duplo quadrati ex EA, hoc eſt [per 10.2.huj.] duplo rectanguli ΛΞN) ad quadrata ex ZH, HK eandem rationem habere quam quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex BΔ.



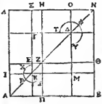
ᵃQuoniam enim ΛΞ [per 16.2.huj.] æqualis eſt ON, quadrata ex ΛH, HN ſuperant [per 6.lem.3.huj.] quadrata ex ΞH, HO duplo rectanguli ΛΞN: ergo quadrata ex ΞH, HO una cum duplo quadrati ex AE æqualia ſunt quadratis ex ΛH, HN. ſed [per 28. 3.huj.] quadrata ex ΛH, HN ad quadrata ex ZH, HK eandem habent rationem quam quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex BΔ: quadrata igitur ex ΞH, HO una cum duplo quadrati ex EA ad quadrata ex ZH, HK eandem rationem habent quam quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex BΔ.

Ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, ἡ δὲ ΛΝ τεμνέτω τὰς ἀσυμπτώτους κατὰ τὰ Ξ, Ο· δεικτέον ὅτι τὰ ἀπὸ ΞΗ, ΗΟ, προσλαβόντα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ ΑΓ (τουτέστι τὸ δὶς ἀπὸ ΕΑ, τουτέστι τὸ δὶς ὑπὸ ΛΞΝ) πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗ, ΗΚ λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.

ᵃ Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΟΝ, τὰ ἀπὸ τῶν ΛΗ, ΗΝ τῶν ἀπὸ ΞΗ, ΗΟ ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ ΛΞΝ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΞΗ, ΗΟ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΑΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΛΗ, ΗΝ. τὰ δὲ ἀπὸ ΛΗ, ΗΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗ, ΗΚ λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ· καὶ τὰ ἀπὸ ΞΗ, ΗΟ ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΕΑ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗ, ΗΚ λόγον ἔχει ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.

EUTOCIUS.

ᵃQuoniam enim ΛΞ æqualis eſt ON; quadrata ex ΛH, HN ſuperant quadrata ex ΞH, HO, duplo rectanguli ΛΞN. *] Sit recta linea ΛN, auferanturque ab ipſa æquales ΛΞ, NO, & figura deſcribatur. manifeſtum eſt, ob ſimilitudinem & propterea quod ΛΞ eſt æqualis ipſi ON, quadrata ΛΓ, ΔN, ΛK, MB inter ſe æqualia eſſe. quoniam igitur quadrata quæ fiunt ex ΛH, HN ſunt quadrata ΛZ, ZN, & quæ ex HΞ, HO ſunt KZ, ZΔ; ſequitur quod quadrata ex ΛN, NN ſuperant quadrata ex ΞN, HO gnomonibus ΣPX, TΦY. & quoniam rectangulum HΔ eſt æquale rectangulo MΠ, & rectangulum EI ipſi MΘ; erunt gnomones ΣPX, TΦY æquales rectangulis ΛM, ΔB. ſed ΛM eſt æquale ΛΛ,



ᵃ Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΟΝ, τὰ ἀπὸ ΛΗ, ΗΝ τῶν ἀπὸ ΞΗ, ΗΟ ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ ΛΞΝ.] Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΛΝ, καὶ ἀφῃρήσθωσαν ἀπ' αὐτῆς ἴσαι αἱ ΛΞ, ΝΟ, καὶ γεγράφθω τὸ σχῆμα. φανερὸν δὴ ὅτι διὰ τὸ ὁμοιότητος καὶ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΛΞ τῇ ΟΝ, τὰ ΛΓ, ΝΔ, ΛΚ, ΜΒ τετράγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. ἐπεὶ οὖν τὰ ἀπὸ ΛΗ, ΗΝ τὰ ΛΖ, ΖΝ ἐστίν, τὰ δὲ ἀπὸ ΞΗ, ΗΟ ἐστὶ τὰ ΚΖ, ΖΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΛΗ, ΗΝ τῶν ἀπὸ ΞΗ, ΗΟ ὑπερέχει τοῖς ΣΡΧ, ΤΦΥ γνώμοσι. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΔ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΒΙ τῷ ΜΘ, οἱ ΣΡΧ, ΤΦΥ γνώμονες ἴσοι εἰσὶ τοῖς ΛΜ καὶ τῷ ΔΒ. τὸ δὲ ΛΜ τῷ ΛΔ ἴσον, καὶ τὰ ΔΛ, ΔΒ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς

* Vide aliam hujus rei demonſtrationem ad VI. *Pappi* Lemma.

Digitized by Google

δὶς ὑπὸ ΑΞΝ, τουτέστι ὑπὸ ΑΘΝ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΝ, τουτέστι τὰ ΑΖ, ΖΝ, τῶν ἀπὸ ΞΗ, ΗΘ, τουτέστι τῶν ΚΖ, ΖΔ, ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ ΑΞΝ, ἴσοι τοῖς ΑΔ, ΔΒ ὀρθογωνίοις.

& rectangula ΔΑ, ΔΒ ſimul ſunt dupla contenti ſub ΑΞΝ, hoc eſt ſub ΑΘΝ. ergo quadrata ex ΑΗ, ΗΝ, hoc eſt ΑΖ, ΖΝ, ſuperant quadrata ex ΞΗ, ΗΘ, hoc eſt ΚΖ, ΖΔ, duplo rectanguli ΑΞΝ, hoc eſt rectangulis ΑΔ, ΔΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λʹ.

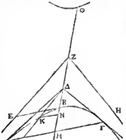
Ἐὰν ὑπερβολῆς δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων, τέμνουσα τήν τε τομὴν καὶ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· ἡ μεταξὺ τῆς συμπτώσεως καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς.

Prop. XXX. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ hyperbolam contingentes ſibi ipſis occurrant, & per tactus recta producatur; per occurſum vero ducatur recta uni aſymptoton parallela, & ſectionem & rectam conjungentem tactus ſecans: quæ interjicitur inter occurſum & rectam tactus conjungentem à ſectione bifariam dividetur.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ ἐφαπτόμεναι μὲν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΖΕ ἤχθω ἡ ΔΚΛ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΛ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΖΔΒΜ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ κείσθω τῇ ΒΖ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ διὰ τῶν Β, Κ σημείων παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθωσαν αἱ ΒΕ, ΚΝ· τεταγμένως ἄρα κατηγμέναι εἰσί. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΖΕΒ τρίγωνον τῷ ΔΚΝ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ' ὡς ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΘΝΒ τῷ ἀπὸ ΔΝ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΖΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΖΒ, διότι ἡ μὲν ΑΔ ἐφάπτεται, ἡ δὲ ΑΜ κατῆκται· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ΘΝΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΖΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΝ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΝΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΝ· καὶ τὸ ὑπὸ ΜΖΔ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΝ· * ἡ ἄρα ΔΜ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ν, προσκειμένην ἔχουσα τὴν ΔΖ. καὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ ΚΝ, ΛΜ· ἴση ἄρα ἡ ΔΚ τῇ ΚΛ.



SIT hyperbola ΑΒΓ, quam contingant rectæ lineæ ΑΔ, ΔΓ; aſymptoti vero ſint ΕΖ, ΖΗ; & juncta ΑΓ, ducatur per Δ recta ΔΚΛ parallela ipſi ΖΕ: dico ΔΚ ipſi ΚΛ æqualem eſſe.

Jungatur enim ΖΔΒΜ & ex utraque parte producatur, ut ſit ΖΘ æqualis ipſi ΒΖ; & per Β, Κ ducantur ΒΕ, ΚΝ parallelæ ipſi ΑΓ, quæ ordinatim applicatæ erunt. & quoniam triangulum ΖΕΒ ſimile eſt [per 4. 6.] triangulo ΔΚΝ; erit [per 22.6.] ut quadratum ex ΔΝ ad quadratum ex ΝΚ ita quadratum ex ΒΖ ad quadratum ex ΒΕ. ut autem quadratum ex ΒΖ ad quadratum ex ΒΕ ita [ex 1 2. huj.] eſt ΘΒ ad rectum latus: quare ut quadratum ex ΔΝ ad quadratum ex ΝΚ ita ΘΒ ad rectum latus. ſed [per 21.1.huj.] ut ΘΒ ad rectum latus ita rectangulum ΘΝΒ ad quadratum ex ΝΚ: ut igitur quadratum ex ΔΝ ad quadratum ex ΝΚ ita ΘΝΒ rectangulum ad quadratum ex ΝΚ: ergo [per 9. 5.] rectangulum ΘΝΒ quadrato ex ΔΝ eſt æquale. eſt autem [per 37.1.huj.] rectangulum ΜΖΔ æquale quadrato ex ΖΒ, propterea quod recta ΑΔ ſectionem contingit, & ΑΜ ordinatim eſt applicata: quare rectangulum ΘΝΒ una cum quadrato ex ΖΒ æquale eſt rectangulo ΜΖΔ una cum quadrato ex ΔΝ. ſed [per 6.2.] rectangulum ΘΝΒ una cum quadrato ex ΖΒ eſt æquale quadrato ex ΖΝ: ergo & rectangulum ΜΖΔ una cum quadrato ex ΔΝ æquale eſt quadrato ex ΖΝ: * & idcirco [per conv. 6. 2.] recta ΔΜ ad punctum Ν bifariam ſecatur, adjunctam habens ΔΖ. & parallelæ ſunt ΚΝ, ΛΜ; recta igitur ΔΚ [per 2.6.] ipſi ΚΛ eſt æqualis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λαʹ.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ,

Prop. XXXI. *Theor.*

Si duæ rectæ oppoſitas ſectiones contingentes ſibi ipſis occurrant, & per

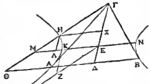
* Hic locum habet Lemma ſeptimum Pappi.

tactus recta producatur; per occurſum vero ducatur recta aſymptoto parallela, quæ ſectionem & rectam tactus conjungentem ſecet: recta, inter occurſum & eam quæ tactus conjungit interjecta, à ſectione bifariam dividetur.

διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως ἀχθῆ εὐθεῖα παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον, τέμνουσα τήν τε τομὴν καὶ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· ἡ μεταξὺ τῆς συμπτώσεως καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς.

SINT oppoſitæ ſectiones Α, Β, & rectæ contingentes ΑΓ, ΓΒ, junctaque ΑΒ producatur; aſymptotos vero ſit ΖΕ, & per Γ ducatur ΓΗΘ ipſi ΖΕ parallela: dico ΓΗ æqualem eſſe ipſi ΗΘ.

Jungatur enim ΓΕ, & ad Δ producatur: & per Ε, Η ducantur ΝΕΚΜ, ΗΞ ipſi ΑΒ parallelæ, & per Κ, Η ducantur ΚΖ, ΗΛ parallelæ ΓΔ. quoniam igitur triangulum ΚΖΕ ſimile eſt [per 4. 6.] triangulo ΜΛΗ, ut quadratum ex ΕΚ ad quadratum ex ΚΖ ita [per 22. 6.] quadratum ex ΜΛ ad quadratum ex ΛΗ. ſed ut quadratum ex ΕΚ ad quadratum ex ΚΖ, ita demonſtratum eſt [in antec.] ΝΛΚ rectangulum ad quadratum ex ΛΗ: ergo rectangulum ΝΛΚ quadrato ex ΜΛ eſt æquale. commune apponatur quadratum ex ΚΕ: rectangulum igitur ΝΛΚ una cum quadrato ex ΚΕ, hoc eſt [per 6. 2.] quadratum ex ΛΕ, hoc eſt quadratum ex ΗΞ, æquale eſt quadratis ex ΜΛ, ΚΕ. ut autem quadratum ex ΗΞ ad quadrata ex ΜΛ, ΚΕ ita quadratum ex ΞΓ ad quadrata ex ΛΗ, ΚΖ, [propter ſimilitudinem triangulorum ΓΞΗ, ΗΛΜ, ΖΚΕ.] ex quibus ſequitur quadratum ex ΞΓ æquale eſſe quadratis ex ΗΛ, ΚΖ. atqui quadratum ex ΗΛ æquale eſt quadrato ex ΞΕ; & [per 1.2.huj.] quadratum ex ΚΖ æquale quadrato ex dimidio ſecundæ diametri, hoc eſt [per 38. 1. huj.] rectangulo ΓΕΔ: quadratum igitur ex ΓΞ quadrato ex ΞΕ & rectangulo ΓΕΔ ſimul eſt æquale: * ac propterea [per converſ. 5. 2.] recta ΓΔ in partes quidem æquales ſecatur ad punctum Ξ, in partes vero inæquales ad Ε. & ΔΘ parallela eſt ipſi ΗΞ; ergo [per 2. 6.] ΓΗ ipſi ΗΘ æqualis erit.



ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΒ ἐκβεβλήσθω, ἀσύμπτωτος δὲ ἔστω ἡ ΖΕ, καὶ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΖΕ ἤχθω ἡ ΓΗΘ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΗΘ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ διὰ τῶν Ε, Η παρὰ τὴν ΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΝΕΚΜ, ΗΞ, διὰ δὲ τῶν Κ, Η παρὰ τὴν ΓΔ αἱ ΚΖ, ΗΛ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΖΕ τρίγωνον τῷ ΜΛΗ, ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ δέδεικται τὸ ὑπὸ ΝΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΛΚ τῷ ἀπὸ ΜΛ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΚΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΝΛΚ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΚΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΛΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΗΞ, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΜΛ, ΚΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΗΞ πρὸς τὰ ἀπὸ ΜΛ, ΚΕ οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΓ πρὸς τὰ ἀπὸ ΛΗ, ΚΖ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΞΓ τοῖς ἀπὸ ΗΛ, ΚΖ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΗΛ τῷ ἀπὸ ΞΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΚΖ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΓΕΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΞ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ ΞΕ καὶ τῷ ὑπὸ ΓΕΔ· * ἡ ἄρα ΓΔ δίχα μὲν τέτμηται κατὰ τὸ Ξ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε. καὶ παράλληλος ἡ ΔΘ τῇ ΗΞ· ἴση ἄρα ἡ ΓΗ τῇ ΗΘ.

EUTOCIUS.

Poteſt etiam hoc theorema eodem modo demonſtrari quo præcedens, cum duæ rectæ lineæ unam ſectionum contingant. ſed quoniam omnino idem eſt atque illud quod in una hyperbola demonſtratum fuit, ipſa demonſtratio ut ſuperflua omiſſa eſt.

Δυνατὸν δὲ τοῦτο τὸ θεώρημα δεῖξαι ὁμοίως τῷ πρὸ αὐτοῦ, ψαυόντων τῶν δύο εὐθειῶν μιᾶς τομῆς ἑκατέρας. ἀλλ' ἐπειδὴ πάντη ταὐτόν ἐστι τῷ ἐπὶ τῆς μιᾶς ὑπερβολῆς προδεδειγμένῳ, αὕτη ἡ ἀπόδειξις ἀπολέχθη.

Prop. XXXII. *Theor.*

Si duæ rectæ hyperbolam contingentes ſibi ipſis occurrant, & recta per tactus jungatur, & jungenti tactus recta parallela ducatur per contingentium occurſum; perque punctum, quo biſecatur jungens tactus, ducatur

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ ἡ διὰ τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, διὰ δὲ τῆς διχοτομίας τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευ-

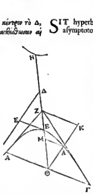
* Hic adhibetur Lemma *Pappi* octavum.

γνυούσης

γνύσης ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς παραλλήλου ἀπολαμβανομένη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς.

alia alteri aſymptotôn parallela: quæ inter dictum punctum & rectam parallelam interjicitur à ſectione bifariam dividetur.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἧς κέντρον τὸ Δ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΔΕ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΖ, ΖΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ, καὶ ἡ ΖΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Η, Θ· φανερὸν δὴ ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΘΓ. ἤχθω δὴ διὰ μὲν τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΖΚ, διὰ δὲ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΔΕ ἡ ΘΛΚ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΘΛ.



Ἤχθωσαν διὰ τῶν Β, Λ παρὰ τὴν ΑΓ αἱ ΒΕ, ΛΜ. ἔσται δή, ὡς προδέδεικται, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΛ, καὶ τὸ ὑπὸ ΗΜΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΛ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΜΒ τῷ ἀπὸ ΜΘ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΘΔΖ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΒ, διότι ἐφάπτεται ἡ ΑΖ καὶ κατῆκται ἡ ΑΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΜΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΒ, ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΘΔΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΜΘ· * δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΖΘ κατὰ τὸ Μ προσκειμένην ἔχουσα τὴν ΔΖ. καί εἰσι παράλληλοι αἱ ΚΖ, ΛΜ· ἴση ἄρα ἡ ΚΛ τῇ ΛΘ.

SIT hyperbola ΑΒΓ, cujus centrum Δ, & aſymptotos ΔΒ; contingant autem ſectionem rectæ ΑΖ, ΖΓ, jungaturque ΓΑ, & ΖΔ ad Η, Θ producatur; erit [per 30. 2. huj.] ΑΘ æqualis ipſi ΘΓ. itaque per Ζ ducatur ΖΚ ipſi ΑΓ parallela, & per Θ recta ΘΛΚ parallela ipſi ΔΕ: dico ΚΛ ipſi ΘΛ æqualem eſſe.

Ducantur enim per Β, Λ rectæ ΒΕ, ΛΜ quæ parallelæ ſunt ipſi ΑΓ. jam ex iis, quæ [in 2[bus] præced.] demonſtrata ſunt, ut quadratum ex ΔΒ ad quadratum ex ΒΕ ita erit quadratum ex ΘΜ ad quadratum ex ΜΛ, & rectangulum ΗΜΒ ad quadratum ex ΜΛ: rectangulum igitur ΗΜΒ æquale eſt [per 9. 5.] quadrato ex ΜΘ. eſt autem [per 37. 1. huj.] & ΘΔΖ rectangulum quadrato ex ΔΒ æquale; propterea quod ΑΖ ſectionem contingit & ΑΘ ordinatim applicata eſt: ergo rectangulum ΗΜΒ una cum quadrato ex ΔΒ, hoc eſt [per 6. 2.] quadratum ex ΔΜ, æquale eſt rectangulo ΘΔΖ una cum quadrato ex ΜΘ: & ideo [per converſ. 6. 2.] recta ΖΘ bifariam ſecatur in puncto Μ, adjunctam habens ΔΖ. ſunt autem rectæ ΚΖ, ΛΜ parallelæ; æqualis igitur eſt [per 2. 6.] ΚΛ ipſi ΛΘ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγʹ.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, διὰ δὲ διχοτομίας τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων, συμπίπτουσα τῇ τομῇ καὶ τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως ἠγμένῃ παραλλήλῳ· ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς παραλλήλου ὑπὸ τῆς τομῆς δίχα διαιρεθήσεται.

Prop. XXXIII. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ oppoſitas ſectiones contingentes ſibi ipſis occurrant, & recta jungens tactus producatur; per occurſum vero contingentium ducatur recta tactus conjungenti parallela, & per punctum quod conjungentem tactus bifariam ſecat ducatur recta alteri aſymptotôn parallela, conveniens & cum ſectione & cum recta parallela per occurſum ductâ: quæ inter biſectionem jungentis tactus & dictam parallelam interjicitur à ſectione bifariam dividetur.

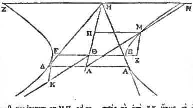
ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΗ, ΗΔ, κέντρον δὲ τὸ Θ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΚΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΗ καὶ ἐκβεβλήσθω, ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ ΑΛΔ· φανερὸν δὴ ὅτι δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Λ. ἤχθωσαν δὲ διὰ τῶν Η, Θ παρὰ τὴν ΑΔ αἱ ΒΘΕ, ΓΗΖ, παρὰ δὲ τὴν ΘΚ διὰ τοῦ Λ ἡ ΛΜΝ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΜΝ.

SINT oppoſitæ ſectiones ΑΒΓ, ΔΕΖ, & rectæ contingentes ΑΗ, ΗΔ, centrum autem ſit Θ, & aſymptotos ΚΘ; ductaque ΘΗ producatur, & jungatur ΑΛΔ: itaque ΑΔ [per 30. 2. huj.] bifariam ſecabitur in Λ. ducantur per Η, Θ rectæ ΒΘΕ, ΓΗΖ ipſi ΑΔ parallelæ; & per Λ ducatur ΛΜΝ parallela ipſi ΘΚ: dico ΛΜ æqualem eſſe ipſi ΜΝ.

* Juxta Pappi Lemma nonum.

Applicentur

Ducantur ordinatim à punctis E, M rectæ EK, MΞ parallelæ ipſi HΘ; & per M ducatur MΠ parallela ipſi ΛΔ. quoniam igitur, ex iis quæ ante demonſtrata ſunt, ut quadratum ex ΘE ad quadratum ex EK ita eſt rectangulum BΞE ad quadratum ex ΞM; erit [per 12. 5.] ut quadratum ex ΘE ad quadratum ex EK ita rectangulum BΞE una cum quadrato ex ΘE, hoc eſt [per 6.2.] quadratum ex ΘΞ, ad quadrata ex KE, ΞM. quadratum autem ex KE oſtenſum eſt [ad 38. 1. huj.] æquale rectangulo HΘΛ, & quadratum ex ΞM æquale eſt quadrato ex ΘΠ: ut igitur quadratum ex ΘE ad quadratum ex EK ita quadratum ex ΘΞ, hoc eſt quadratum ex MΠ, ad rectangulum HΘΛ una cum quadrato ex ΘΠ. ſed ut quadratum ex ΘE ad quadratum ex EK ita eſt [per 4. & 22. 6.] quadratum ex MΠ ad quadratum ex ΠΛ: quare ut quadratum ex MΠ ad quadratum ex ΠΛ ita quadratum ex MΠ ad rectangulum HΘΛ una cum quadrato ex ΘΠ; & propterea quadratum ex ΛΠ rectangulo HΘΛ una cum quadrato ex ΘΠ æquale erit: ergo [per conv. 5.2.] recta ΛH in partes æquales ſecatur ad Π & in partes inæquales ad Θ. & ſunt quidem rectæ MΠ, HN parallelæ; eſt igitur ΛM [per 2.6.] ipſi MN æqualis.



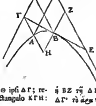
Κατήχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ε, Μ παρὰ τὴν ΗΘ αἱ ΕΚ, ΜΞ, διὰ δὲ τοῦ Μ παρὰ τὴν ΛΔ ἡ ΜΠ. ἐπεὶ οὖν, διὰ τὰ δεδειγμένα, ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΞΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΜ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΞΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΘΞ, πρὸς τὰ ἀπὸ ΚΕ, ΞΜ. τὸ δὲ ἀπὸ ΚΕ ἴσον δέδεικται τῷ ὑπὸ ΗΘΛ, καὶ τὸ ἀπὸ ΞΜ τῷ ἀπὸ ΘΠ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΞ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΜΠ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΛ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΛ οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΠ τῷ ὑπὸ ΗΘΛ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘΠ· εὐθεῖα ἄρα ἡ ΛΗ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Π, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Θ. καί εἰσι παράλληλοι αἱ ΜΠ, ΗΝ· ἴση ἄρα ἡ ΛΜ τῇ ΜΝ.

Prop. XXXIV. *Theor.*

Si in una aſymptotôn hyperbolæ aliquod punctum ſumatur, ab eoque recta ducta ſectionem contingat, & per tactum ducatur aſymptoto parallela: quæ per dictum punctum tranſit, alteri aſymptotôn parallela, à ſectione bifariam dividetur.

SIT hyperbola AB, aſymptoti vero ΓΔ, ΔE; &, ſumpto in recta ΓΔ quovis puncto Γ, per ipſum ducatur ΓBE ſectionem contingens; & per B quidem ducatur ZBH parallela ipſi ΓΔ, per Γ autem ΓAH quæ ipſi ΔE æquidiſtet: dico rectam ΓA æqualem eſſe ipſi AH.

Ducatur enim per A recta AΘ parallela ipſi ΓΔ; & per B recta BK parallela ipſi ΔE. itaque quoniam [per 3. 2. huj.] ΓB æqualis eſt BE; erit [per 2. 6.] & ΓK ipſi KΔ, & ΔZ ipſi ZB æqualis. & cum rectangulum KBZ æquale ſit [per 12. 2. huj.] rectangulo ΓAΘ, & recta BZ æqualis ipſi ΔK ſive ΓK, & AΘ ipſi ΔΓ; rectangulum ΔΓA æquale erit rectangulo KΓH:



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ′.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ εὐθεῖα ἐφάπτηται τῆς τομῆς, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ἀσυμπτώτῳ· ἡ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου ἀγομένη παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων ὑπὸ τῆς τομῆς εἰς ἴσα διαιρεθήσεται.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔ, ΔΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΒΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β παρὰ τὴν ΓΔ ἤχθω ἡ ΖΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΔΕ ἡ ΓΑΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ.

Ἤχθω γὰρ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΘ, διὰ δὲ τοῦ Β τῇ ΔΕ ἡ ΒΚ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΔ, καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΚΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΑΘ, ἴση δὲ ἡ ΒΖ τῇ ΔΚ, τουτέστι τῇ ΓΚ, καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΓΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΚΓΗ·

ἔστιν

Digitized by Google

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΚ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΑΓ. διπλῆ δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓΚ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΗ τῆς ΑΓ· ἴση ἄρα ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ.

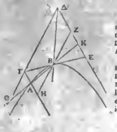
ut igitur ΔΓ ad ΓΚ ita [per 16.6.] ΓΗ ad ΑΓ. eſt autem ΔΓ ipſius ΓΚ dupla: ergo & ΓΗ dupla ΑΓ; idcircoque recta ΓΑ ipſi ΑΗ eſt æqualis.

EUTOCIUS.

Ἄλλως.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ, καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΔ, ΔΕ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΓΒΕ, καὶ παράλληλοι αἱ ΓΑΗ, ΖΒΗ· λέγω ὅτι ἴση ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Θ, Κ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΒ τῇ ΒΑ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΒ τῇ ΑΘ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ.



Aliter.

Sit hyperbola ΑΒ, cujus aſymptoti ΓΔ, ΔΕ, & contingens ΓΒΕ; parallelæ autem ΓΑΗ, ΖΒΗ: dico ΓΑ ipſi ΑΗ æqualem eſſe.

Jungatur enim ΑΒ, & ad Θ, Κ producatur. itaque quoniam ΓΒ [per 3.2.huj.] æqualis eſt ipſi ΒΕ; erit & ΚΒ ipſi ΒΑ æqualis. ſed & ΚΒ [per 8. 2. huj.] eſt æqualis ΑΘ: ergo & ΓΑ ipſi ΑΗ æqualis erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε΄.

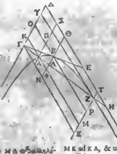
Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου εὐθεῖά τις ἀχθῇ τέμνουσα τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα· ἔσται ὡς ὅλη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην, οὕτως τὰ τμήματα τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης εὐθείας πρὸς ἄλληλα.

PROP. XXXV. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſi à ſumpto puncto recta ducatur, ſectionem in duobus punctis ſecans; erit ut tota ad eam quæ extra ſumitur, ita inter ſeſe portiones illius quæ intra ſectionem continetur.

Ἔστω γὰρ ἡ ΑΒ ὑπερβολή, καὶ αἱ ΓΔ, ΔΕ ἀσύμπτωτοι, καὶ ΓΒΕ ἐφαπτομένη, καὶ ἡ ΘΒ παράλληλος τῇ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦ Γ διήχθω τις εὐθεῖα ΓΑΛΖΗ τέμνουσα τὴν τομὴν κατὰ τὰ Α, Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΖΛ πρὸς ΛΑ.

Ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Γ, Α, Β, Ζ παρὰ τὴν ΔΕ αἱ ΓΝΞ, ΚΑΦΜ, ΟΠΒΡ, ΥΖ, διὰ δὲ τῶν Α, Ζ παρὰ τὴν ΓΔ αἱ ΑΠΣ, ΤΖΡΜΞ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΖΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΑ τῇ ΥΗ. ἡ δὲ ΚΑ τῇ ΔΣ ἴση· καὶ ἡ ΥΗ ἄρα τῇ ΔΣ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΔΥ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΔΥ, ἴση καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΓΥ· ὡς ἄρα ἡ ΔΚ πρὸς ΚΓ οὕτως ἡ ΥΓ πρὸς ΓΚ. ὡς δὲ ἡ ΥΓ πρὸς ΓΚ οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ὡς δὲ ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ, ὡς δὲ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ οὕτως τὸ ΜΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΔΑ, ὡς δὲ ἡ ΔΚ πρὸς ΚΓ οὕτως τὸ ΘΚ πρὸς τὸ ΚΝ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΔ πρὸς τὸ ΔΑ οὕτως τὸ ΘΚ πρὸς τὸ ΚΝ. ἴσον δὲ τὸ ΑΔ τῷ ΔΒ παραλληλογράμμῳ, τουτέστι τῷ ΟΝ· (ἴση γὰρ ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ καὶ ἡ ΔΟ τῇ ΟΓ) ὡς ἄρα τὸ ΜΔ πρὸς τὸ ΟΝ οὕτως τὸ ΘΚ πρὸς τὸ ΚΝ, καὶ λοιπὸν τὸ



SIT ΑΒ hyperbola, cujus aſymptoti ΓΔ, ΔΕ; contingenſque ΓΒΕ, & ΘΒ parallela ipſi ΓΔ; ducatur autem per Γ recta linea ΓΑΛΖΗ, quæ ſectionem in punctis Α, Ζ ſecet: dico ut ΖΓ ad ΓΑ ita eſſe ΖΛ ad ΛΑ.

Ducantur enim per puncta Γ, Α, Β, Ζ rectæ ΓΝΞ, ΚΑΦΜ, ΟΠΒΡ, ΥΖ ipſi ΔΕ parallelæ, & per Α, Ζ ducantur ΑΠΣ, ΤΖΡΜΞ parallelæ ipſi ΓΔ. quoniam igitur [per 8. 2. huj.] æqualis eſt ΑΓ ipſi ΖΗ, erit & ΚΑ [per 26.1.] æqualis ΥΗ. ſed ΚΑ eſt æqualis ΔΣ: ergo & ΥΗ ipſi ΔΣ eſt æqualis; & pari modo ΓΚ ipſi ΔΥ. cumque ΓΚ æqualis eſt ipſi ΔΥ, & ΔΚ ipſi ΓΥ æqualis erit: ut igitur ΔΚ ad ΚΓ ita ΥΓ ad ΓΚ. ſed [per 2. 6.] ut ΥΓ ad ΓΚ ita ΖΓ ad ΓΑ, & ut ΖΓ ad ΓΑ ita ΜΚ ad ΚΑ, & ut ΜΚ ad ΚΑ ita [per 1. 6.] ΜΔ parallelogrammum ad parallelogrammum ΔΑ, & ut ΔΚ ad ΚΓ ita parallelogrammum ΘΚ ad parallelogrammum ΚΝ: ergo [per 11.5.] ut parallelogrammum ΜΔ ad ΔΑ ita ΘΚ ad ipſum ΚΝ. atqui [per 12.2.huj.] parallelogrammum ΑΔ eſt æquale parallelogrammo ΔΒ, hoc eſt [per 36.1.] ipſi ΟΝ: (eſt enim [per 3.2.huj.] recta ΓΒ æqualis ΒΕ, & [per 2. 6.] ΔΟ ipſi ΟΓ) quare ut parallelogrammum ΜΔ ad ΟΝ ita ΘΚ ad ΚΝ; reliquum

liquum igitur MΘ ad reliquum BK eſt [per 19. 5.] ut totum ΔM ad totum ON. & quoniam parallelogrammum KΣ æquale eſt ΘO, commune auferatur ΔΠ; eritque reliquum KΠ reliquo ΠΘ æquale. commune apponatur AB: totum igitur KB æquale eſt ipſi AΘ, ideoque ut MΔ ad ΔΛ ita *MΘ ad ΘΛ. ſed ut parallelogrammum MΔ ad parallelogrammum ΔΛ ita [per 1.6.] recta MK ad rectam KΛ, hoc eſt ZΓ ad ΓΛ; ut autem parallelogrammum MΘ ad parallelogrammum ΘΛ ita recta MΦ ad rectam ΦΛ, hoc eſt [per 2.6.] ZΛ ad ΛA: ergo ut ZΓ ad ΓΛ ita ZΛ ad ΛA.

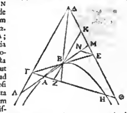
MΘ πρὸς λοιπὸν τὸ BK ἐστὶν ὡς ὅλον τὸ ΔM πρὸς ὅλον τὸ ON. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ KΣ τῷ ΘO, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΠ· λοιπὸν ἄρα τὸ KΠ ἴσον ἐστὶ λοιπῷ τῷ ΠΘ. κοινὸν προσκείσθω τὸ AB· ὅλον ἄρα τὸ KB ἴσον ἐστὶ τῷ AΘ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ MΔ πρὸς τὸ ΔΛ οὕτως τὸ MΘ πρὸς τὸ ΘΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ MΔ πρὸς τὸ ΔΛ οὕτως ἡ MK πρὸς τὴν KΛ, τουτέστιν ἡ ZΓ πρὸς ΓΛ, ὡς δὲ τὸ MΘ πρὸς τὸ ΘΛ οὕτως ἡ MΦ πρὸς τὴν ΦΛ, τουτέστιν ἡ ZΛ πρὸς τὴν ΛA· καὶ ὡς ἄρα ἡ ZΓ πρὸς τὴν ΓΛ οὕτως ἡ ZΛ πρὸς τὴν ΛA.

EUTOCIUS.

Aliter.

Sit hyperbola AB, cujus aſymptoti ΓΔ, ΔE, & à puncto Γ recta quidem ΓBE ducta ſectionem contingat, ΓAHΘ vero in duobus punctis A, H ſecet, & per B ducatur ZBK ipſi ΓΔ parallela: demonſtrare oportet ut HΓ ad ΓA ita eſſe HZ ad ZA.

Jungatur enim AB, atque ad Λ, M producatur, & à puncto E ducatur EN parallela ipſi ΓΘ. quoniam igitur [per 3. 2. huj.] ΓB æqualis eſt ipſi BE, erit ΓΛ ipſi EN æqualis, & ΛB ipſi BN; unde NM differentia eſt ipſarum ΛB, BM. ſed BM [per 8. 2. huj.] eſt æqualis ipſi ΛA; erit igitur NM differentia ipſarum ΛA, ΛB. & quoniam in triangulo ΛMΘ ducta eſt EN ipſi ΛΘ parallela, ut ΛM ad NM ita erit ΛΘ ad NE. & eſt NE æqualis ipſi ΛΓ: ut igitur ΘΛ ad ΛΓ ita ΛM ad differentiam ipſarum AB, BM, hoc eſt AB ad differentiam ipſarum ΛA, ΛB. ut autem ΘΛ ad ΛΓ ita HΓ ad ΓA: (eſt enim ΓA æqualis ipſi ΘH) ergo ut HΓ ad ΓA ita AB ad differentiam ipſarum ΛA, ΛB, & ita ΓZ ad exceſſum ipſarum ΓA, AZ. quoniam autem quæſtio eſt an ſit ut HΓ ad ΓA ita HZ ad ZA, demonſtrare oportet ut tota HΓ ad totam ΓA ita eſſe ablatam HZ ad ablatam AZ, & reliquam ΓZ ad reliquam, videlicet ad exceſſum ipſarum ΓA, AZ. demonſtratum autem eſt HΓ eſſe ad ΓA ita ut ΓZ ad exceſſum ipſarum ΓA, AZ. [propter ſimilitudinem triangulorum ΓΛA, ZAB.]



Ἄλλως.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ AB, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔ, ΔE, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἡ μὲν ΓBE ἐφαπτέσθω, ἡ δὲ ΓAHΘ τεμνέτω τὴν τομὴν κατὰ τὰ A, H σημεῖα, καὶ διὰ τοῦ B παρὰ τὴν ΓΔ ἤχθω ἡ ZBK· δεικτέον ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ HΓ πρὸς ΓA οὕτως ἡ HZ πρὸς ZA.

Ἐπεζεύχθω ἡ AB καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Λ, M, καὶ ἀπὸ τοῦ E παρὰ τὴν ΓΘ ἤχθω ἡ EN. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓB τῇ BE, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΓΛ τῇ EN, ἡ δὲ ΛB τῇ BN· ἡ ἄρα NM ὑπεροχή ἐστι τῶν ΛB, BM. ἴση δὲ ἡ BM τῇ ΛA· ἡ NM ἄρα ὑπεροχή ἐστι τῶν ΛA, ΛB. καὶ ἐπεὶ ἐπὶ τριγώνου τοῦ ΛMΘ παρὰ τὴν ΛΘ ἐστὶν ἡ EN, ἔστιν ὡς ἡ ΛM πρὸς NM οὕτως ἡ ΛΘ πρὸς NE. ἴση δὲ ἡ NE τῇ ΛΓ· ὡς ἄρα ἡ ΘΛ πρὸς ΛΓ οὕτως ἡ ΛM πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν AB, BM, τουτέστιν ἡ AB πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ΛA, ΛB. ὡς δὲ ἡ ΘΛ πρὸς ΛΓ οὕτως ἡ HΓ πρὸς ΓA· (ἴση γὰρ ἡ ΓA τῇ ΘH) καὶ ὡς ἄρα ἡ HΓ πρὸς ΓA οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν ὑπεροχὴν τῶν ΛA, ΛB, καὶ ἡ ΓZ πρὸς τὴν τῶν ΓA, AZ ὑπεροχήν. καὶ ἐπεὶ ζητοῦμεν εἰ ἐστὶν ὡς ἡ HΓ πρὸς ΓA οὕτως ἡ HZ πρὸς ZA, δεικτέον ὅτι ὡς ὅλη ἡ HΓ πρὸς ὅλην τὴν ΓA οὕτως ἀφαιρεθεῖσα ἡ HZ πρὸς ἀφαιρεθεῖσαν τὴν AZ, καὶ λοιπὴ ἡ ΓZ πρὸς λοιπὴν τὴν τῶν ΓA, AZ ὑπεροχήν. δέδεικται δὲ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ HΓ πρὸς ΓA οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν τῶν ΓA, AZ ὑπεροχήν.

Prop. XXXVI. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſi recta à puncto ducta neque ſectionem in duobus punctis ſecet, neque parallela ſit aſymptoto; cum oppoſita quidem ſectione conveniet: erit autem ut tota ad rectam quæ inter ſectionem & parallelam per tactum ductam interjicitur, ita ea quæ eſt inter oppoſitam ſe-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛʹ.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ σημείου διαγομένη εὐθεῖα μήτε τὴν τομὴν τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, μήτε παράλληλος ᾖ τῇ ἀσυμπτώτῳ, συμπεσεῖται μὲν τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ· ἔσται δὲ ὡς ὅλη πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς διὰ τῆς ἁφῆς παραλλήλου, οὕτως ἡ μεταξὺ τῆς ἀντικειμένης

* Superius enim demonſtraverat eſſe MΔ ad ON, hoc eſt ad BΔ, hoc eſt ad ΔΛ, ſicut MΘ ad KB, hoc eſt ad ΛΘ.

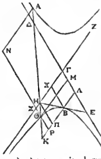
*

καὶ

καὶ τῆς ἀσυμπτώτου πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἀσυμπτώτου καὶ τῆς ἑτέρας τομῆς.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΔΕ, ΖΗ, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΗ εἰλήφθω σημεῖον τὸ Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἤχθω ἡ μὲν ΗΒΕ ἐφαπτομένη, ἡ δὲ ΗΘ μήτε παράλληλος οὖσα τῇ ΓΕ, μήτε τὴν τομὴν τέμνουσα κατὰ δύο σημεῖα· ὅτι μὲν οὖν ἡ ΘΗ ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦτο καὶ τῇ Α τομῇ, δέδεικται. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Α, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β τῇ ΓΗ παράλληλος ἡ ΚΒΑ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΘ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α, Θ σημείων παρὰ τὴν ΓΗ αἱ ΘΜ, ΑΝ, ἀπὸ δὲ τῶν Β, Η, Θ παρὰ τὴν ΔΕ αἱ ΒΞ, ΗΠ, ΡΘΣΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΗΘ, ἔστιν ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΗ· καὶ ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ οὕτως ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, ὡς δὲ ἡ ΔΘ πρὸς ΘΗ οὕτως ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ οὕτως ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ οὕτως τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ οὕτως τὸ ΓΡ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΡΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ οὕτω τὸ ΓΡ πρὸς τὸ ΡΗ. καὶ ὡς ἓν πρὸς ἓν οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα· ὡς ἄρα τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ οὕτως ὅλον τὸ ΝΛ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ μετὰ τοῦ ΡΗ παραλληλογράμμου. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΒΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΛΒ τῇ ΒΠ καὶ τὸ ΛΞ τῷ ΒΗ. τὸ δὲ ΛΞ ἴσον τῷ ΓΘ· καὶ τὸ ΒΗ ἄρα ἴσον τῷ ΓΘ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ οὕτως ὅλον τὸ ΛΝ πρὸς τὸ ΒΗ μετὰ τοῦ ΗΡ, τουτέστι πρὸς τὸ ΡΞ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ ΡΞ τῷ ΛΘ, ἐπεὶ καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΒΓ καὶ τὸ ΜΒ τῷ ΞΘ ἴσον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΛΘ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ οὕτως ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, τουτέστιν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΘ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΛΘ οὕτως ἡ ΝΡ πρὸς τὴν ΡΘ, τουτέστιν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς ΚΘ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΘ.



ctionem & aſymptoton ad eam quæ inter aſymptoton & alteram ſectionem.

SINT oppoſitæ ſectiones A, B, quarum centrum Γ, & aſymptoti Δ E, Z H; & in recta H Γ ſumatur punctum H, à quo ducatur H B E quidem ſectionem contingens, H Θ vero neque parallela ipſi Γ E, neque ſectionem in duobus punctis ſecans. jam conſtat Θ H productam convenire cum recta Γ Δ, & propterea cum ſectione A, ut [ad 11. 2. huj.] demonſtratum eſt. conveniat igitur in puncto A; & per B ducatur K B A parallela ipſi Γ H: dico ut A K ad K Θ ita eſſe A H ad H Θ.

Ducantur enim à punctis A, Θ rectæ Θ M, A N, quæ ipſi Γ H æquidiſtent; & à punctis B, H, Θ ducantur B Ξ, H Π, P Θ Σ N, quæ parallelæ ſint ipſi Δ E. itaque quoniam [per 16. 2. huj.] A Δ æqualis eſt ipſi H Θ, erit ut A H ad H Θ ita Δ Θ ad Θ H; atque ut A H ad H Θ ita [per 2. 6.] N Σ ad Ξ Θ, ut vero Δ Θ ad Θ H ita Γ Σ ad Σ H: igitur ut N Σ ad Σ Θ ita Γ Σ ad Σ H. ſed [per 1. 6.] ut N Σ ad Σ Θ ita parallelogrammum N Γ ad parallelogrammum Γ Θ; & ut Γ Σ ad Σ H ita Γ P ad P H: ergo ut N Γ ad Γ Θ ita Γ P ad ipſum P H. & [per 12. 5.] ut unum ad unum ita omnia ad omnia; quare ut N Γ ad Γ Θ ita totum N A ad Γ Θ & P H ſimul. & quoniam [per 3. 2. huj.] E B eſt æqualis ipſi B H; erit & A B ipſi B Π æqualis, & [per 36. 1.] parallelogrammum A Ξ æquale ipſi B H. ſed [per 12. 2. huj.] A Ξ, Γ Θ ſunt æqualia; ergo & B H ipſi Γ Θ parallelogrammo: ut igitur N Γ ad Γ Θ ita totum A N ad parallelogramma B H & H P ſimul, hoc eſt ad P Ξ. ſed P Ξ eſt æquale ipſi A Θ, quoniam & Γ Θ ipſi B Γ atque M B ipſi Ξ Θ: ergo ut N Γ ad Γ Θ ita N A ad A Θ parallelogrammum. ut autem N Γ ad Γ Θ parallelogrammum ita recta N Σ ad Σ Θ rectam, hoc eſt A H ad H Θ; & ut N A ad A Θ ita recta N P ad rectam P Θ, hoc eſt A K ad K Θ; quare ut A K ad K Θ ita A H ad H Θ.

EUTOCIUS.

Ἄλλως.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Α, καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΒΚ, ΔΓ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΒΑΔ, καὶ διήχθω ἡ ΑΚΔΗΖ, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΖ· δεικτέον ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΖΗ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ.

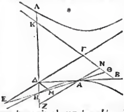
Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Ε, Θ· φανερὸν οὖν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΑ τῇ ΕΗ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΑΕ. ἤχθω διὰ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΘΓ ἡ ΔΜ, ἴση ἄρα ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ καὶ ἡ ΘΑ τῇ ΑΜ· ἡ ἄρα ΜΗ

Aliter.

Sint oppoſitæ ſectiones A, A, quarum aſymptoti B K, Δ Γ & contingens B A Δ; ducatur autem A K Δ H Z, & ſit A Z ipſi Γ Δ parallela: demonſtrandum eſt ut A Z ad Z H ita eſſe A Δ ad Δ H.

Jungatur A H & ad E, Θ protrahatur: & erit [per 8. 2. huj.] A Θ æqualis E H, & Θ H ipſi A E. ducatur per Δ recta Δ M parallela ipſi Γ Θ; ergo [per 3. 2. huj.] B A ipſi A Δ erit æqualis, & Θ A ipſi A M: quare M H eſt differentia

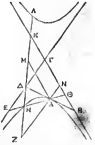
ferentia ipſarum ΘΛ, ΛΗ, ſive ipſarum ΛΗ, ΗΕ. & quoniam ΒΚ parallela eſt ipſi ΔΜ, erit ut ΘΗ ad ΗΜ ita ΚΗ ad ΗΔ. atqui eſt ΛΕ æqualis ipſi ΘΗ & [per 16. 2. huj.] ΛΔ ipſi ΚΗ: ergo ut ΛΔ ad ΔΗ ita ΛΕ ad ΗΜ, hoc eſt ad differentiam ipſarum linearum ΛΗ, ΗΕ. ſed ut ΛΕ ad differentiam ipſarum ΛΗ, ΗΕ ita ΔΖ ad differentiam ipſarum ΔΗ, ΗΖ [propter ſimilitudinem triangulorum ΔΗΕ, ΖΗΛ:] ergo ut ΛΔ ad ΔΗ ita ΔΖ ad differentiam ipſarum ΔΗ, ΗΖ. & ut unum ad unum ita omnia ad omnia: ut igitur ΛΔ ad ΔΗ ita tota ΛΖ ad ΔΗ una cum differentia ipſarum ΔΗ, ΗΖ, hoc eſt ad ΗΖ.



ὑπεροχή ἐστι τῶν ΘΛ, ΛΗ, τουτέστι τῶν ΛΗ, ΗΕ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΚ τῇ ΔΜ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΜ οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς ΗΔ· καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΛΕ τῇ ΘΗ ἡ δὲ ΛΔ τῇ ΚΗ· ὡς ἄρα ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΛΕ πρὸς ΗΜ, τουτέστι πρὸς τὴν τῶν ΛΗ, ΗΕ ὑπεροχήν. ἀλλ' ὡς ἡ ΛΕ πρὸς τὴν τῶν ΛΗ, ΗΕ ὑπεροχὴν οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν τῶν ΔΗ, ΗΖ ὑπεροχὴν προδέδεικται γάρ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν τῶν ΔΗ, ΗΖ ὑπεροχήν. καὶ ὡς ἓν πρὸς ἓν οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα· ὡς ἄρα ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ὅλη ἡ ΛΖ πρὸς τὴν ΔΗ μετὰ τῆς τῶν ΔΗ, ΗΖ ὑπεροχῆς, τουτέστι πρὸς τὴν ΗΖ.

Aliter.

Sint eadem quæ ſupra, & per Α ducatur ΑΜ ipſi ΒΓ parallela. quoniam igitur ΑΒ eſt æqualis ipſi ΑΔ, erit & ΚΜ æqualis ipſi ΜΔ. & cum parallelæ ſint ΘΚ, ΑΜ; erit ut ΗΜ ad ΜΚ ita ΗΑ ad ΑΘ, hoc eſt ΛΗ ad ΗΕ. ut autem ΛΗ ad ΗΕ ita ΖΗ ad ΗΔ, & ut ΗΜ ad ΜΚ ita dupla ipſius ΗΜ ad duplam ΜΚ; atque eſt ΛΗ dupla ipſius ΗΜ, (eſt enim [per 16. 2. huj.] ΛΚ ipſi ΔΗ æqualis & ΚΜ ipſi ΜΔ) & ΔΚ dupla ipſius ΚΜ: ut igitur ΛΗ ad ΗΖ ita ΚΔ ad ΔΗ; quare componendo ut ΛΖ ad ΖΗ ita ΚΗ ad ΗΔ, hoc eſt ΛΔ ad ΔΗ.



Ἄλλως.

Ἔστω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ διὰ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΓ ἤχθω ἡ ΑΜ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΜΔ. καὶ ἐπεὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ ΘΚ, ΑΜ, ἔστιν ὡς ἡ ΗΜ πρὸς ΜΚ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΘ, τουτέστιν ἡ ΛΗ πρὸς ΗΕ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΛΗ πρὸς ΗΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ, ὡς δὲ ἡ ΗΜ πρὸς ΜΚ οὕτως ἡ διπλασία τῆς ΗΜ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΜΚ, καὶ ἔστι διπλασία τῆς ΗΜ ἡ ΛΗ (ἴση γὰρ ἡ ΛΚ τῇ ΔΗ καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΜΔ) καὶ τῆς ΚΜ διπλασία ἡ ΔΚ· ὡς ἄρα ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΔΗ, καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΛΖ πρὸς ΖΗ οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς ΗΔ, τουτέστιν ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ.

Prop. XXXVII. *Theor.*

Si duæ rectæ coni ſectionem vel circuli circumferentiam vel ſectiones oppoſitas contingentes ſibi ipſis occurrant, & per tactus recta jungatur; ab occurſu vero contingentium ducatur recta ſectionem in duobus punctis ſecans: erit ut tota ad eam quæ extra ſumitur, ita ſegmenta quæ à recta jungente tactus abſcinduntur inter ſeſe.

SIT coni ſectio ΑΒ, contingenteſque ΑΓ, ΓΒ; &, junctâ ΑΒ, ducatur ΓΔΕΖ: dico ut ΖΓ ad ΓΔ ita eſſe ΖΕ ad ΕΔ.

Ducantur enim per Γ, Α ſectionis diametri ΓΘ, ΑΚ, & per Ζ, Δ ducantur ΔΠ, ΖΡ; ΑΖΜ, ΝΔΟ parallelæ ipſis ΑΓ, ΑΒ. quoniam igitur

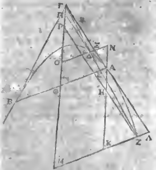
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ΄.

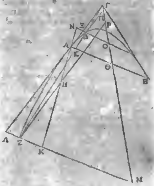
Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας ἢ τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ ἐπὶ μὲν τὰς ἁφὰς αὐτῶν ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων διαχθῇ τις τέμνουσα τὴν γραμμὴν κατὰ δύο σημεῖα· ἔσται ὡς ὅλη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα ὑπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης πρὸς ἄλληλα.

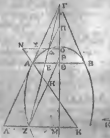
ΕΣΤΩ κώνου τομὴ ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διήχθω ἡ ΓΔΕΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ.

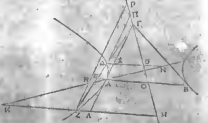
Ἤχθωσαν διὰ τῶν Γ, Α διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΓΘ, ΑΚ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Δ παρὰ τὰς ΑΓ, ΑΒ, αἱ ΔΠ, ΖΡ· ΑΖΜ, ΝΔΟ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός

παράλληλός ἐστιν ἡ ΛΖΜ τῇ ΞΔΟ, ἔστιν ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΔ οὕτως ἡ ΛΖ πρὸς ΞΔ, καὶ ἡ ΖΜ πρὸς ΔΟ, καὶ ἡ ΛΜ πρὸς ΞΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ οὕτως τὸ ΛΜΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΞΟΓ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ οὕτω τὸ









ΖΡΜ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΠΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΛΓΜ τρίγωνον πρὸς τὸ ΞΟΓ οὕτως τὸ ΖΡΜ πρὸς τὸ ΔΠΟ τρίγωνον, καὶ λοιπὸν τὸ ΛΓΡΖ τετράπλευρον πρὸς λοιπὸν τὸ ΞΓΠΔ. ἔστι δὲ τὸ μὲν ΛΓΡΖ τετράπλευρον τῷ ΑΛΚ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΞΓΠΔ τῷ ΑΝΞ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ οὕτως τὸ ΑΛΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΝΞ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ὡς δὲ τὸ ΑΛΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΝΞ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΞ, καὶ τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ.

Λ Z M parallela eſt ipſi Ξ Δ O, erit [per 4. 6.] ut Z Γ ad Γ Δ ita Λ Z ad Ξ Δ, & ita Z M ad Δ O, & Λ M ad Ξ O: ergo ut quadratum ex Λ M ad quadratum ex Ξ O ita quadratum ex Z M ad quadratum ex Δ O. ſed [per 22.6.] ut quadratum ex Λ M ad quadratum ex Ξ O ita Λ M Γ triangulum ad triangulum Ξ O Γ, & ut quadratum ex Z M ad quadratum ex O Δ ita triangulum Z P M ad triangulum Δ Π O: quare [per 11. 5.] ut triangulum Λ Γ M ad triangulum Ξ O Γ ita Z P M triangulum ad triangulum Δ Π O, & [per 19.5.] ita reliquum quadrilaterum Λ Γ P Z ad reliquum Ξ Γ Π Δ. eſt autem [per 49. & 50. 1. huj. & 11. 3. huj.] Λ Γ P Z quadrilaterum triangulo A Λ K æquale, & quadrilaterum Ξ Γ Π Δ æquale triangulo A N Ξ: ut igitur quadratum ex Λ M ad quadratum ex Ξ O ita A Λ K triangulum ad triangulum A N Ξ. ſed ut quadratum ex Λ M ad quadratum ex Ξ O ita quadratum ex Z Γ ad quadratum ex Γ Δ, & ut triangulum A Λ K ad triangulum A N Ξ ita quadratum ex A Λ ad quadratum ex A Ξ, & quadratum ex Z E ad quadratum ex E Δ: ergo ut quadratum ex Z Γ ad quadratum ex Γ Δ ita quadratum ex Z E ad quadratum ex E Δ: & ideo [per 22.6.] ut recta Z Γ ad Γ Δ ita Z E ad E Δ.

Prop. XXXVIII. *Theor.*

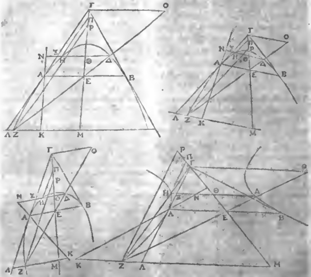
Iiſdem poſitis, ſi per contingentium occurſum ducatur recta tactus conjungenti parallela; & per punctum, quo jungens tactus bifariam dividitur, ducatur recta ſecans & ſectionem ipſam in duobus punctis & rectam parallelam per occurſum ductam: ut tota ad eam quæ extra ſumitur inter ſectionem & rectam parallelam, ita erunt portiones, quæ à recta tactus jungente fiunt, inter ſe.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη΄.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, καὶ διὰ μέσης τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα καὶ τὴν διὰ τῆς συμπτώσεως παράλληλον τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ· ἔσται ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς παραλλήλου, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα ὑπὸ τῆς ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυμένης πρὸς ἄλληλα.

SIT ſectio AB, quam contingant rectæ AΓ, ΓB; ſitque AB connectens tactus, & diametri NAK, ΓM: manifeſtum igitur eſt [ex 30. & 39. 2. huj.] rectam AB ad punctum E bifariam ſecari. ducatur autem à puncto Γ recta ΓO ipſi AB parallela; & per E ducatur ZEΔO: dico ut ZO ad OΔ ita eſſe ZE ad EΔ.

ΕΣΤΩ ἡ ΑΒ τομή, καὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ἐφαπτόμεναι, καὶ ἡ ΑΒ ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα, καὶ αἱ ΝΑΚ, ΓΜ διάμετροι· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ε. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ παράλληλος ἡ ΓΟ, καὶ διήχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΖΕΔΟ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΟ πρὸς ΟΔ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ.



Ducantur enim à punctis Z, Δ rectæ ΛZKM, ΔΘHΞN parallelæ ipſi AB; & per Z, H ducantur ZP, HΠ, ipſi ΛΓ parallelæ. * & eodem modo quo in præcedente, demonſtrabimus † ut quadratum ex ΛM ad quadratum ex ΞΘ ita eſſe quadratum ex ΛA ad quadratum ex AΞ. eſt au-

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ζ, Δ παρὰ τὴν ΑΒ αἱ ΛΖΚΜ, ΔΘΗΞΝ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Η παρὰ τὴν ΛΓ αἱ ΖΡ, ΗΠ. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΘ οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΞ. καὶ ἔστιν ὡς

ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΘ οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΞ, καὶ τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΟ πρὸς ΟΔ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ.

tum [per 4. & 22. 6.] ut quadratum ex ΛM ad quadratum ex ΞΘ ita quadratum ex ΛΓ ad quadratum ex ΓΞ, & ita quadratum ex ZO ad quadratum ex OΔ; atque ut quadratum ex AΛ ad quadratum ex ΛΞ ita quadratum ex ZE ad quadratum ex EΔ: ergo ut quadratum ex ZO ad quadratum ex OΔ ita quadratum ex ZE ad quadratum ex EΔ: ideoque [per 22.6.] ut recta ZO ad rectam OΔ ita ZE ad EΔ.

Hanc demonſtrationem ad hunc modum ſupplet Codex Arabicus *Reverendiſſ. Præſulis* Armachani.

* Erit igitur ut AΛ ad ΛΞ ita ME ad EΘ, & ita ZM ad ΘΔ ſive HΘ; ac propterea triangulum ZMP ad triangulum HΘΠ erit ut triangulum AKΛ ad triangulum ΛNΞ. ſed triangulum AΛK (per 2.3.huj. in cæteris, ac per 5. ejuſdem, in oppoſitis ſectionibus) æquale erit quadrilatero ΛΓPZ, ac triangulum ΛNΞ quadrilatero ΞΓΠH: erit itaque triangulum ZMP ad triangulum HΘΠ ut quadrilaterum ΛΓPZ ad quadrilaterum ΞΓΠH; & componendo in cæteris, vel dividendo in oppoſitis ſectionibus, erit triangulum ΛMΓ ad triangulum ΞΘΓ ſicut quadrilaterum ΛΓPZ ad quadrilaterum ΞΓΠH, ſive ut triangulum AΛK ad triangulum ΛNΞ. triangulum autem ΛMΓ eſt ad triangulum ΞΘΓ ut quadratum ex ΛM ad quadratum ex ΞΘ, & triangulum AΛK eſt ad triangulum ΛNΞ ſicut quadratum ex AΛ ad quadratum ex ΛΞ: † ergo quadratum ex ΛM eſt ad quadratum ex ΞΘ ut quadratum ex AΛ ad quadratum ex ΛΞ, &c. [*unde erit* ΛM *ad* ΞΘ *ſicut* AΛ *ad* ΛΞ. *ſed ut* ΛM *ad* ΞΘ *ita* MΓ *ad* ΓΘ, *hoc eſt, ob parallelas,* ZO *ad* OΔ; *& ut* AΛ *ad* ΛΞ *ita* ZE *ad* EΔ: *quare* ZO *eſt ad* OΔ *ſicut* ZE *ad* EΔ.]

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ'.

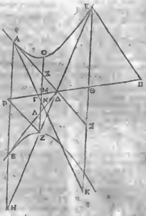
Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ἀπὸ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· ἔσται ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων πρὸς ἄλληλα.

Prop. XXXIX. *Theor.*

Si duæ rectæ oppoſitas ſectiones contingentes ſibi ipſis occurrant, & per tactus recta producatur; ab occurſu vero contingentium ducta recta & utramque ſectionem & rectam tactus conjungentem ſecet: erit ut tota ad eam quæ extra ſumitur inter ſectionem & conjungentem tactus, ita portiones inter ſeſe, quæ inter utramque ſectionem & contingentium occurſum interjiciuntur.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ διὰ τοῦ Δ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΔΖΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΖ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ.

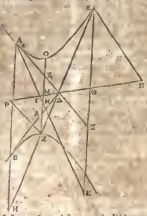
Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ παρὰ μὲν τὴν ΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΕΘΣΚ, ΖΛΝΜΞΟ, παρὰ δὲ τὴν ΑΔ αἱ ΕΠ, ΖΡ. ἐπεὶ οὖν παράλληλοί εἰσιν αἱ ΖΞ, ΕΣ, καὶ διηγμέναι εἰς αὐτὰς αἱ ΕΖ, ΞΣ, ΘΜ· ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΣ οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς ΜΞ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΖΜ οὕτως ἡ ΘΣ πρὸς τὴν ΞΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΜ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΜ.



Sint oppoſitæ ſectiones A, B, quarum centrum Γ, & rectæ contingentes AΔ, ΔB; junctæ vero AB, ΓΔ producantur; & per Δ ducatur EΔZH: dico ut EH ad HZ ita eſſe EΔ ad ΔZ.

Jungatur enim AΓ, producaturque; & per E, Z ducantur EΘΣK, ZΛNMΞO ipſi AB parallelæ, & EΠ, ZP parallelæ ipſi AΔ. quoniam igitur ZΞ, EΣ parallelæ ſunt, & ad ipſas ducuntur EZ, ΞΣ, ΘM; erit [per 4.6.] ut EΘ ad ΘΣ ita ZM ad MΞ, & permutando ut EΘ ad ZM ita erit ΘΣ ad ΞM: ergo ut quadratum ex ΘE ad quadratum ex ZM ita quadratum ex ΘΣ ad quadratum ex ΞM.

ΞΜ. ut autem quadratum ex ΕΘ ad quadratum ex ΜΖ ita [per 22.6.] ΕΘΠ triangulum ad triangulum ΖΡΜ; & ut quadratum ex ΘΣ ad quadratum ex ΞΜ ita triangulum ΔΘΣ ad ΞΜΔ triangulum: ergo ut triangulum ΕΘΠ ad triangulum ΖΡΜ ita triangulum ΔΘΣ ad triangulum ΞΜΔ. ſed [per 31. 3. huj.] triangulum ΕΘΠ triangulis ΑΣΚ, ΘΔΣ eſt æquale; & triangulum ΖΡΜ æquale triangulis ΑΞΝ, ΔΜΞ: ut igitur triangulum ΔΘΣ ad triangulum ΞΜΔ ita triangula ΑΣΚ, ΔΘΣ ſimul ad triangulum ΑΞΝ una cum triangulo ΞΜΔ: quare reliquum triangulum ΑΣΚ ad reliquum ΑΞΝ erit ut triangulum ΔΘΣ ad ipſum ΔΜΞ. ut autem triangulum ΑΣΚ ad ΑΞΝ ita quadratum ex ΚΑ ad quadratum ex ΑΝ, hoc eſt [per 4. & 22. 6.] quadratum ex ΕΗ ad quadratum ex ΖΗ; & ut triangulum ΔΘΣ ad triangulum ΔΜΞ ita quadratum ex ΘΔ ad quadratum ex ΔΜ, hoc eſt quadratum ex ΕΔ ad quadratum ex ΔΖ; ergo ut ΕΗ ad ΗΖ ita ΕΔ ad ΔΖ.



Prop. XL. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſi per occurſum contingentium ducatur recta linea tactus jungenti parallela; & à puncto, quod jungentem tactus bifariam dividit, ducatur recta utrique ſectioni atque parallelæ ei quæ tactus conjungit occurrens: ſicut tota ducta ad eam partem quæ extra ſumitur inter parallelam & ſectionem, ita erunt portiones ejuſdem, inter ſectiones & jungentem tactus interjectæ, inter ſe.

Sint oppoſitæ ſectiones Α, Β, quarum centrum Γ; ſintque contingentes ΑΔ, ΔΒ, & jungantur ΑΒ, ΓΔΕ: erit itaque [per 39. 2. huj.] ΑΕ ipſi ΕΒ æqualis. ducatur per Δ recta ΖΔΗΑ parallela ipſi ΑΒ, & per Ε recta ad libitum ΘΕΚΑ: dico ut ΘΑ ad ΑΚ ita eſſe ΘΕ ad ΕΚ.

Ducantur enim à punctis Θ, Κ rectæ ΝΜΘΞ, ΚΟΤΠ ipſi ΑΒ parallelæ, & ΘΡ, ΚΣ parallelæ ipſi ΑΔ; & ducatur ΞΑΓΤ. itaque quoniam in rectas parallelas ΞΜ, ΚΠ cadunt ΞΑΤ, ΜΑΠ; erit [per 4.6.] ut ΞΑ ad ΑΤ ita ΜΑ ad ΑΠ. ut autem ΞΑ ad ΑΤ ita [per 34. 1.] ΘΕ ad ΕΚ; & ut ΘΕ ad ΕΚ ita ΘΝ ad ΚΟ, propter ſimi-

ΞΜ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΕΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΖ οὕτως τὸ ΕΘΠ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΡΜ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘΣ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΜ οὕτως τὸ ΔΘΣ τρίγωνον πρὸς τὸ ΞΜΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΕΘΠ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΡΜ οὕτως τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΞΜΔ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΘΠ τοῖς ΑΣΚ, ΘΔΣ, τὸ δὲ ΖΡΜ τοῖς ΑΞΝ, ΔΜΞ τριγώνοις· ὡς ἄρα τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΞΜΔ οὕτως τὸ ΑΣΚ μετὰ τοῦ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΑΞΝ μετὰ τοῦ ΞΜΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΣΚ πρὸς λοιπὸν τὸ ΑΞΝ ἐστὶν ὡς τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΔΜΞ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΣΚ πρὸς τὸ ΑΞΝ οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ· ὡς δὲ τὸ ΔΘΣ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΜΞ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΜ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ'.

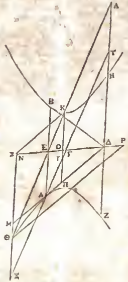
Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, καὶ ἀπὸ μέσης τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν· ἔσται ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς παραλλήλου καὶ τῆς τομῆς, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης πρὸς ἄλληλα.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔΕ· ἴση ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Δ παρὰ τὴν ΑΒ ἤχθω ἡ ΖΔΗΑ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΘΕΚΑ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΘΑ πρὸς ΑΚ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ.

Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Θ, Κ παρὰ μὲν τὴν ΑΒ αἱ ΝΜΘΞ, ΚΟΤΠ, παρὰ δὲ τὴν ΑΔ αἱ ΘΡ, ΚΣ, καὶ διήχθω ἡ ΞΑΓΤ. ἐπεὶ οὖν εἰς παραλλήλους τὰς ΞΜ, ΚΠ διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΞΑΤ, ΜΑΠ, ἔστιν ὡς ἡ ΞΑ πρὸς τὴν ΑΤ οὕτως ἡ ΜΑ πρὸς ΑΠ. ἀλλ' ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΤ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ οὕτως ἡ ΘΝ πρὸς ΚΟ, διὰ τὴν ὁμοιότητα

τῶν

τῶν ΘΕΝ, ΚΕΟ τριγώνων· ὡς ἄρα ἡ ΘΝ πρὸς ΚΟ οὕτως ἡ ΜΑ πρὸς ΑΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΟ οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΟ οὕτως τὸ ΘΡΝ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΣΟ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ οὕτως τὸ ΞΜΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΤΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΘΡΝ πρὸς τὸ ΚΣΟ τρίγωνον οὕτως τὸ ΞΜΑ πρὸς τὸ ΑΤΠ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ ΘΡΝ τοῖς ΞΑΜ, ΜΝΔ τριγώνοις, τὸ δὲ ΚΣΟ τοῖς ΑΤΠ, ΔΟΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΞΜΑ μετὰ τοῦ ΜΝΔ τριγώνου πρὸς τὸ ΑΤΠ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΔΟΠ τριγώνου οὕτως τὸ ΞΜΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΤΠ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα ΜΝΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΟΠ τρίγωνόν ἐστιν ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΞΜΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΤΠ τρίγωνον οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ, ὡς δὲ τὸ ΜΝΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΟΠ οὕτως τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ οὕτως τὸ ἀπὸ ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΤ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ οὕτως τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ.



litudinem triangulorum ΘΚΝ, ΚΕΟ: quare ut ΘΝ ad ΚΟ ita ΜΑ ad ΑΠ; & idcirco ut quadratum ex ΘΝ ad quadratum ex ΚΟ ita quadratum ex ΜΑ ad quadratum ex ΑΠ. ſed [per 22. 6.] ut quadratum ex ΘΝ ad quadratum ex ΚΟ ita triangulum ΘΡΝ ad triangulum ΚΣΟ; & ut quadratum ex ΜΑ ad quadratum ex ΑΠ ita ΞΜΑ triangulum ad triangulum ΑΤΠ: ut igitur triangulum ΘΡΝ ad triangulum ΚΣΟ ita triangulum ΞΜΑ ad triangulum ΑΤΠ, triangulum autem ΘΡΝ [per 11. 3.huj.] triangulis ΞΑΜ, ΜΝΔ eſt æquale; & triangulum ΚΣΟ æquale triangulis ΑΤΠ, ΔΟΠ: ergo ut triangulum ΞΜΑ una cum triangulo ΜΝΔ ad triangulum ΑΤΠ una cum triangulo ΔΟΠ ita ΞΜΑ triangulum ad triangulum ΑΤΠ: quare & reliquum triangulum ΜΝΔ ad reliquum ΔΟΠ eſt ut totum ad totum. ſed ut triangulum ΞΜΑ ad triangulum ΑΤΠ ita quadratum ex ΞΑ ad quadratum ex ΑΤ; & ut triangulum ΜΝΔ ad triangulum ΔΟΠ ita quadratum ex ΜΝ ad quadratum ex ΠΟ: ergo [per 11. 5.] ut quadratum ex ΜΝ ad quadratum ex ΠΟ ita quadratum ex ΞΑ ad quadratum ex ΑΤ. ut autem quadratum ex ΜΝ ad quadratum ex ΠΟ ita quadratum ex ΝΔ ad quadratum ex ΔΟ, & ut quadratum ex ΞΑ ad quadratum ex ΑΤ ita quadratum ex ΘΕ ad quadratum ex ΕΚ, & ut quadratum ex ΝΔ ad quadratum ex ΔΟ ita quadratum ex ΘΛ ad quadratum ex ΛΚ: ut igitur quadratum ex ΘΛ ad quadratum e ΛΚ ita quadratum ex ΘΕ ad quadratum ex ΕΚ; & propterea ut ΘΛ ad ΛΚ ita ΘΕ ad ΕΚ.

Diviſio hæc rectæ ad conicas ſectiones ductæ, de qua in ſex ultimis propoſitionibus agitur, ea eſt quæ *Harmonica* dicitur: qua fit ut rectangulum ſub tota & parte media æquale ſit rectangulo ſub partibus extremis: ac datis tribus quibuſvis è quatuor punctis, facile eſt quartum invenire, per ea quæ tradit *Pappus* in Lemmatis X. & XI. in hunc Librum. Poſtulatur autem hæc diviſio *Harmonica* ad demonſtrationes Libri quarti.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα΄.

Ἐὰν παραβολῆς τρεῖς εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν ἀλλήλαις, εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τμηθήσονται.

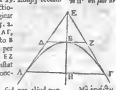
Ἔστω παραβολὴ ἡ ΑΚΓ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔΕ, ΕΖΓ, ΔΒΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ, καὶ ἡ ΖΚ πρὸς ΒΔ.

Prop. XLI. *Theor.*

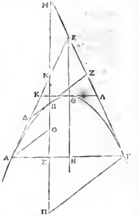
Si parabolam contingentes tres rectæ inter ſe conveniant; in eadem ratione ſecabuntur.

SIT parabola ΑΚΓ, quam rectæ ΑΔΕ, ΕΖΓ, ΔΒΖ contingant: dico ut ΓΖ ad ΖΚ ita eſſe ΕΔ ad ΔΑ, & ΖΚ ad ΒΔ.

Conjungatur enim ΑΓ, & biſariam in Η dividatur: perſpicuum eſt [ex 29. 2.huj.] rectam quæ ab Ε ducitur ad Η, ſectionis diametrum eſſe. ſi igitur ΕΗ per Β tranſit, erit [per 5. 2. huj.] recta ΔΖ parallela ipſi ΑΓ, & ab ΕΗ biſariam in puncto Β ſecabitur: proptereaque [per 35.1.huj.] ΑΔ ipſi ΔΕ, & ΕΖ ipſi ΖΓ æqualis erit: conſtat igitur verum eſſe quod proponebatur.



Sed non tranſeat per Β, ſed per aliud punctum, quod ſit Θ. & per Θ ducatur ΚΘΛ parallela ipſi ΑΓ, quæ [per 32.1.huj.] in Θ ſectionem continget: & erit, per ea quæ dicta ſunt, ΑΚ ipſi ΚΕ æqualis, & ΛΓ ipſi ΛΕ. itaque per punctum quidem Β ducatur ΜΝΒΞ, parallela ipſi ΕΗ; per Α, Γ vero ducantur ΑΟ, ΓΠ parallelæ ipſi ΔΖ. quoniam igitur ΜΒ ipſi ΕΘ parallela eſt, erit [ex 46. 1. huj.] ΜΒ diameter; & ΔΖ in Β ſectionem contingit; quare ΑΟ, ΓΠ ordinatim applicantur. & quoniam ΜΒ diameter eſt, & ΓΜ ſectionem contingit, ordinatimque applicatur ΓΠ: erit [per 35. 1. huj.] ΜΒ ipſi ΒΠ æqualis, adeoque [per 2. 6.] ΜΖ ipſi ΖΓ. quod cum ΜΖ ſit æqualis ΖΓ, & ΕΛ ipſi ΛΓ; erit ut ΜΓ ad ΓΖ ita ΕΓ ad ΓΛ, & permutando ut ΜΓ ad ΓΕ ita ΖΓ ad ΓΛ. ut autem ΜΓ ad ΓΕ ita [per 4. 6.] ΞΓ ad ΓΗ: ergo ut ΖΓ ad ΓΛ ita ΞΓ ad ΓΗ. ſed ut ΑΓ ad ΓΕ ita ΗΓ ad ΓΛ: (quod utraque utriuſque dupla ſit) ex æquali igitur [per 22.5.] ut ΕΓ ad ΓΖ ita ΑΓ ad ΓΞ; & per converſionem rationis ut ΓΕ ad ΕΖ ita ΓΑ ad ΑΞ; dividendoque ut ΓΖ ad ΖΕ ita ΓΞ ad ΞΑ. rurſus quoniam diameter eſt ΜΒ, contingitque ΑΝ, & ordinatim applicatur ΑΟ; erit ΝΒ ipſi ΒΟ, & ΝΔ ipſi ΔΑ æqualis. eſt autem & ΕΚ æqualis ipſi ΚΑ: ergo ut ΕΑ ad ΑΚ ita ΝΑ ad ΑΔ, & permutando ut ΕΑ ad ΑΝ ita ΚΑ ad ΑΔ. ſed ut ΗΑ ad ΑΞ ita ΕΑ ad ΑΝ: quare ut ΗΑ ad ΑΞ ita ΚΑ ad ΑΔ. atque eſt ut ΓΑ ad ΑΗ ita ΕΑ ad ΑΚ: (utraque enim utriuſque eſt dupla) ex æquali igitur erit ut ΓΑ ad ΑΞ ita ΕΑ ad ΑΔ; & dividendo, ut ΓΞ ad ΞΑ ita ΕΔ ad ΔΑ. demonſtratum eſt autem ut ΓΞ ad ΞΑ ita ΓΖ ad ΖΕ: ergo [per 11.5.] ut ΓΖ ad ΖΕ ita ΕΔ ad ΔΑ. rurſus quoniam ut ΓΞ eſt ad ΞΑ ita [per 4.6.] ΓΠ ad ΑΟ, & eſt quidem ΓΠ dupla ipſius



Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Η· ὅτι μὲν οὖν ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Η διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς φανερόν. εἰ μὲν οὖν διὰ τοῦ Β ἔρχεται ἡ ΕΗ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΑΓ, καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Β ὑπὸ τῆς ΕΗ· καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἔσται ἡ ΑΔ τῇ ΔΕ, καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΕ· καὶ φανερὸν τὸ ζητούμενον.

Μὴ ἐρχέσθω δὲ διὰ τοῦ Β, ἀλλὰ διὰ τοῦ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΚΘΛ· ἐφάψεται ἄρα τῆς τομῆς κατὰ τὸ Θ· καὶ διὰ τὰ εἰρημένα ἴση ἔσται ἡ ΑΚ τῇ ΚΕ, καὶ ἡ ΛΓ τῇ ΛΕ. ἤχθω διὰ μὲν τοῦ Β παρὰ τὴν ΕΗ ἡ ΜΝΒΞ, διὰ δὲ τῶν Α, Γ παρὰ τὴν ΔΖ αἱ ΑΟ, ΓΠ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΜΒ τῇ ΕΘ, διάμετρός ἐστιν ἡ ΜΒ. καὶ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Β ἡ ΔΖ· κατηγμέναι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΟ, ΓΠ. καὶ ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ ΜΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΜ, κατηγμένη δὲ ἡ ΓΠ· ἴση ἔσται ἡ ΜΒ τῇ ΒΠ, ὥστε καὶ ἡ ΜΖ τῇ ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΖ τῇ ΖΓ καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΓ, ἔστιν ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΖ οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς ΓΛ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς ΓΛ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ οὕτως ἡ ΞΓ πρὸς ΓΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς ΓΛ οὕτως ἡ ΞΓ πρὸς ΓΗ. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΕ οὕτως ἡ ΗΓ πρὸς ΓΛ· (διπλασία γὰρ ἑκατέρα) δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΕΓ πρὸς ΓΖ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΞ, καὶ ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΓΕ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ, καὶ διελόντι ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ οὕτως ἡ ΓΞ πρὸς τὴν ΞΑ. πάλιν ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ ΜΒ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΑΝ, καὶ κατηγμένη ἡ ΑΟ, ἴση ἐστὶν ἡ ΝΒ τῇ ΒΟ, καὶ ἡ ΝΔ τῇ ΔΑ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΚΑ ἴση· ὡς ἄρα ἡ ΕΑ πρὸς ΑΚ οὕτως ἡ ΝΑ πρὸς ΑΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΕΑ πρὸς ΑΝ οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ. ἀλλ' ὡς ἡ ΗΑ πρὸς ΑΞ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΝ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς ΑΞ οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΚ· (διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας) δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΞ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΔ, καὶ διελόντι ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ· ὡς ἄρα ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ. πάλιν ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ οὕτως ἡ ΓΠ πρὸς ΑΟ, καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΓΠ τῆς

τῆς ΒΖ διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΓΜ τῆς ΜΖ, ἡ δὲ ΛΟ τῆς ΒΔ, ἐπεὶ ἡ ΑΝ τῆς ΝΔ· ὡς ἄρα ἡ ΓΞ πρὸς ΞΑ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ, καὶ ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ, καὶ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΛ.

Β Z, quia Γ M ipſius M Z eſt dupla; dupla vero eſt A O ipſius B Δ, ob A N ipſius N Δ duplam: ut igitur Γ Ξ ad Ξ A ita Z B ad B Δ, & ita Γ Z ad Z E, & ita E Δ ad Δ Λ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Ἐὰν ὑπερβολῇ, ἢ ἐλλείψει, ἢ κύκλου περιφερείᾳ, ἢ ταῖς ἀντικειμέναις ἀπ᾽ ἄκρας τῆς διαμέτρου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, ἄλλη δέ τις ὡς ἔτυχεν ἀχθῇ ἐφαπτομένη· ἀποτεμεῖ ἀπ᾽ αὐτῶν εὐθείας ἴσον περιεχούσας τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ εἴδους.

Prop. XLII. *Theor.*

Si in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia, vel oppoſitis ſectionibus, ab extremitatibus diametri ducantur rectæ parallelæ ordinatim applicatæ; & alia quæpiam recta quomodocunque contingens ducatur: abſcindet ex ipſis rectas continentes rectangulum æquale quartæ parti figuræ ad eandem diametrum factæ.

ΕΣΤΩ γάρ τις τῶν προειρημένων τομῶν ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Α, Β ἤχθωσαν παρὰ τεταγμένως κατηγμένην αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἄλλη δέ τις ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Ε ἡ ΓΕΔ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

Ἔστω γὰρ κέντρον τὸ Ζ, καὶ δι᾽ αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὰς ΑΓ, ΒΔ ἡ ΗΖΘ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ τῇ κατηγμένῃ παράλληλοί εἰσιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΗ παράλληλος· συζυγὴς ἄρα διάμετρός ἐστι τῇ ΑΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΖΗ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου διὰ τοῦ Ε ἔρχεται, ἴσαι γίνονται αἱ ΑΓ, ΖΗ, ΒΔ· καὶ φανερὸν αὐτόθεν ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΗ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους.

SIT aliqua prædictarum ſectionum, cujus diameter A B; atque à punctis A, B ducantur rectæ A Γ, B Δ parallelæ ei quæ ordinatim applicata eſt; & alia quæpiam recta Γ E Δ in puncto B ſectionem contingat: dico rectangulum ſub ipſis A Γ, B Δ æquale eſſe quartæ parti figuræ quæ ad diametrum A B fit.

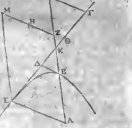


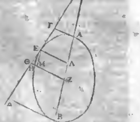
Sit enim ſectionis centrum Z; & per Z ducatur Z H Θ ipſis A Γ, B Δ parallela. itaque quoniam A Γ, B Δ parallelæ ſunt applicatæ, & ipſis parallela eſt Z H; erit Z H diameter ipſi A B conjugata: ergo quadratum ex Z H æquale erit quartæ parti figuræ quæ fit ad A B.

Si igitur in ellipſi & circulo recta Z H per E tranſit; æquales ſunt A Γ, Z H, B Δ: & ideo per ſe manifeſtum eſt rectangulum quod continetur ſub A Γ, B Δ æquale eſſe quadrato ex Z H, hoc eſt quartæ parti figuræ quæ ad A B conſtituitur.

Μὴ ἐρχέσθω δή, καὶ συμπιπτέτωσαν αἱ ΔΓ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ μὲν τὴν ΑΓ ἤχθω ἡ ΕΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΒ ἡ ΕΜ.

Sed non tranſeat per E; & Δ Γ, B A productæ conveniant in K, ducaturque per E recta quidem E Λ ipſi A Γ parallela, E M vero ipſi A B.

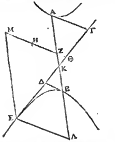




ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΖΛ τῷ ἀπὸ ΑΖ· ἔστιν ὡς ἡ ΚΖ πρὸς ΖΑ οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς ΖΛ, καὶ ἡ ΚΑ πρὸς ΑΛ. ἔστι δὲ τῇ ΖΑ ἴση ἡ ΖΒ· ἀνά-

quoniam igitur rectangulum K Z Λ [per 37.1.huj.] quadrato ex A Z eſt æquale; ut K Z ad Z A [per 17.6.] ita erit A Z ad Z Λ, & ita [per 12. vel 19. 5.] K A ad A Λ. ſed Z B ipſi Z A æqualis eſt: quare

quare invertendo, ut B Z ad Z K ita Λ A ad A K; componendoque vel dividendo, ut B K ad K Z



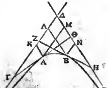
ita A K ad K Λ: ergo ut Δ B ad Z Θ ita E A ad Γ A; & propterea [per 16.6.] rectangulum contentum ſub Δ B, Γ A æquale eſt ei quod ſub Z Θ, E A continetur, hoc eſt rectangulo Θ Z M. rectangulum autem Θ Z M [per 38. 1. huj.] eſt æquale quadrato ex Z H, hoc eſt quartæ parti figuræ quæ ad A B: rectangulum igitur ſub Δ B, Γ A æquale eſt quartæ parti figuræ quæ ad diametrum A B conſtituitur.

Prop. XLIII. *Theor.*

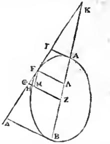
Si hyperbolam recta quævis contingat; abſcindet ex aſymptotis, ad ſectionis centrum, rectas continentes rectangulum æquale ei quod continetur ſub rectis ab altera contingente abſciſſis, ad verticem ſectionis qui eſt ad axem.

SIT hyperbola A B, cujus aſymptoti Γ Δ, Δ E, & axis B Δ; ducatur autem per B recta Z B H ſectionem contingens, & alia quæpiam utcunque contingens ducatur Γ A Θ: dico rectangulum Z Δ H rectangulo Γ Δ Θ æquale eſſe.

Ducantur enim à punctis A, B rectæ A K, B Λ ipſi Δ H parallelæ, ut & rectæ A M, B N ipſi Γ Δ. quoniam igitur Γ A Θ ſectionem contingit; erit [per 3.2.huj.] Γ A æqualis ipſi A Θ: quare Γ Θ dupla eſt ipſius Θ A, & Γ Δ ipſius A M, & Δ Θ ipſius A K dupla: ergo rectangulum Γ Δ Θ quadruplum eſt rectanguli K A M. eodem modo demonſtrabitur rectangulum Z Δ H rectanguli A B N quadruplum. ſed [per 12. 2.huj.] rectangulum K A M eſt æquale rectangulo Λ B N: rectangulum igitur Γ Δ Θ rectangulo Z Δ H æquale erit. ſimiliter demonſtrabitur etiamſi Δ B ſit alia quæpiam diameter, & non axis.



πάλιν ἄρα ὡς ἡ B Z πρὸς Z K οὕτως ἡ Λ A πρὸς A K, καὶ συνθέντι ἢ διελόντι ὡς ἡ B K πρὸς K Z οὕ-



τως ἡ A K πρὸς K Λ· ὡς ἄρα ἡ Δ B πρὸς Z Θ οὕτως ἡ E A πρὸς Γ A· τὸ ἄρα ὑπὸ Δ B, Γ A ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Z Θ, E A, τουτέστι τῷ ὑπὸ Θ Z M. τὸ δὲ ὑπὸ Θ Z M ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Z H, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ A B εἴδους· καὶ τὸ ὑπὸ Δ B, Γ A ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ A B εἴδους.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ′.

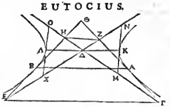
Ἐὰν ὑπερβολῆς εὐθεῖά τις ἐπιψαύῃ, ἀποτεμεῖ ἀπὸ τῶν ἀσυμπτώτων, πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, εὐθείας ἴσον περιεχούσας τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων εὐθειῶν ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης τῆς κατὰ τὴν πρὸς τῷ ἄξονι κορυφὴν τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩ ὑπερβολὴ ἡ A B, ἀσύμπτωτοι δὲ ἡ Γ Δ, Δ E, ἄξων δὲ ὁ B Δ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ B ἐφαπτομένη ἡ Z B H, ἄλλη δέ τις ὡς ἔτυχεν ἐφαπτομένη ἡ Γ A Θ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ Z Δ H ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ Γ Δ Θ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν A, B παρὰ μὲν τὴν Δ H αἱ A K, B Λ, παρὰ δὲ τὴν Γ Δ αἱ A M, B N. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ Γ A Θ, ἴση ἡ Γ A τῇ A Θ· ὥστε ἡ Γ Θ τῆς Θ A διπλῆ, καὶ ἡ Γ Δ τῆς A M, καὶ ἡ Δ Θ τῆς A K· τὸ ἄρα ὑπὸ Γ Δ Θ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ K A M. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται τὸ ὑπὸ Z Δ H τετραπλάσιον τοῦ ὑπὸ Λ B N. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ K A M τῷ ὑπὸ Λ B N· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ Γ Δ Θ τῷ ὑπὸ Z Δ H. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται κἂν ἡ Δ B ἑτέρα τις ᾖ διάμετρος, καὶ μὴ ἄξων.

ΠΡΟ-

EUTOCIUS.



Ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων, ἐὰν ἡ ΑΒ μὴ ἔρχηται διὰ τοῦ Δ κέντρου, ἤχθω διὰ τοῦ Δ παράλληλος τῇ ΕΓ ἡ ΛΔΚ, καὶ διὰ τῶν Κ, Λ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΜΚΝ, ΞΛΟ. ἔσται γὰρ ἂν γενήσεται τὸ ὑπὸ ΞΔΟ ἴσον τῷ ὑπὸ ΜΔΝ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΞΔΟ τῷ ὑπὸ ΕΔΗ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ὑπὸ ΜΔΝ τῷ ὑπὸ ΓΔΖ· καὶ τὸ ἄρα ὑπὸ ΕΔΗ ἴσον τῷ ὑπὸ ΓΔΖ.

In oppoſitis vero ſectionibus, ſi recta ΛΞ per centrum Δ non tranſeat, ducatur per Δ ipſi ΕΓ parallela ΛΔΚ, & per Κ, Λ ducantur ΜΚΝ, ΞΛΟ quæ ſectiones contingant. ſic enim fiet rectangulum ΞΔΟ æquale rectangulo ΜΔΝ. rectangulum autem ΞΔΟ [per 43. 3. huj.] rectangulo ΕΔΗ eſt æquale, & rectangulum ΜΔΗ æquale rectangulo ΓΔΖ: proinde rectangulum ΕΔΗ rectangulo ΓΔΖ æquale erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

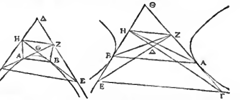
Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι ταῖς ἀσυμπτώτοις· αἱ ἐπὶ τὰς συμπτώσεις ἀγόμεναι παράλληλοι ἔσονται τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ.

Prop. XLIV. *Theor.*

Si duæ rectæ hyperbolam vel oppoſitas ſectiones contingentes aſymptotis occurrant; quæ ad occurſus ducuntur rectæ tactus conjungenti parallelæ erunt.

Ἔστω γὰρ ἡ ὑπερβολὴ, ἢ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΓΔ, ΔΕ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΑΘΖ, ΕΒΘΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΖΗ, ΓΕ· λέγω ὅτι παράλληλοί εἰσιν.

SIT hyperbola, vel oppoſitæ ſectiones Α, Β; aſymptoti vero ΓΔ, ΔΕ, & contingentes ΓΑΘΖ, ΕΒΘΗ; junganturque ΑΒ, ΖΗ, ΓΕ: dico eas inter ſe parallelas eſſe.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΓΔΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΗΔΕ, ἔστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς ΔΖ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΖΗ· καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΕ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΓ. ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, διπλῆ γὰρ ἑκατέρα· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΑΒ.

Quoniam enim [per 43. 3. huj.] rectangulum ΓΔΖ æquale eſt rectangulo ΗΔΕ; ut ΓΔ ad ΔΕ ita erit ΗΔ ad ΔΖ: parallela eſt igitur [per 2. 6.] ΓΕ ipſi ΖΗ; & ideo [per 4. 6.] ut ΘΗ ad ΗΕ ita ΘΖ ad ΖΓ. ut autem ΕΗ ad ΗΒ ita ΓΖ ad ΖΑ; utraque enim utriuſque eſt dupla: ergo ex æquali, ut ΘΗ ad ΗΒ ita ΘΖ ad ΖΑ: recta igitur ΖΗ ipſi ΑΒ eſt parallela.

EUTOCIUS.

Ἀποδεδειγμένων τῶν ΓΕ, ΖΗ παραλλήλων, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΑ, ΖΒ. ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΖΗ τῇ ΓΕ, ἴσον τὸ ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΕΗΖ τριγώνῳ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΓΗΖ τοῦ ΑΗΖ διπλάσιον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΑ, τὸ δὲ ΕΖΗ τοῦ ΒΗΖ διπλάσιον· ἴσον ἄρα τὸ ΑΗΖ τῷ ΒΗΖ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΑΒ.

Demonſtrato rectas ΓΕ, ΖΗ inter ſe parallelas, conjungantur ΗΑ, ΖΒ. quoniam parallelæ ſunt ΖΗ, ΓΕ, erit triangulum ΓΗΖ triangulo ΕΗΖ æquale. atque eſt triangulum quidem ΓΗΖ duplum trianguli ΑΗΖ, quia recta ΓΖ ipſius ΖΑ eſt dupla; triangulum vero ΕΖΗ duplum trianguli ΒΗΖ: ergo triangulum ΑΗΖ triangulo ΒΗΖ eſt æquale, & propterea recta ΖΗ ipſi ΑΒ parallela.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με'.

Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ, ἢ ἐλλείψει, ἢ κύκλου περιφερείᾳ, ἢ ταῖς ἀντικειμέναις, ἀπ' ἄκρου τοῦ ἄξονος ἀχθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴ-

Prop. XLV. *Theor.*

Si in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia, vel oppoſitis ſectionibus, ab extremo axis rectæ ad rectos angulos ducantur; & rectangu-

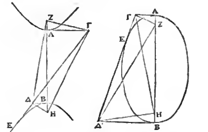
lum

lum æquale quartæ parti figuræ applicetur ad axem ab utraque parte, in hyperbola quidem & ſectionibus oppoſitis excedens figura quadrata, in ellipſi vero deficiens; & ducatur recta ſectionem contingens, occurrenſque eis quæ ſunt ad rectos angulos: rectæ quæ ab occurſibus ducuntur ad puncta ex applicatione facta angulos rectos ad dicta puncta efficient.

δὺς ἴσον παρὰ τὸν ἄξονα παραβληθῇ ἐφ' ἑκάτερα, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἐλλεῖπον, ἀχθῇ δέ τις εὐθεῖα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, συμπίπτουσα ταῖς πρὸς ὀρθὰς εὐθείαις· αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γενηθέντα σημεῖα, ὀρθὰς ποιοῦσι γωνίας πρὸς τοῖς εἰρημένοις σημείοις.

SIT aliqua dictarum ſectionum, cujus axis ΑΒ; & rectæ ΑΓ, ΒΔ ad rectos angulos ducantur; tangat autem ΓΕΔ, & rectangulum quartæ parti figuræ æquale applicetur ab utraque parte, ſicuti dictum eſt, videlicet rectangulum ΑΖΒ, & ΑΗΒ; & jungantur ΓΖ, ΓΗ, ΔΖ, ΔΗ: dico angulum ΓΖΔ, & angulum ΓΗΔ rectum eſſe.

ΕΣΤΩ μία τῶν εἰρημένων τομῶν ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, πρὸς ὀρθὰς δὲ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΕΔ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον παραβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, ὡς εἴρηται, τὸ ὑπὸ ΑΖΒ, καὶ τὸ ὑπὸ ΑΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΖ, ΓΗ, ΔΖ, ΔΗ· λέγω ὅτι ἥ τε ὑπὸ ΓΖΔ, καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΔ γωνία ὀρθή ἐστιν.



Quoniam enim [ad 42. 3. huj.] oſtenſum eſt rectangulum ſub ΑΓ, ΒΔ æquale eſſe quartæ parti figuræ quæ ad ΑΒ fit; atque eſt rectangulum ΑΖΒ æquale quartæ parti ejuſdem figuræ; rectangulum ſub ΑΓ, ΒΔ rectangulo ΑΖΒ æquale erit: ergo [per 16. 6.] ut ΓΑ ad ΑΖ ita ΖΒ ad ΒΔ. & ſunt anguli qui ad Α, Β recti: angulus igitur ΑΓΖ [per 6. 6.] angulo ΒΖΔ eſt æqualis; anguluſque ΑΖΓ æqualis angulo ΖΔΒ. & quoniam angulus ΓΑΖ eſt rectus, anguli ΑΓΖ, ΑΖΓ [per 32. 1.] uni recto æquales erunt. demonſtratum autem eſt angulum ΑΓΖ æqualem eſſe angulo ΔΖΒ: ergo ΓΖΑ, ΔΖΒ anguli uni recto ſunt æquales: angulus igitur ΔΖΓ rectus eſt. ſimiliter & angulus ΓΗΔ rectus demonſtrabitur.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐδείχθη τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΖ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Α, Β σημείοις γωνίαι· ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΖΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΖ ὀρθή ἐστιν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΖ, ΑΖΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΖ ἴση τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΖΑ, ΔΖΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί· ἡ ὑπὸ ΔΖΓ ἄρα ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΔ ὀρθή.

PROP. XLVI. *Theor.*

Iiſdem poſitis, rectæ dicto modo junctæ æquales facient angulos ad contingentes.

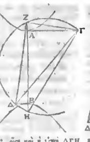
IISDEM namque poſitis; dico angulum ΑΓΖ angulo ΔΓΗ, & angulum ΓΔΖ angulo ΒΔΗ æqualem eſſe.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛʹ.

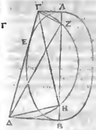
Τῶν αὐτῶν ὄντων, αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς ταῖς ἐφαπτομέναις.

ΤΩΝ γὰρ αὐτῶν ὑποκειμένων· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ.

Ἐπεὶ



Ἐπεὶ γὰρ ἐδείχθη ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΖΔ, ΓΗΔ γωνιῶν, ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΓΔ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν Ζ, Η σημείων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΗ γωνίᾳ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι τοῦ κύκλου εἰσίν. ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΓΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ γωνίᾳ ἴση.



Quoniam enim oſtendimus [in praeced.] utrumque angulorum ΓΖΔ, ΓΗΔ rectum eſſe, ſi circa diametrum ΓΔ circulus deſcribatur [per conv. 31. 3.] per puncta Z, H tranſibit: quare [per 21. 3.] angulus ΔΓΗ aequalis eſt angulo ΔΖΗ, quia ſunt in eadem circuli portione. angulus autem ΔΖΗ angulo ΑΓΖ eſt aequalis, ut [in praeced.] demonſtratum fuit: ergo & ΔΓΗ angulus aequalis erit angulo ΑΓΖ. eodem modo & angulus ΓΔΖ angulo ΒΔΗ aequalis oſtendetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἀγομένη πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ ἐφαπτομένῃ.

Ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι ΓΗ, ΖΔ κατὰ τὸ Θ, αἱ δὲ ΓΔ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ· λέγω ὅτι κάθετός ἐστιν ἡ ΕΘ ἐπὶ τὴν ΓΔ.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἡ ΘΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΛΘ ἴση· ὅμοιον ἄρα τὸ ΔΗΒ τρίγωνον τῷ ΛΘΔ· ὡς ἄρα ἡ ΗΔ πρὸς ΔΘ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΛ. ἀλλ' ὡς ἡ ΗΔ πρὸς ΔΘ οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς ΓΘ, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ζ, Η γωνίας, καὶ τὰς πρὸς τῷ Θ ἴσας. ὡς δὲ ἡ ΖΓ πρὸς ΓΘ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΛ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΖΓ, ΛΓΘ τριγώνων· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς ΔΛ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΛ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΒ πρὸς ΓΑ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΕΜ· τεταγμένως ἄρα ἐστὶ κατηγμένη ἐπὶ τὴν ΑΒ, καὶ ἔσται ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ οὕτως ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ. ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ· καὶ ὡς

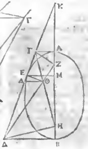
Prop. XLVII. *Theor.*

Iiſdem poſitis, recta ab occurſu junctarum ad tactum ducta perpendicularis erit ſuper contingentem.

PONANTUR eadem quae prius; & rectae lineae ΓΗ, ΖΔ ſibi ipſis occurrant in puncto Θ; rectae vero ΓΔ, ΒΑ productae occurrant in puncto Κ; jungaturque ΕΘ: dico ΕΘ ſuper ΓΔ perpendicularem eſſe.

Si enim non ita ſit; ducatur à puncto Θ ad ΓΔ perpendicularis ΘΛ. quoniam igitur angulus ΓΔΖ aequalis eſt [per praeced.] angulo ΗΔΒ, & angulus ΔΒΗ rectus aequalis recto ΔΛΘ; triangulum ΔΗΒ triangulo ΛΘΔ ſimile erit: quare [per 4. 6.] ut ΗΔ ad ΔΘ ita ΒΔ ad ΔΛ. ſed ut ΗΔ ad ΔΘ ita ΖΓ ad ΓΘ, propterea quod [ex praec.] anguli ad Z, H recti, & qui ad Θ aequales ſunt. eſt autem ut ΖΓ ad ΓΘ ita ΑΓ ad ΓΛ, ob ſimilitudinem triangulorum ΑΖΓ, ΛΓΘ: ut igitur ΒΔ ad ΔΛ ita [per 11. 5.] ΑΓ ad ΓΛ: & permutando ut ΔΒ ad ΓΑ ita ΔΛ ad ΛΓ. ut autem ΔΒ ad ΓΑ ita ΒΚ ad ΚΑ: ergo ut ΔΛ ad ΛΓ ita ΒΚ ad ΚΑ. à puncto Ε ducatur recta ΕΜ ipſi ΑΓ parallela, quae proinde ad ΑΒ ordinatim applicata erit; & ut ΒΚ ad ΚΑ ita erit [per 36. 1. huj.] ΒΜ ad ΜΑ. ſed [per 4. 6.] ut ΒΜ ad ΜΑ ita ΔΕ ad ΕΓ: quare [per 11. 5.] ut ΔΛ





ΔΛ ad ΑΓ ita erit ΔΕ ad ΕΓ; quod eſt abſurdum. igitur ΘΛ non eſt perpendicularis ad ΔΓ, neque alia ulla præter ipſam ΘΕ.

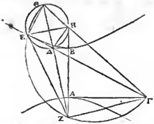
ἄρα ἡ ΔΛ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΘΛ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΓ, οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΘΕ.

Prop. XLVIII. *Theor.*

Iiſdem poſitis, oſtendendum eſt rectas, quæ à tactu ducuntur ad puncta ex applicatione facta, æquales continere angulos cum contingente.

PONANTUR eadem quæ prius; & jungantur ΒΖ, ΒΗ: dico angulum ΓΒΖ angulo ΗΒΔ æqualem eſſe.

Quoniam enim [per 46. & 47. 3. huj.] anguli ΔΗΘ, ΔΒΘ recti ſunt, circulus circa diametrum ΔΘ deſcriptus per puncta Β, Η tranſibit: quare [per 21. 3.] angulus ΔΘΗ æqualis erit angulo ΔΒΗ; in eodem enim circuli ſegmento ſunt. ſimiliter & ΓΒΖ angulus angulo ΓΘΖ eſt æqualis: angulus autem ΓΘΖ angulo ΔΘΗ [per 15. 1.] æqualis eſt; quia ſunt ad verticem: angulus igitur ΓΒΖ angulo ΔΒΗ æqualis erit.

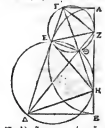


ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, δεικτέον ὅτι αἱ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γινόμενα σημεῖα ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ.

ΥΠΟΚΕΙΣΘΩ τὰ αὐτὰ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΕΗ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΕΔ.

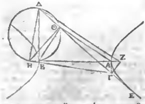
Ἐπεὶ γὰρ ὀρθαί εἰσιν αἱ ὑπὸ ΔΗΘ, ΔΕΘ γωνίαι, ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΔΘ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν Ε, Η σημείων· ὥστε ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΔΘΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΗ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΖ τῇ ὑπὸ ΓΘΖ ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ ὑπὸ ΓΘΖ τῇ ὑπὸ ΔΘΗ ἐστὶν ἴση, κατὰ κορυφὴν γάρ. καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστὶν ἴση.



Prop. XLIX. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſi ab aliquo horum punctorum perpendicularis ad contingentem demittatur: quæ à puncto quo cadit cathetus ducuntur ad axis utramque extremitatem rectos angulos inter ſe continebunt.

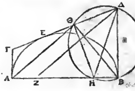
PONANTUR eadem, & à puncto Η ad ΓΔ ducatur perpendicularis ΗΘ; & jungantur ΑΘ, ΒΘ: dico angulum ΑΘΒ rectum eſſe.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἀπό τινος τῶν σημείων κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην· αἱ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὰ πέρατα τοῦ ἄξονος ὀρθὰς ποιοῦσι γωνίας.

ΥΠΟΚΕΙΣΘΩ γὰρ τὰ αὐτὰ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΒΘ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΑΘΒ γωνία ὀρθή ἐστιν.



Ἐπεὶ

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΘΗ, ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΔΗ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν Θ, Β, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΗΘΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΗ. ἡ δὲ ὑπὸ ΑΗΓ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΗΓ, τουτέστι τῇ ὑπὸ ΑΘΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΓΘΗ τῇ ὑπὸ ΑΘΒ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΓΘΗ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΘΒ.

Quoniam enim angulus ΔBH & ΔΘH eſt rectus; ſi circa diametrum ΔH circulus deſcribatur, tranſibit per puncta Θ, B, & [per 21.3.] angulus HΘB angulo BΔH æqualis erit. angulus autem AHΓ oſtenſus eſt [per 45. 3. huj.] æqualis angulo BΔH: ergo HΘB angulus æqualis eſt angulo AHΓ, hoc eſt angulo AΘΓ: & propterea angulus ΓΘH angulo AΘB. ſed rectus eſt [ex hyp.] angulus ΓΘH: ergo & AΘB rectus erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν′.

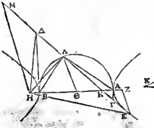
Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς προσπέσῃ τις τῇ ἐφαπτομένῃ, παράλληλος οὖσα τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ ἑνὸς τῶν σημείων ἐκ τῆς παραβολῆς· ἡ ἠγμένη εὐθεῖα ἴση ἔσται τῇ ἡμισείᾳ τοῦ ἄξονος.

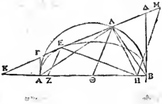
Ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ, καὶ αἱ ΔΓ, ΒΑ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΕΖ ἤχθω ἡ ΘΛ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΛ τῇ ΘΒ.

Prop. L. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſi à centro ſectionis ducatur recta contingenti occurrens, ac parallela ei quæ per tactum & per alterutrum punctorum ex applicatione ducitur: erit ea dimidio axis æqualis.

Sint eadem quæ ſupra, & centrum ſit Θ; jungatur autem EZ, & rectæ ΔΓ, BA inter ſe conveniant in K; & per Θ ducatur ΘΛ parallela ipſi EZ: dico ΘΛ ipſi ΘB æqualem eſſe.





Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΕΗ, ΑΛ, ΛΗ, ΛΒ, καὶ διὰ τοῦ Η παρὰ τὴν ΕΖ ἤχθω ἡ ΗΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΗΒ· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΗΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΘ ἄρα τῇ ΘΗ ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΜ ἴση. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΓΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΜΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΜΗ τῇ ὑπὸ ΜΕΗ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΗ τῇ ΗΜ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΛ τῇ ΛΜ ἐδείχθη ἴση· κάθετος ἄρα ἡ ΗΛ ἐπὶ τὴν ΕΜ. ἔστι δὲ, διὰ τὸ προδειχθὲν, ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΛΒ γωνία· καὶ ὁ ἄρα περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τοῦ Λ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΘΛ τῇ ΘΒ· καὶ ἡ ΘΛ ἄρα, ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα τοῦ ἡμικυκλίου, ἴση ἐστὶ τῇ ΘΒ.

Jungantur enim EH, AΛ, ΛH, ΛB; & per H ducatur HM parallela ipſi EZ. quoniam igitur rectangulum AZB eſt æquale rectangulo AHB, recta AZ ipſi HB æqualis erit. eſt autem & AΘ æqualis ΘB: ergo & ZΘ ipſi ΘH; & propterea EΛ ipſi ΛM eſt æqualis. itaque quoniam demonſtratum eſt [ad 48. 3. huj.] angulum ΓEZ angulo ΔEH æqualem eſſe; eſtque angulus ΓEZ [per 29.1.] æqualis angulo EMH: erit & angulus EMH ipſi MEH æqualis, & recta EH ipſi HM. ſed & EΛ eſt æqualis ipſi ΛM, uti demonſtravimus: recta igitur HΛ ad EM perpendicularis eſt. eſt autem [per 49. 3. huj.] & angulus AΛB rectus: quare ſi circa diametrum AB circulus deſcribatur, per Λ tranſibit. atque eſt ΘΛ æqualis ipſi ΘB: ergo & ΘΛ, quæ eſt ex centro circuli, ipſi ΘB æqualis erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ να′.

Ἐὰν ὑπερβολῆς, ἢ τῶν ἀντικειμένων παρὰ τὸν ἄξονα ἴσον ἐφ' ἑκάτερα παραβληθῇ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ

Prop. LI. *Theor.*

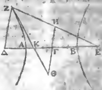
Si in hyperbola, vel oppoſitis ſectionibus applicetur ad axem rectangulum æquale quartæ parti figuræ excedens figurâ quadratâ;

drata; & à punctis ex applicatione factis ad alterutram ſectionum rectæ lineæ inclinentur: major minorem quantitate axis ſuperabit.

ἀπὸ τῶν γενομένων ἐκ τῆς παραβολῆς σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ὁποτέραν τῶν τομῶν· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος ὑπερέχει τῷ ἄξονι.

SIT hyperbola, vel oppoſitæ ſectiones, quarum axis ΑΒ, centrumque Γ; & quartæ parti figuræ æquale ſit utrumque rectangulorum ΑΔΒ, ΑΕΒ; & à punctis Ε, Δ ad ſectionem inclinentur ΕΖ, ΖΔ: dico ΕΖ ipſam ΖΔ ſuperare quantitate ΑΒ.

Ducatur enim per Ζ recta ΖΚΘ ſectionem contingens, & per Γ ducatur ΗΓΘ parallela ipſi ΖΔ: erit igitur angulus ΚΘΗ angulo ΚΖΔ æqualis; alterni enim ſunt. angulus vero ΚΖΔ [per 48.3.huj.] æqualis eſt angulo ΗΖΘ: ergo & ΗΖΘ ipſi ΗΘΖ, rectaque ΗΖ ipſi ΗΘ. ſed [per 2.6.] recta ΖΗ ipſi ΗΕ æqualis eſt; quia ΑΕ æqualis eſt ΔΒ, & ΑΓ ipſi ΓΒ, & ΕΓ ipſi ΓΔ: eſt igitur recta ΗΘ æqualis ipſi ΕΗ; & ob id ΖΕ ipſius ΗΘ dupla. itaque quoniam demonſtrata eſt [ad 50. 3. huj.] ΓΘ ipſi ΓΒ æqualis; erit ΕΖ utriuſque ΗΓ, ΓΒ dupla. ſed ipſius quidem ΗΓ dupla eſt ΖΔ; ipſius vero ΓΒ dupla ΑΒ: recta igitur ΕΖ utrique ΖΔ, ΑΒ eſt æqualis; & propterea ΕΖ ipſam ΖΔ ſuperat quantitate ΑΒ.



Ἔστω γὰρ ὑπερβολή, ἢ ἀντικείμεναι, ὧν ἄξων ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον ἔστω ἑκάτερον τῶν ὑπὸ ΑΔΒ, ΑΕΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Δ σημείων κεκλάσθωσαν πρὸς τὴν γραμμὴν αἱ ΕΖ, ΖΔ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ τῆς ΖΔ ὑπερέχει τῇ ΑΒ.

Ἤχθω διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένη ἡ ΖΚΘ, διὰ δὲ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΖΔ ἡ ΗΓΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΘΗ τῇ ὑπὸ ΚΖΔ, ἐναλλὰξ γάρ. ἡ δὲ ὑπὸ ΚΖΔ ἴση τῇ ὑπὸ ΗΖΘ· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΘ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ· ἴση ἄρα ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ. ἡ δὲ ΖΗ τῇ ΗΕ ἴση, ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΔ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ καὶ ἡ ΕΓ τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση· ὥστε ἡ ΖΕ τῆς ΗΘ ἐστὶ διπλῆ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΘ ἴση δέδεικται τῇ ΓΒ, ἡ ΕΖ ἄρα διπλῆ ἐστι συναμφοτέρου τῆς ΗΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τῆς μὲν ΗΓ διπλῆ ἡ ΖΔ, τῆς δὲ ΓΒ διπλῆ ἡ ΑΒ· ἡ ΕΖ ἄρα ἴση ἐστὶ συναμφοτέροις τῇ ΖΔ, ΑΒ, ὥστε ἡ ΕΖ τῆς ΖΔ ὑπερέχει τῇ ΑΒ.

Prop. LII. *Theor.*

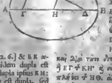
Si in ellipſi ad majorem axem ab utraque parte applicetur rectangulum æquale quartæ parti figuræ deficiens figura quadrata; & à punctis ex applicatione factis ad ſectionem rectæ lineæ inclinentur: ipſi axi æquales erunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

Ἐὰν ἐλλείψεως παρὰ τὸν μείζονα τῶν ἀξόνων τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον ἐφ' ἑκάτερα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων ἐκ τῆς παραβολῆς σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὴν γραμμήν· ἴσαι ἔσονται τῷ ἄξονι.

SIT ellipſis, cujus major axis ΑΒ; & ſit utrumque rectangulorum ΑΓΒ, ΑΔΒ æquale quartæ parti figuræ; & à punctis Γ, Δ ad ſectionem inclinentur rectæ lineæ ΓΕ, ΕΔ: dico ΓΕ, ΕΔ axi ΑΒ æquales eſſe.

Ducatur enim contingens ΖΕΘ; & per centrum, quod ſit Η, ducatur ΗΚΘ ipſi ΓΕ parallela. quoniam igitur angulus ΓΕΖ [per 48. 3. huj.] eſt æqualis angulo ΘΕΚ, & [per 29.1.] angulus ΖΕΓ angulo ΕΘΚ; erit angulus ΕΘΚ ipſi ΘΕΚ æqualis, & [per 6. 1.] recta ΘΚ æqualis ipſi ΚΕ. & quoniam ΑΗ eſt æqualis ipſi ΗΒ, & ΓΑ ipſi ΔΒ; erit & ΓΗ ipſi ΗΔ æqualis: ergo [per 2. 6.] & ΕΚ æqualis ipſi ΚΔ. & ob id ΕΔ quidem dupla eſt ipſius ΘΚ; ut & ΕΓ [per 4.6.] dupla ipſius ΚΗ: utraque igitur ΓΕ, ΕΔ ipſius ΗΘ eſt dupla. ſed ΑΒ [per 50.3.huj.] dupla eſt ipſius ΗΘ: quare ΑΒ ipſis ΓΕ, ΕΔ æqualis erit.



Ἔστω ἔλλειψις, ἧς μείζων τῶν ἀξόνων ὁ ΑΒ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἑκάτερον ἴσον ἔστω τῶν ὑπὸ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ κεκλάσθωσαν πρὸς τὴν γραμμὴν αἱ ΓΕ, ΕΔ· λέγω ὅτι αἱ ΓΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΒ.

Ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΖΕΘ, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ Η παρὰ τὴν ΓΕ ἡ ΗΚΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΖ τῇ ὑπὸ ΘΕΚ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΚ· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΘΕΚ ἐστὶν ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ ἴση, καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΔΒ· καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΔ ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΚΔ. καὶ διὰ τοῦτο διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΕΔ τῆς ΘΚ, ἡ δὲ ΕΓ τῆς ΚΗ· καὶ συναμφότερος ἄρα ἡ ΓΕ, ΕΔ διπλῆ ἐστι τῆς ΗΘ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ διπλῆ τῆς ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ ταῖς ΓΕ, ΕΔ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

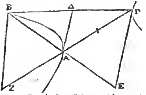
Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ, ἢ ἐλλείψει, ἢ κύκλου περιφερείᾳ, ἢ ταῖς ἀντικειμέναις, ἀπ' ἄκρας τῆς διαμέτρου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ ἀπὸ τῶν αὐτῶν περάτων πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους· τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ εἴδει.

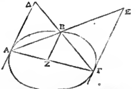
Prop. LIII. *Theor.*

Si in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circumferentia, vel ſectionibus oppoſitis, ab extremis diametri ducantur rectæ ordinatim applicatis parallelæ; & ab iiſdem terminis ad idem ſectionis punctum rectæ ductæ occurrant parallelis: rectangulum ſub abſciſſis factum æquale erit figuræ quæ ad eandem diametrum conſtituitur.

Ἔστω μία τῶν εἰρημένων τομῶν ἡ ΑΒΓ, ἧς διάμετρος ἡ ΑΓ, καὶ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθωσαν αἱ ΑΔ, ΓΕ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΒΕ, ΓΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ εἴδει τῷ πρὸς τῇ ΑΓ.

SIT quævis dictarum ſectionum ΑΒΓ, cujus diameter ΑΓ; ducanturque ΑΔ, ΓΕ ordinatim applicatis parallelæ, & ΑΒΕ, ΓΒΔ producantur: dico rectangulum contentum ſub ΑΔ, ΕΓ figuræ quæ fit ad ΑΓ æquale eſſe.





Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΒΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΒ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ εἶδος. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΑΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΖ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΑΖ πρὸς ΖΒ καὶ τοῦ τῆς ΓΖ πρὸς ΖΒ· ὁ ἄρα τοῦ εἴδους πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΖΒ πρὸς ΑΖ καὶ τοῦ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΓ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς ΑΖ οὕτως ἡ ΕΓ πρὸς ΓΑ, ὡς δὲ ἡ ΒΖ πρὸς ΖΓ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΓ· ὁ ἄρα τοῦ εἴδους πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΓΕ πρὸς ΓΑ καὶ τοῦ τῆς ΑΔ πρὸς ΓΑ. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον ἐκ τῶν αὐτῶν· ὡς ἄρα τὸ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΓΕ τῷ παρὰ τὴν ΑΓ εἴδει.

A puncto enim B ordinatim applicetur recta ΒΖ: ergo [per 21. 1. huj.] ut rectangulum ΑΖΓ ad quadratum ex ΖΒ ita tranſverſum figuræ latus ad rectum; & [per 1. 6] ita quadratum ex ΑΓ ad ipſius figuram. ſed [per 23. 6.] rectanguli ΑΖΓ ad quadratum ex ΒΖ ratio componitur ex ratione ΑΖ ad ΖΒ & ratione ΓΖ ad ΖΒ: ergo ratio figuræ ad quadratum ex ΑΓ componitur ex ratione ΖΒ ad ΑΖ & ratione ΒΖ ad ΖΓ. ſed ut ΖΒ ad ΑΖ ita ΕΓ [per 4. 6.] ad ΓΑ, & ut ΒΖ ad ΖΓ ita ΔΑ ad ΑΓ: ratio igitur figuræ ad quadratum ex ΑΓ componitur ex ratione ΓΕ ad ΓΑ & ratione ΑΔ ad ΓΑ. ſed [per 23. 6.] rectangulum contentum ſub ΑΔ, ΓΕ ad quadratum ex ΑΓ ex eiſdem rationibus componitur: ergo ut figura ad quadratum ex ΑΓ ita eſt rectangulum contentum ſub ΑΔ, ΓΕ ad quadratum ex ΑΓ: rectangulum igitur contentum ſub ΑΔ, ΓΕ æquale erit figuræ quæ fit ad ΑΓ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, διὰ δὲ τῶν ἁφῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς διαχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰς ἁφὰς τετράγωνον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον, ἐκ τοῦ

Prop. LIV. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ coni ſectionem vel circuli circumferentiam contingentes ſibi ipſis occurrant, & per tactus ducantur contingentibus parallelæ; à tactibus vero ad idem ſectionis punctum ductæ rectæ parallelis occurrant: rectangulum ſub abſciſſis ad quadratum rectæ tactus jungentis rationem habebit compoſitam, ex ratione quam habet quadratum portionis rectæ

Digitized by Google

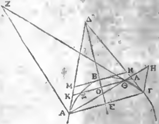
rectæ ab occurſu contingentium ad punctum medium jungentis tactus ductæ quæ eſt intra ſectionem ad reliquæ portionis quadratum, & ex ratione quam habet rectangulum ſub contingentibus contentum ad quartam partem quadrati ejus quæ tactus conjungit.

ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς ἐπιζευγνυούσης τὴν σύμπτωσιν τῶν ἐφαπτομένων καὶ τὴν διχοτομίαν τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τὸ ἐντὸς τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν δυνάμει, καὶ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετραγώνου.

SIT coni ſectio, vel circuli circumferentia ΑΒΓ, quam contingant rectæ lineæ ΑΔ, ΓΔ; & juncta ΑΓ bifariam in puncto Β dividatur, jungaturque ΔΒΕ; à puncto autem Α ducatur recta ΑΖ ipſi ΓΔ parallela, & à puncto Γ recta ΓΗ parallela ipſi ΑΔ; denique ſumpto in ſectione quovis puncto Θ, jungantur ΑΘ, ΓΘ, & ad puncta Η, Ζ producantur: dico rectangulum contentum ſub ΑΖ, ΓΗ ad quadratum ex ΑΓ rationem habere compoſitam, ex ratione quadrati ex ΕΒ ad quadratum ex ΒΔ & ratione rectanguli ΑΔΓ ad quartam partem quadrati ex ΑΓ, hoc eſt ad rectangulum ΑΕΓ.

ΕΣΤΩ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΔ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΓ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒΕ, καὶ ἤχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Α παρὰ τὴν ΓΔ ἡ ΑΖ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΔ ἡ ΓΗ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΘ, ΓΘ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Η, Ζ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΑΔΓ πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΕΓ.

Ducatur enim à puncto quidem Θ recta ΘΚΛΞΟ; à puncto autem Β recta ΒΜΝ, quæ ipſi ΑΓ parallelæ ſint: perſpicuum eſt [per 32. 1. huj.] rectam ΜΝ ſectionem contingere. & cum ΑΕ ſit æqualis ipſi ΕΓ; erit & ΜΒ ipſi ΒΝ æqualis, & ΚΟ ipſi ΟΛ, & [per 46. & 47. 1. huj.] ΘΟ ipſi ΟΞ, & ΚΘ ipſi ΞΛ. itaque quoniam ΜΒ, ΜΑ ſectionem contingunt, & ipſi ΜΒ parallela ducta eſt ΚΘΛ; erit [per 16. 3. huj.] ut quadratum ex ΑΜ ad quadratum ex ΜΒ, hoc eſt ad rectangulum ΝΒΜ, ita quadratum ex ΑΚ ad rectangulum ΞΚΘ, hoc eſt ad rectangulum ΛΘΚ. ut autem ΝΓ ad ΑΜ ita ΑΓ ad ΚΑ: ut igitur rectangulum ſub ΝΓ, ΜΑ ad quadratum ex ΑΜ ita rectangulum ſub ΑΓ, ΚΑ ad quadratum ex ΑΚ: ergo ex æquali ut rectangulum ſub ΝΓ, ΜΑ ad rectangulum ΝΒΜ ita rectangulum ſub ΑΓ, ΚΑ ad rectangulum ΛΘΚ. ſed [per 23. 6.] rectangulum ſub ΑΓ, ΚΑ ad rectangulum ΛΘΚ rationem habet compoſitam ex ratione ΓΑ ad ΛΘ, hoc eſt [per 4. 6.] ΖΑ ad ΑΓ, & ratione ΑΚ ad ΚΘ, hoc eſt ΗΓ ad ΓΑ, atque hæc eadem eſt ratio quæ rectanguli ſub ΗΓ, ΖΑ ad quadratum ex ΓΑ: ut igitur rectangulum ſub ΝΓ, ΜΑ ad rectangulum ΝΒΜ ita rectangulum ſub ΗΓ, ΖΑ ad quadratum ex ΓΑ. rectangulum vero ſub ΝΓ, ΜΑ ad rectangulum ΝΒΜ, (ſumpto medio rectangulo ΝΔΜ) habet rationem compoſitam, ex ratione rectanguli ſub ΝΓ, ΜΑ ad rectangulum ΝΔΜ & ratione rectanguli ΝΔΜ ad rectangulum ΝΒΜ: ergo & rectangulum ſub ΗΓ, ΖΑ ad quadratum ex ΓΑ habet rationem compoſitam ex ratione rectanguli ſub ΝΓ, ΜΑ ad rectangulum ΝΔΜ & ratione re-



Ἤχθω ἀπὸ μὲν τοῦ Θ παρὰ τὴν ΑΓ ἡ ΘΚΛΞΟ, ἀπὸ δὲ τοῦ Β ἡ ΒΜΝ· φανερὸν δὴ ὅτι ἐφάπτεται ἡ ΜΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ· ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΜΒ τῇ ΒΝ, καὶ ἡ ΚΟ τῇ ΟΛ, καὶ ἡ ΘΟ τῇ ΟΞ, καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΞΛ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ ΜΒ, ΜΑ, καὶ παρὰ τὴν ΜΒ ἦκται ἡ ΚΘΛ· ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΝΒΜ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΚΘ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΛΘΚ. ὡς δὲ ἡ ΝΓ πρὸς ΑΜ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΚΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΑ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΚ. τὸ δὲ ὑπὸ ΑΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΘΚ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς ΛΘ, τουτέστι τῆς ΖΑ πρὸς ΑΓ, καὶ τοῦ τῆς ΑΚ πρὸς ΚΘ, τουτέστι τῆς ΗΓ πρὸς ΓΑ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΗΓ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΓ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ. τὸ δὲ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ (τοῦ ὑπὸ ΝΔΜ μέσου λαμβανομένου) τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ καὶ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΓ, ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἐκ τοῦ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ καὶ τοῦ ὑπὸ ΝΔΜ

πρὸς

πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ. [b] ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, [c] ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΓ, ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ καὶ τοῦ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ.

ctanguli ΝΔΜ ad rectangulum ΝΒΜ: [b] ſed ut rectangulum ſub ΝΓ, ΜΑ ad rectangulum ΝΔΜ ita quadratum ex ΕΒ ad quadratum ex ΒΔ; [c] & ut rectangulum ΝΔΜ ad rectangulum ΝΒΜ ita rectangulum ΓΔΑ ad rectangulum ΓΕΑ: rectangulum igitur ſub ΗΓ, ΑΖ ad quadratum ex ΑΓ compoſitam rationem habet ex ratione quadrati ex ΕΒ ad quadratum ex ΒΔ & ratione rectanguli ΓΔΑ ad rectangulum ΓΕΑ.

EUTOCIUS.

[a] Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΑ.] Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΜ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΔΝ, ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΜ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΓΝ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ἀνάπαλιν ἔστιν ὡς ἡ ΚΑ πρὸς ΑΔ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΔ· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΜΑ πρὸς ΑΚ οὕτως ἡ ΝΓ πρὸς ΓΑ, ἐναλλὰξ δὲ ὡς ἡ ΜΑ πρὸς ΝΓ οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς ΓΑ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΑ.

[b] Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΝΓ, ΜΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.] Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΜ, ΓΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΜ πρὸς ΜΔ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΓΝ πρὸς ΝΔ, ἀλλ' ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΔ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς ΒΔ, ὡς δὲ ἡ ΓΝ πρὸς ΝΔ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΜ, ΓΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΒ πρὸς ΒΔ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ διπλασίονα λόγον τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΒ πρὸς ΒΔ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΜ, ΓΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΜ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.

[c] Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ.] Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΝ πρὸς ΝΒ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΜ πρὸς ΜΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΝ πρὸς ΝΒ οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΒ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΕ· ἔχει ἄρα τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς ΓΕ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΑ πρὸς ΑΕ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΒΜ οὕτως τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ.

[a] Ut autem rectangulum ſub ΝΓ, ΜΑ ad quadratum ex ΑΜ ita rectangulum ſub ΑΓ, ΚΑ ad quadratum ex ΒΑ.] Quoniam enim ut ΑΔ ad ΔΜ ita ΓΔ ad ΔΝ, erit per converſionem rationis ut ΔΑ ad ΑΜ ita ΔΓ ad ΓΝ; eadem quoque ratione & invertendo demonſtrabitur ut ΚΑ ad ΑΔ ita ΑΓ ad ΓΔ: ergo ex æquali ut ΜΑ ad ΑΚ ita ΝΓ ad ΓΑ, & permutando ut ΜΑ ad ΝΓ ita ΚΑ ad ΓΑ: ut igitur rectangulum ſub ΝΓ, ΜΑ ad quadratum ex ΑΜ ita rectangulum ſub ΑΓ, ΚΑ ad quadratum ex ΚΑ.

[b] Sed ut rectangulum ſub ΝΓ, ΜΑ ad rectangulum ΝΔΜ ita quadratum ex ΕΒ ad quadratum ex ΒΔ.] Nam cum rectangulum ſub ΑΜ, ΓΝ ad rectangulum ΝΔΜ compoſitam rationem habeat ex ratione ΑΜ ad ΜΔ & ratione ΓΝ ad ΝΔ; ut autem ΑΜ ad ΜΑ ita ΕΒ ad ΒΔ, ut vero ΓΝ ad ΝΔ ita ΕΒ ad ΒΔ: habebit igitur rectangulum ſub ΑΜ, ΓΝ ad rectangulum ΝΔΜ rationem duplicatam ejus quam habet ΕΒ ad ΒΔ. ſed quadratum ex ΕΒ ad quadratum ex ΒΔ duplicatam habet rationem ipſius ΕΒ ad ΒΔ: quare ut rectangulum ſub ΑΜ, ΓΝ ad rectangulum ΝΔΜ ita quadratum ex ΕΒ ad quadratum ex ΒΔ.

[c] Et ut rectangulum ΝΔΜ ad rectangulum ΝΒΜ ita rectangulum ΓΔΑ ad rectangulum ΓΕΑ.] Quoniam enim rectangulum ΝΔΜ ad rectangulum ΝΒΜ rationem habet compoſitam ex ratione ΔΝ ad ΝΒ & ratione ΔΜ ad ΜΒ; ut autem ΔΝ ad ΝΒ ita ΔΓ ad ΓΕ, & ut ΔΜ ad ΜΒ ita ΔΑ ad ΑΕ: habebit igitur rationem compoſitam ex ratione ΔΓ ad ΓΕ & ratione ΔΑ ad ΑΕ; quæ quidem ratio eadem eſt quam rectangulum ΓΔΑ habet ad rectangulum ΓΕΑ. ut igitur rectangulum ΝΔΜ ad rectangulum ΝΒΜ ita rectangulum ΓΔΑ ad rectangulum ΓΕΑ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν διαχθῶσι παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις, προσβληθῶσι δὲ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἑτέρας τομῆς τέμνουσαι τὰς παραλλήλους· τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς συμπτώσεως παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν ἕως τῆς τομῆς.

Prop. LV. *Theor.*

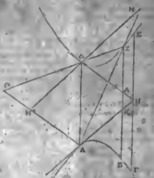
Si duæ rectæ lineæ oppoſitas ſectiones contingentes ſibi ipſis occurrant, & per occurſum ducatur recta jungenti tactus parallela; per tactus vero ducantur contingentibus parallelæ, & à tactibus ad idem alterutræ ſectionis punctum ducantur rectæ quæ parallelas ſecent: rectangulum ſub abſciſſis contentum ad quadratum ejus quæ tactus jungit eandem rationem habebit, quam rectangulum ſub contingentibus factum ad quadratum rectæ ab occurſu ad ſectionem ductæ jungentique tactus parallelæ.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΗ, ΗΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Η παρὰ τὴν ΑΔ ἤχθω ἡ ΓΗΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΔΗ ἡ ΑΜ,

SINT oppoſitæ ſectiones ΑΒΓ, ΔΕΖ, quas contingant rectæ ΑΗ, ΗΔ; & juncta ΑΔ ducatur per Η recta ΓΗΕ ipſi ΑΔ parallela; & à puncto Α ducatur ΑΜ parallela ipſi ΔΗ, atque

atque à Δ recta ΔM ipſi AH parallela. ſumatur autem in ſectione ΔZ aliquod punctum Z, & jungantur AZN, ZΔΘ: dico rectangulum ſub AΘ, NΔ eſſe ad quadratum ex AΔ ſicut rectangulum AHΔ ad quadratum ex ΓH.

ἀπὸ δὲ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΑΗ ἡ ΔΜ· εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔΖ τομῆς τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖΝ, ΖΔΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ.



Ducatur per Z recta ZΛKB quæ ipſi AΔ æquidiſtet. quoniam igitur demonſtratum eſt [ad 20.3.huj.] ut quadratum ex EH ad quadratum ex HΔ ita rectangulum BΛZ ad quadratum ex ΛΔ; & eſt ΓH æqualis EH, & KZ ipſi BΛ: erit ut quadratum ex ΓH ad quadratum ex HΔ ita rectangulum KZΛ ad quadratum ex ΛΔ. eſt autem ut quadratum ex ΔH ad rectangulum ΔHA ita quadratum ex ΔΛ ad rectangulum ſub ΔΛ, AK: ergo ex æquali ut quadratum ex ΓH ad rectangulum ΔHA ita rectangulum KZΛ ad rectangulum ſub ΔΛ, AK. ſed ratio rectanguli KZΛ ad rectangulum ſub AK, ΔΛ componitur ex ratione ZK ad KA & ratione ZΛ ad ΛΔ; ut autem ZK ad KA ita [per 4. 6.] AΔ ad ΔN, & ut ZΛ ad ΛΔ ita ΔA ad AΘ: ratio igitur quadrati ex ΓH ad rectangulum ΔHA compoſita eſt ex ratione AΔ ad ΔN & ratione ΔA ad AΘ. ſed quadrati ex AΔ ad rectangulum ſub AΘ, NΔ ratio ex eiſdem rationibus componitur: ergo ut quadratum ex ΓH ad rectangulum AHΔ ita eſt quadratum ex AΔ ad rectangulum ex AΘ, NΔ; & invertendo rectangulum ſub AΘ, NΔ erit ad quadratum ex AΔ ut rectangulum AHΔ ad quadratum ex ΓH.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΑΔ ἡ ΖΛΚΒ. ἐπεὶ οὖν δέδεικται ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΛΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΕΗ, ἡ δὲ ΚΖ τῇ ΒΛ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΖΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΔ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΔΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΛ, ΑΚ· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ οὕτως τὸ ὑπὸ ΚΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΛ, ΑΚ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΚΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΔΛ λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ τῆς ΖΚ πρὸς ΚΑ καὶ τοῦ τῆς ΖΛ πρὸς ΛΔ· ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΖΚ πρὸς ΚΑ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΝ, ὡς δὲ ἡ ΖΛ πρὸς ΛΔ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΘ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΑΔ πρὸς ΔΝ καὶ τοῦ τῆς ΔΑ πρὸς ΑΘ. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΝΔ λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΝΔ· καὶ ἀνάπαλιν τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ.

Prop. LVI. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ alteram oppoſitarum ſectionum contingentes ſibi ipſis occurrant, & per tactus ducantur contingentibus parallelæ; à tactibus vero ad idem alterius ſectionis punctum ducantur rectæ, quæ parallelas ſecent: rectangulum ſub abſciſſis contentum ad quadratum rectæ tactus jungentis rationem habebit, compoſitam ex ratione quam habet quadratum portionis rectæ ab occurſu contingentium ad punctum medium jungentis tactus ductæ inter punctum illud & alteram ſectionem interceptæ ad quadratum ejus quæ inter eandem ſectionem & occurſum, & ex ratione quam habet rectangulum ſub contin-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛ'.

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, διὰ δὲ τῶν ἁφῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἑτέρας τομῆς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων λόγον ἕξει πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετράγωνον, τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει (τῆς ἐπιζευγνυούσης τὴν σύμπτωσιν καὶ τὴν διχοτομίαν) ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς ἑτέρας τομῆς πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς αὐτῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως δυνάμει, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον

ὀρθο-

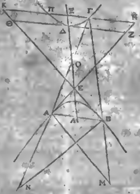
πρὸς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης.

gentibus factum ad quartam partem quadrati tactus jungentis.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ὧν κέντρον τὸ Ο, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΕΖΗ, ΒΕΘΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΒ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΛΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὴν ΒΕ ἡ ΑΜ, ἀπὸ δὲ τοῦ Β παρὰ τὴν ΑΕ ἡ ΒΝ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΓΔ τομῆς, τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒΜ, ΓΑΝ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ ΒΝ, ΑΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον, ἐκ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ καὶ τοῦ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΑΛΒ πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ἀπὸ ΑΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΛΒ.

Sint oppoſitæ ſectiones ΑΒ, ΓΔ, quarum centrum Ο, & contingentes ΑΕΖΗ, ΒΕΘΚ; & juncta ΑΒ dividatur bifariam in Λ, & jungatur ΛΕ & ad Δ producatur; à puncto autem Α ducatur ΑΜ ipſi ΒΕ parallela, & à puncto Β recta ΒΝ parallela ipſi ΑΕ; denique ſumpto in ſectione ΓΔ quovis puncto Γ, jungantur ΓΒΜ, ΓΑΝ: dico rectangulum ſub ΒΝ, ΑΜ ad quadratum ex ΑΒ rationem habere compoſitam, ex ratione quadrati ex ΛΔ ad quadratum ex ΔΕ & ratione rectanguli ΑΛΒ ad quartam partem quadrati ex ΑΒ, ſive ad rectangulum ΑΛΒ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Γ, Δ παρὰ τὴν ΑΒ αἱ ΗΓΚ, ΖΔΘ· φανερὸν δή, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ τῇ ΛΒ, ὅτι ἴση ἡ ΔΘ τῇ ΔΖ καὶ ἡ ΚΞ τῇ ΞΗ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΞΓ τῇ ΞΠ ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΗΠ. καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΔΓ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΒΕΘ, ΘΔ, καὶ παρὰ τὴν ΔΘ ἡ ΚΗ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΔ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΚΓ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΘΔ τῷ ὑπὸ ΘΔΖ, τὸ δὲ ὑπὸ ΠΚΓ τῷ ὑπὸ ΚΓΗ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΒΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΖΑ, ΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΑ, ΚΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΒ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΚΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ λόγος (τοῦ ὑπὸ ΘΕΖ μέσου λαμβανομένου) σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕΖ καὶ τοῦ ὑπὸ ΘΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ. καὶ ἔστιν ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΘΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ ΛΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΘΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΔΖ οὕτως τὸ ὑπὸ



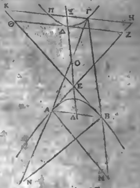
Ducantur enim à punctis Γ, Δ rectæ ΗΓΚ, ΖΔΘ parallelæ ipſi ΑΒ: patet igitur, ob ΑΛ æqualem ipſi ΛΒ, quod ΔΘ ipſi ΔΖ æqualis ſit & ΚΞ ipſi ΞΗ. ſed [per 47. 1. huj.] ΞΓ eſt æqualis ipſi ΞΠ: ergo & ΓΚ ipſi ΗΠ. & quoniam ΑΒ, ΔΓ oppoſitæ ſectiones ſunt, contingenteſque ΒΕΘ, ΘΔ, & ducta eſt ΚΗ ipſi ΘΔ parallela; erit [per 18. 3. huj.] ut quadratum ex ΒΘ ad quadratum ex ΘΔ ita quadratum ex ΒΚ ad rectangulum ΠΚΓ. quadratum autem ex ΘΔ eſt æquale rectangulo ΘΔΖ, & rectangulum ΠΚΓ rectangulo ΚΓΗ; ergo ut quadratum ex ΒΘ ad rectangulum ΘΔΖ ita quadratum ex ΒΚ ad rectangulum ΚΓΗ. ſed ut rectangulum ſub ΖΑ, ΘΒ ad quadratum ex ΘΒ ita rectangulum ſub ΗΑ, ΚΒ ad quadratum ex ΚΒ*: ex æquali igitur ut rectangulum ſub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΔΖ ita rectangulum ex ΑΗ, ΚΒ ad rectangulum ſub ΚΓΗ. ratio autem rectanguli ſub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΔΖ (ſumpto medio rectangulo ΘΕΖ) componitur ex ratione rectanguli ſub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΕΖ & ratione rectanguli ΘΕΖ ad rectangulum ΘΔΖ. ſed ut rectangulum ſub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΕΖ ita quadratum ex ΛΔ ad quadratum ex ΔΕ†. & ut rectangulum ΘΕΖ ad rectangulum ΘΔΖ ita [per 12. lem. 3. huj.] rectangulum

* Quoniam enim ſimilia ſunt triangula ΑΕΒ, ΘΕΖ, ΚΕΗ, erit ΖΕ ad ΕΑ ut ΘΕ ad ΕΒ; & ideo componendo, ut ΖΑ ad ΑΕ ita ΘΒ ad ΒΕ. Pari modo conſtat eſſe ΗΑ ad ΑΕ ut ΚΒ ad ΕΒ; & invertendo, ut ΑΕ ad ΑΗ ita ΕΒ ad ΒΚ: quare, ex æquali, eſt ΖΑ ad ΑΗ ſicut ΘΒ ad ΒΚ; adeoque ΖΑ ad ΘΒ ut ΑΗ ad ΒΚ. ſed ut ΖΑ ad ΘΒ ita rectangulum ſub ΖΑ, ΘΒ ad quadratum ex ΘΒ; & ut ΑΗ ad ΒΚ ita rectangulum ſub ΗΑ, ΚΒ ad quadratum ex ΚΒ: eſt igitur ut rectangulum ſub ΖΑ, ΘΒ ad quadratum ex ΘΒ ita rectangulum ſub ΗΑ, ΚΒ ad quadratum ex ΚΒ.

† Nam ratio rectanguli ſub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΕΖ componitur ex ratione ΑΖ ad ΖΕ & ratione ΒΘ ad ΘΕ. ſed tam ratio ΑΖ ad ΖΕ quam ratio ΒΘ ad ΘΕ eadem eſt cum ratione ΛΔ ad ΔΕ: ergo ratio ex illis compoſita (hoc eſt ratio rectanguli ſub ΑΖ, ΘΒ ad rectangulum ΘΕΖ) eadem eſt cum ratione quadrati ex ΛΔ ad quadratum ex ΔΕ.

ΑΕΒ

ABB ad rectangulum AΛB; ergo ratio rectanguli ſub AH, BK ad rectangulum KΓH compoſita eſt ex ratione quadrati ex AΔ ad quadratum ex ΔB & ratione rectanguli ABB ad rectangulum AΛB, habet autem rectangulum ſub AH, KB ad rectangulum KΓH rationem compoſitam ex ratione BB ad KΓ & ratione AH ad HΓ. atqui ut BB ad KΓ ita eſt [per 4. 6.] MA ad AB, & ut AH ad HΓ ita NB ad BA: ratio igitur compoſita ex ratione MA ad AB & ratione NB ad BA, quæ quidem eadem eſt quam habet rectangulum ſub AM, BN ad quadratum ex AB, componitur ex ratione quadrati ex AΔ ad quadratum ex ΔB & ratione rectanguli ABB ad rectangulum AΛB,



ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ· ὁ ἄρα τοῦ ὑπὸ ΑΗ, ΒΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ καὶ τοῦ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ. ἔχει δὲ τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΚΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΓΗ τὸν συγκείμενον λόγον, ἐκ τοῦ τῆς ΒΚ πρὸς ΚΓ καὶ τοῦ τῆς ΑΗ πρὸς ΗΓ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΚ πρὸς ΚΓ οὕτως ἡ ΜΑ πρὸς ΑΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ οὕτως ἡ ΝΒ πρὸς ΒΑ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΜΑ πρὸς ΑΒ καὶ τοῦ τῆς ΝΒ πρὸς ΒΑ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΑΜ, ΒΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ καὶ τοῦ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΛΒ.

ΑΠΟΛ-

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ
ΚΩΝΙΚΩΝ
ΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟΝ,
ΜΕΤΑ ΤΩΝ ΕΥΤΟΚΙΟΥ ΑΣΚΑΛΩΝΙΤΟΥ ΥΠΟΜΝΗΜΑΤΩΝ.

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBER QUARTUS,
CUM COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITÆ.

Ἀπολλώνιος Ἀττάλῳ χαίρειν.

ΠΡΟΤΕΡΟΝ μὲν ἐξέθηκα, γράψας πρὸς Εὔδημον τὸν Περγαμηνὸν, τῶν συντεταγμένων ἡμῖν Κωνικῶν ἐν ὀκτὼ βιβλίοις τὰ πρῶτα τρία. μετηλλαχότος δὲ ἐκείνου, τὰ λοιπὰ διεγνωκότες πρὸς σε γράψαι, διὰ τὸ φιλοτιμεῖσθαί σε μεταλαμβάνειν τὰ ὑφ' ἡμῶν πραγματευόμενα, πεπόμφαμεν ἐπὶ τοῦ παρόντος σοι τὸ τέταρτον. περιέχει δὲ τοῦτο κατὰ πόσα σημεῖα πλεῖστα δυνατόν ἐστι τὰς τῶν κώνων τομὰς ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλειν, ἐάν περ μὴ ὅλαι ἐπὶ ὅλας ἐφαρμόζωσιν· ἔτι κώνου τομὴ καὶ κύκλου περιφέρεια ταῖς ἀντικειμέναις κατὰ πόσα σημεῖα πλεῖστα συμβάλλουσι, καὶ ἔτι ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις· καὶ ἐκτὸς τούτων ἄλλα οὐκ ὀλίγα ὅμοια τούτοις. τούτων δὲ τὸ μὲν προειρημένον Κόνων ὁ Σάμιος ἐξέθηκε πρὸς Θρασύδαιον, οὐκ ὀρθῶς ἐν ταῖς ἀποδείξεσιν ἀναστραφείς· διὸ καὶ μετρίως αὐτοῦ ἀνθήψατο Νικοτέλης ὁ Κυρηναῖος. περὶ δὲ τοῦ δευτέρου μνείαν μόνον πεποίηται ὁ Νικοτέ-

Apollonius Attalo S. P.

ANTEA quidem ex octo libris, quos de Conicis compoſuimus, tres priores ad *Eudemum Pergamenum* ſcriptos edidimus. Verum eo mortuo, cum reliquos ad Te mittere decrevimus, quartum hunc, quod ſcriptorum noſtrorum deſiderio tenearis,in præſentia ad Te mittimus. Oſtendit autem ad quot puncta, ut plurimum, Coni ſectiones inter ſe & circuli circumferentiæ occurrant, niſi totæ totis congruant: præterea ad quot puncta, ut plurimum, Coni ſectio & circuli circumferentia oppoſitis ſectionibus conveniant; itemque oppoſitæ ſectiones oppoſitis ſectionibus: atque ad hæc alia non pauca his ſimilia. Horum autem primum *Conon Samius* ad *Thraſydæum* ſcribens explicavit, non ritè confectis demonſtrationibus: quamobrem *Nicoteles Cyrenæus* eum nonnihil reprehendit. Verum ſecundi mentionem tantum fecit *Nicoteles*

cotoles in libro contra *Cononem*, tanquam ejus quod facile demonſtrari poſſet: quod tamen nos neque ab illo neque ab alio quopiam demonſtratum invenimus. At tertium cæteraque id genus plane nemini in mentem veniſſe comperimus. Ex dictis autem quotquot ab aliis non demonſtrata deprehendimus multa atque varia poſtulant Theoremata nova; quorum plurima in tribus prioribus libris, reliqua autem in hoc ipſo expoſuimus. Hæc vero probe perſpecta non parum utilitatis afferunt tam ad problematum compoſitiones quam ad eorundem determinationes. Verum *Nicoteles* quidem, ob diſſenſionem quæ illi cum *Conone* erat, nihil ex iis quæ à *Conone* inventa ſunt ad problematum διορισμὸς commodi provenire aſſerit: quod plane falſum. Nam etiamſi omnino abſque his determinationes dare liceret; eorum tamen ope nonnulla facilius percipiuntur: veluti quod problema pluribus modis conſtrui poſſit, vel quot modis, vel etiam quod nullo modo fiat. Hujuſmodi autem præcognitio ſatis idoneam ſolutiones quærendi præbet anſam; & ad analyſes διορισμῶν Theoremata hæc admodum utilia ſunt. Verum & abſque hac utilitate, propter ipſas demonſtrationes digna erunt quæ recipiantur: multa enim alia in Mathematicis diſciplinis ob hoc ipſum, nec ob aliquid aliud, recipere conſuevimus.

λης ἐν τῇ πρὸς τὸν Κόνωνα ἀντιγραφῇ, ὡς δυναμένης δειχθῆναι· δεικνυμένῳ δὲ ὅτι ὑπ' αὐτοῦ τούτῳ οὐθ' ὑπ' ἄλλου τινὸς ἐντετύχαμεν. τὸ μέντοι τρίτον, καὶ τὰ ἄλλα τὰ ὁμογενῆ τούτοις, ἁπλῶς ὑπὸ οὐδενὸς νενοημένα εὕρηκα. πάντα δὲ τὰ λεχθέντα, ὅσοις οὐκ ἐντέτυχα, πολλῶν καὶ ποικίλων προσεδεῖτο ξενιζόντων θεωρημάτων· ὧν τὰ μὲν πλεῖστα τυγχάνω ἐν τοῖς πρώτοις τρισὶ βιβλίοις ἐκτεθεικὼς, τὰ δὲ λοιπὰ ἐν τούτῳ. ταῦτα δὲ θεωρηθέντα χρείαν ἱκανὴν παρέχεται πρός τε τὰς τῶν προβλημάτων συνθέσεις καὶ τοὺς διορισμούς. Νικοτέλης μὲν γὰρ, ἕνεκα τῆς πρὸς τὸν Κόνωνα διαφορᾶς, οὐδεμίαν ἐκ τῶν ὑπὸ τοῦ Κόνωνος εὑρημένων εἰς τοὺς διορισμοὺς φησὶν ἔρχεσθαι χρείαν, οὐκ ἀληθῆ λέγων. καὶ γὰρ εἰ ὅλως ἄνευ τούτων δύναται κατὰ τοὺς διορισμοὺς ἀποδίδοσθαι, ἀλλά τοί γε δι' αὐτῶν ἔστι κατανοεῖν προχειρότερον ἔνια· οἷον ὅτι πλεοναχῶς ἢ τοσαυταχῶς ἂν γένοιτο, καὶ πάλιν ὅτι οὐκ ἂν γένοιτο. ἡ δὲ τοιαύτη πρόγνωσις ἱκανὴν ἀφορμὴν συμβάλλεται πρὸς τὰς ζητήσεις· καὶ πρὸς τὰς ἀναλύσεις τῶν διορισμῶν εὔχρηστα τὰ θεωρήματά ἐστι ταῦτα. χωρὶς δὲ τῆς τοιαύτης εὐχρηστίας, καὶ δι' αὐτὰς τὰς ἀποδείξεις ἄξια ἐστὶν ἀποδοχῆς· καὶ γὰρ ἄλλα πολλὰ τῶν ἐν τοῖς μαθήμασι διὰ τοῦτο, καὶ οὐ δι' ἄλλο τι, ἀποδεχόμεθα.

EUTOCIUS.

Quartus liber, *Anthemi* amiciſſime, inquirit, quot modis conorum ſectiones inter ſeſe & circuli circumferentiæ conveniant, ſive contingentes fuerint ſive ſecantes. Eſt autem & elegans & legentibus perſpicuus, præſertim ex editione noſtra: ac ne commentariis quidem ullis indiget, quod enim neceſſarium eſt explet ipſe textus. In eo autem omnia demonſtrantur argumentatione ducente ad impoſſibile; ſicut & *Euclides* fecit in iis quæ de interſectionibus & tactionibus circuli conſcripſit: quæ ſanè ratio & ad uſum accommodata & neceſſaria *Ariſtoteli* ac Geometris, præcipue vero *Archimedi*, viſa eſt. Itaque tibi quatuor libros perlegenti licebit, adhibitis Conicis, reſolvere & componere quodcunque propoſitum fuerit: quocirca & ipſe *Apollonius* in principio libri dixit quatuor libros ad hujus diſciplinæ elementa ſufficere, reliquos autem quatuor ad abundantiorem ſcientiam pertinere. Perlege igitur eos diligenter, & ſi tibi placuerit reliquos ad eandem formam à nobis edi, id quoque Deo duce fiet. *Vale*.

Τὸ τέταρτον βιβλίον, ὦ φίλε ἑταῖρε Ἀνθέμιε, ζήτησιν μὲν ἔχει, ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλουσιν, εἴτε ἐφαπτόμεναι εἴτε τέμνουσαι. ἔστι δέ τι χαρίεν καὶ σαφὲς τοῖς ἐντυγχάνουσι καὶ μάλιστα ἀπὸ τῆς ἡμετέρας ἐκδόσεως· καὶ οὐδὲ σχολίων δεῖται, τὸ γὰρ ἐνδέον αἱ παραγραφαὶ πληροῦσι. δείκνυται δὲ τὰ ἐν αὐτῷ πάντα διὰ τῆς εἰς ἀδύνατον ἀπαγωγῆς, ὥσπερ καὶ Εὐκλείδης ἔδειξε τὰ περὶ τῶν τομῶν τοῦ κύκλου καὶ τῶν ἐπαφῶν. εὔχρηστος δὲ καὶ ἀναγκαῖος ὁ τρόπος οὗτος καὶ τῷ Ἀριστοτέλει δοκεῖ καὶ τοῖς γεωμέτραις, καὶ μάλιστα τῷ Ἀρχιμήδει. ἀναγνοὺς οὖν σὺ τὰ τέσσαρα βιβλία, δυνατὸς ἔσῃ διὰ τῆς κωνικῆς πραγματείας ἀναλύειν καὶ συντιθέναι τὸ προτεθέν· διὸ καὶ αὐτὸς ὁ Ἀπολλώνιος, ἐν ἀρχῇ τοῦ βιβλίου, φησὶ τὰ τέσσαρα βιβλία ἀρκεῖν πρὸς τὴν ἀγωγὴν τὴν στοιχειώδη, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι περιουσιαστικώτερα. ἀναγνοὺς οὖν αὐτὰ ἐπιμελῶς, καὶ εἰ σοὶ κατὰ θυμὸν γένηται καὶ τὰ λοιπὰ κατὰ τοῦτον τὸν τύπον ὑπ' ἐμοῦ ἐκτεθῆναι, καὶ τοῦτο θεοῦ ἡγουμένου γενήσεται. ἔρρωσο.

Prop. I. *Theor.*

Si in coni ſectione, vel circuli circumferentia, aliquod punctum extra ſumatur; atque ab eo ad ſectionem ducantur duæ rectæ lineæ, una quidem contingens, altera vero in duobus punctis ſecans; & quam rationem habet

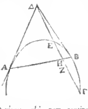
ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν κώνου τομῆς, ἢ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ τομῇ προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν ἐφάπτηται ἡ δὲ τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, καὶ ὃν ἔχει λόγον ὅλη ἡ τέμνου-

σα πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς γραμμῆς, εἰς τοῦτον τμηθῇ ἡ ἐντὸς ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα, ὥστε τὰς ὁμολόγους εὐθείας πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ εἶναι· ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διαίρεσιν ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ γραμμῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγομένη εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς γραμμῆς.

tota ſecans ad partem ejuſdem quæ extra ſumitur, inter punctum & ſectionem interjecta, in eandem dividatur ea pars quæ eſt intra, ita ut rectæ eandem rationem habentes ad idem punctum conveniant: quæ à tactu ad diviſionem ducitur, occurret ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad punctum extra ſumptum, ſectionem continget.

ΕΣΤΩ γὰρ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ΔΒ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Β, ἡ δὲ ΔΕΓ τεμνέτω τὴν τομὴν κατὰ τὰ Ε, Γ, [περιέχοντα πρότερον τὴν κατὰ τὸ Β ἁφήν.] καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ, τοῦτον ἐχέτω ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἀγομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.



Ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΓ τέμνει τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, οὐκ ἔσται διάμετρος αὐτῆς*· δυνατὸν ἄρα ἐστὶ διὰ τοῦ Δ διάμετρον ἀγαγεῖν, ὥστε καὶ ἐφαπτομένην. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΑ τεμνέτω τὴν ΕΓ, εἰ δυνατὸν, μὴ κατὰ τὸ Ζ, ἀλλὰ κατὰ τὸ Η. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ ΒΔ, ΔΑ, καὶ ἐπὶ τὰς ἁφάς ἐστιν ἡ ΒΑ, καὶ διῆκται ἡ ΓΔ τέμνουσα τὴν μὲν τομὴν κατὰ τὰ Γ, Ε, τὴν δὲ ΑΒ κατὰ τὸ Η· ἔσται ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΕ, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ· οὐκ ἄρα ἡ ΒΑ καθ' ἕτερον σημεῖον τέμνει τὴν ΓΕ· κατὰ τὸ Ζ ἄρα.

Ταῦτα μὲν κοινῶς ἐπὶ πασῶν τῶν τομῶν δείκνυται· ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς μόνης, ἐὰν ἡ μὲν ΔΒ ἐφάπτηται, ἡ δὲ ΔΓ τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα τὰ Ε, Γ, τὰ δὲ Ε, Γ περιέχῃ τὴν κατὰ τὸ Β ἁφὴν, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ᾖ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, ὁμοίως ἡ ἀπόδειξις γενήσεται.

Δυνατὸν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἄλλην ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν εὐθεῖαν τὴν ΔΑ, καὶ τὰ λοιπὰ τῆς ἀποδείξεως ὁμοίως ποιεῖν.

SIT coni ſectio, vel circuli circuli circumferentia ΑΒΓ; & puncto extra ſectionem ſumpto, quod ſit Δ, ab eo ducatur recta ΔΒ quidem contingens ſectionem in Β; ΔΕΓ vero in punctis Ε, Γ ſecans, [quæ primum contineant punctum tactus Β;] & quam rationem habet ΓΔ ad ΔΕ, eandem habeat ΓΖ ad ΖΕ: dico rectam, quæ à puncto Β ad Ζ ducitur occurrere ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad Δ, ſectionem contingere.

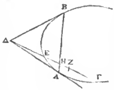
Quoniam enim recta ΔΓ ſectionem in duobus punctis ſecat, cum non ſit ipſius diameter, licebit per Δ diametrum & ideo contingentem ducere. ducatur [per 49.2.huj.] à puncto Δ recta ΔΑ ſectionem contingens; & juncta ΒΑ ſecet ipſam ΕΓ non in Ζ, ſed in alio puncto Η, ſi fieri poſſit. itaque quoniam rectæ ΒΔ, ΔΑ ſectionem contingunt; & tactus jungit recta ΒΑ; recta vero ΓΔ ſectionem in punctis Γ, Ε ſecat, ipſamque ΑΒ ſecat in Η· erit [per 37. 3.huj.] ut ΓΔ ad ΔΕ ita ΓΗ ad ΗΕ, quod eſt abſurdum; poſuimus enim, ut ΓΔ ad ΔΒ ita eſſe ΓΖ ad ΖΕ: igitur ΒΑ non ſecat ΓΕ in alio puncto; quare in ipſo Ζ ſecet neceſſe eſt.

Hæc quidem communiter in omnibus ſectionibus demonſtrata ſunt: at in hyperbola tantum, ſi recta ΔΒ ſectionem contingat, & ΔΓ in punctis Β, Γ ſecet, puncta vero Ε, Γ contineant tactum ad Β, & punctum Δ ſit intra angulum aſymptotis comprehenſum, ſimiliter fiet demonſtratio.

Poſſumus enim tunc ſolum à puncto Δ aliam ducere contingentem ΔΑ, & quæ reliqua ſunt ad demonſtrationem perficere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

ΤΩΝ αὐτῶν ὄντων, τὰ Ε, Γ σημεῖα μὴ περιεχέτω τὴν κατὰ τὸ Β ἁφὴν μεταξὺ αὐτῶν· [ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς,] τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ἔστω τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας· δυνατὸν ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἑτέραν ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν τὴν ΔΑ, καὶ τὰ λοιπὰ ὁμοίως ἀποδεικνύειν.



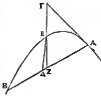
Prop. II. *Theor.*

IISDEM exiſtentibus, puncta Ε, Γ tactum ad Β non contineant; at, ſi fuerit hyperbola, ſit punctum Δ intra angulum aſymptotis comprehenſum. poſſumus igitur [per 49. 2. huj.] à puncto Δ alteram contingentem ducere, quæ ſit ΔΑ, & reliqua ſimiliter demonſtrare.

* Nam ſi Ellipſeos diameter fuerit, res manifeſta eſt ex 34 primi

*Prop. III. *Theor.*

SI vero ſectio A B fuerit Parabola, quam contingat Γ A, ſecet autem Γ E in uno tantum puncto, ac fiat B Z æqualis ipſi Γ B: dico rectam à puncto A ad Z ductam ordinatim eſſe applicatam, & quæ ab occurſu ejus cum ſectione ad punctum Γ ducitur ſectionem contingere.



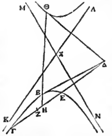
Quoniam enim ſectio parabola eſt, ac Γ E in uno tantum puncto occurrit ſectioni, erit Γ B Z ſectionis diameter. nam ſi non ſit diameter, fiat E Δ diametro parallela, & [per 46. 1. huj.] erit E Δ diameter ſectionis. & quoniam Γ E Z occurrit diametro, producta etiam occurret ſectioni [per 27. 1. huj.] in alio puncto; quod eſt abſurdum. poſuimus enim eam in uno tantum puncto occurrere: adeoq; Γ B Z eſt ſectionis diameter. cumque Γ E æqualis ſit ipſi E Z, erit [per 33. 1. huj.] A Z ordinatim applicata, ac producta occurret ſectioni. occurrat ad B, ac [per eandem 33^{am}] juncta Γ B continget ſectionem, ob Γ E ipſi E Z æqualem, ac B Z ordinatim applicatam.

* *Tam in Codice* Armachano *quam in Epitome ejus per* Abdolmelec, *præcedens Propoſitio pro ſecundâ habetur, quæ in* Græcis *quidem MSS. non reperitur. Quoniam vero in* Græcis *ſecunda propoſitio primæ tantum particula ſit, & propoſitio vix dici mereatur, nos eam primæ ſubjecimus, & banc* Arabum *ſecundam (quæ vix alia eſt quam converſa 33^{tiæ} primi) tertiam fecimus, ne Propoſitionum ordo in citationibus turbaretur.*

Prop. IV. *Theor.*

SI in Hyperbola occurſus E, Γ contineant tactum ad B, & punctum Δ ſit in angulo qui deinceps eſt angulo aſymptotis comprehenſo: recta, quæ à tactu ad diviſionem ducitur, occurret oppoſitæ ſectioni, & quæ ab occurſu ejus ad punctum Δ ducitur eandem ſectionem continget.

Sint oppoſitæ ſectiones B, Θ, quarum aſymptoti K Λ, M Ξ N; & punctum Δ ſit in angulo Λ Ξ N; ab eo autem ducta recta Δ B ſectionem contingat, & Δ Γ ſecet, ita ut occurſus E, Γ tactum ad B contineant; & quam rationem habet Γ Δ ad Δ B eandem habeat Γ Z ad Z E. demonſtrandum eſt rectam, quæ à puncto B ad Z ducitur, occurrere ſectioni Θ; & quæ ab occurſu ducitur ad Δ ſectionem contingere.



Ducatur enim à puncto Δ recta Δ Θ ſectionem contingens; & juncta Θ B, ſi fieri poſſit, non tranſeat per Z, ſed per aliud punctum H: eſt igitur [per 37. 3. huj.] ut Γ Δ ad Δ B ita Γ H ad H E, quod eſt abſurdum; poſuimus enim ut Γ Δ ad Δ E ita eſſe Γ Z ad Z E.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δʹ.

ΕΑΝ ἐν τῇ ὑπερβολῇ αἱ μὲν Ε, Γ συμπτώσεις τὴν κατὰ τὸ Β ἁφὴν περιέχωσι, τὸ δὲ Δ σημεῖον ᾖ ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης· ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διαίρεσιν ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἀγομένη εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς ἀντικειμένης.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Β, Θ, καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΚΛ, ΜΞΝ, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ὑπὸ ΛΞΝ γωνίᾳ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐφαπτέσθω μὲν ἡ ΔΒ, τεμνέτω δὲ ἡ ΔΓ, καὶ αἱ Ε, Γ συμπτώσεις περιεχέτωσαν τὴν Β ἁφήν, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ ἐχέτω ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ. δεικτέον ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται τῇ Θ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΒ πιπτέτω, εἰ δυνατόν, μὴ διὰ τοῦ Ζ ἀλλὰ διὰ τοῦ Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΕ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ.

Prop. V. *Theor.*

IISDEM poſitis, ſi punctum Δ ſit in una aſymptoton; quæ à puncto B ad Z ducitur eidem aſymptoto parallela erit.

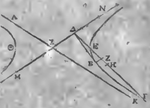
ΠΡΟΤΑΣΙΣ εʹ.

ΤΩΝ αὐτῶν ὄντων, ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπί τινος ᾖ τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ αὐτῇ ἀσυμπτώτῳ.

Ὑποκείσθω

ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτά, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΜΝ· δεικτέον ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΜΝ παράλληλος ἀγομένη ἐπὶ τὸ Ζ πεσεῖται.

Μὴ γάρ, ἀλλ', εἰ δυνατόν, ἔστω ἡ ΒΗ· ἔσται δὴ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΕ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΕ, ὅπερ ἀδύνατον.



Ponatur enim eadem; & punctum Δ ſit in altera aſymptotôn, videlicet in MN: demonſtrandum eſt rectam, quæ à puncto B ipſi MN parallela ducitur, in punctum Z cadere.

Non enim, ſed, ſi fieri poteſt, ſit ea BH: erit igitur [per 35. 3. huj.] ut ΓΔ ad ΔE ita ΓH ad HE; quod fieri non poteſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ′.

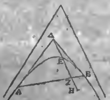
Ἐὰν ὑπερβολῆς ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὴν τομὴν διαχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν ἐφάπτεται, ἡ δὲ παράλληλος ἡ μιᾷ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τῇ ἀπολαμβανομένῃ ἐπὶ τῆς παραλλήλου μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ σημείου ἴση ἐπ' εὐθείας ἐντὸς τῆς τομῆς τεθῇ, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸ γενόμενον σημεῖον ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἔστω πρότερον ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ΒΔ ἐφαπτέσθω, ἡ δὲ ΔΕΖ παράλληλος ἔστω τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΑ τεμνέτω τὴν ΔΕ, εἰ δυνατόν, μὴ κατὰ τὸ Ζ, ἀλλὰ καθ' ἕτερον τὸ Η· ἔσται δὴ ἴση ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ ἴση.

PROP. VI. *Theor.*

Si in hyperbola aliquod punctum extra ſumatur, à quo ad ſectionem ducantur duæ rectæ lineæ, altera quidem contingens, altera vero parallela uni aſymptotôn; & portio parallelæ inter ſectionem & punctum interjecta æqualis ſit ei quæ intra ſectionem continetur: recta, quæ à tactu ad inventum punctum ducitur, occurret ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad punctum extra ſumptum, ſectionem continget.



SIT hyperbola AEB, & ſumatur aliquod punctum extra, quod ſit Δ; ſit autem primo Δ intra angulum ſub aſymptotis contentum, & ab ipſo Δ recta quidem ΔB ducta ſectionem contingat, ΔEZ vero parallela ſit alteri aſymptotôn, ponaturque ipſi ΔE æqualis EZ: dico rectam, quæ à puncto B ad Z ducitur, occurrere ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad Δ, ſectionem contingere.

Ducatur enim ΔA, quæ ſectionem contingat; & juncta BA ſecet ipſam ΔE, ſi fieri poteſt, non in Z, ſed in alio puncto H: erit itaque [per 30. 3. huj.] ΔE æqualis ipſi EH, quod eſt abſurdum; ſupponebatur enim ΔE ipſi EZ æqualis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ′.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης· λέγω ὅτι καὶ οὕτως τὰ αὐτὰ συμβήσεται.

Ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη ἡ ΔΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΒ πιπτέτω, εἰ δυνατόν, μὴ διὰ τοῦ Ζ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ ἴση.



PROP. VII. *Theor.*

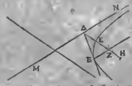
ISDEM poſitis, ſit punctum Δ in angulo deinceps ei qui ſub aſymptotis continetur: dico etiam ſic eadem evenire.

Ducatur enim ΔΘ ſectionem contingens; & juncta ΘB, ſi fieri poteſt, non cadat in Z, ſed in aliud punctum H: ergo [per 31. 3. huj.] ΔE eſt æqualis ipſi EH, quod eſt abſurdum; ſupponitur enim ΔE æqualis ipſi EZ.

Prop. VIII. *Theor.*

Iisdem poſitis, ſit punctum Δ in una aſymptotôn, & reliqua eadem fiant: dico rectam, quæ à tactu ad extremitatem ſumptæ ducitur, parallelam eſſe aſymptoto in qua eſt punctum Δ.

Sint enim eadem quæ ſupra, ponaturque ipſi Δ E æqualis E Z, & à puncto B ducatur B H parallela ipſi M N, ſi fieri poſſit: æqualis igitur eſt [per 34. 3. huj.] Δ E ipſi E H, quod eſt abſurdum; poſuimus enim Δ E ipſi E Z æqualem eſſe.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ γινέσθω τὰ αὐτά· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὸ ἄκρον τῆς ἀπολαφθείσης ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ, ἐφ' ἧς ἐστι τὸ Δ σημεῖον.

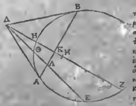
Ἔστω γὰρ τὰ εἰρημένα, καὶ κείσθω τῇ Δ Ε ἴση ἡ Ε Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β παράλληλος τῇ Μ Ν ἤχθω, εἰ δυνατόν, ἡ Ε Η· ἴση ἄρα ἡ Δ Ε τῇ Ε Η, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ Δ Ε τῇ Ε Ζ ἴση.

Prop. IX. *Theor.*

Si ab eodem puncto duæ rectæ lineæ ducantur, quarum utraque coni ſectionem vel circuli circumferentiam in duobus punctis ſecet; & quas rationes habent totæ rectæ ad portiones quæ extra ſumuntur, in eaſdem dividantur quæ ſunt intra, ita ut partes proportionales ad idem punctum conveniant: quæ per diviſiones ducitur recta ſectioni in duobus punctis occurret; & quæ ab occurſu ad punctum extra ſumptum ducuntur ſectionem contingent.

Sit aliqua prædictarum ſectionum A B, & ab aliquo puncto Δ ducantur rectæ Δ E, Δ Z quæ ſectionem ſecent, illa quidem in Θ, E punctis, hæc vero in Z, H; & quam rationem habet E Δ ad Δ Θ eandem habeat E Λ & Λ Θ, & rurſus quam habet Z Δ ad Δ H habeat Z K ad K H: dico rectam, quæ ab Λ ad K ducitur, utraque ex parte occurrere ſectioni; & quæ ab occurſibus ducuntur ad Δ, ſectionem contingere.

Quoniam enim utraque rectarum E Δ, Z Δ ſectionem in duobus punctis ſecat, poterimus ab ipſo Δ ſectionis diametrum ducere; atque adeo contingentes ex utraque parte. ducantur igitur Δ A, Δ B, quæ ſectionem contingant; & juncta B A, ſi fieri poſſit, non tranſeat per Λ, K, ſed vel per alterum ipſorum tantum, vel per neutrum. tranſeat primo per Λ tantum, & rectam Z H in puncto M ſecet: ergo [per 37. 3. huj.] ut Z Δ ad Δ H ita Z M ad M H, quod eſt abſurdum: ſupponitur enim ut Z Δ ad Δ H ita Z K ad K H. ſi vero recta B A per neutrum punctorum Λ, K tranſeat, in utraque ipſarum Δ E, Δ Z dictum abſurdum ſequetur.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου δύο εὐθεῖαι ἀχθῶσι τέμνουσαι κώνου τομὴν ἢ κύκλου περιφέρειαν, ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, καὶ ὡς ἔχουσιν αἱ ὅλαι πρὸς τὰς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένας, οὕτως αἱ ἐντὸς ἀπολαμβανόμεναι διαιρεθῶσιν, ὥστε τὰς ὁμολόγους πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ εἶναι· ἡ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ κατὰ δύο σημεῖα, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ ἐκτὸς σημεῖον ἀγόμεναι ἐφάψονται τῆς γραμμῆς.

Ἔστω γὰρ τῶν προειρημένων γραμμῶν τις ἡ Α Β, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Δ διήχθωσαν αἱ Δ Ε, Δ Ζ τέμνουσαι τὴν γραμμήν, ἡ μὲν κατὰ τὰ Θ, Ε, ἡ δὲ κατὰ τὰ Ζ, Η, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ Ε Δ πρὸς Δ Θ τοῦτον ἐχέτω ἡ Ε Λ πρὸς Λ Θ, ὃν δὲ ἡ Ζ Δ πρὸς Δ Η τοῦτον ἐχέτω ἡ Ζ Κ πρὸς Κ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Κ ἐπιζευγνυμένη συμπεσεῖται ἐφ' ἑκάτερα τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνύμεναι ἐφάψονται τῆς τομῆς.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ Ε Δ, Ζ Δ ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα τέμνουσι τὴν τομήν, δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Δ διάμετρον ἀγαγεῖν τῆς τομῆς· ὥστε καὶ ἐφαπτομένας ἐφ' ἑκάτερα. ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ Δ Α, Δ Β, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Β Α, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Λ, Κ, ἀλλ' ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν, ἢ δι' οὐδετέρου. ἐρχέσθω πρότερον διὰ μόνου τοῦ Λ, καὶ τεμνέτω τὴν Ζ Η κατὰ τὸ Μ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζ Δ πρὸς Δ Η οὕτως ἡ Ζ Μ πρὸς Μ Η, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ Ζ Δ πρὸς Δ Η οὕτως ἡ Ζ Κ πρὸς Κ Η. ἐὰν δὲ ἡ Β Α μηδὲ δι' ἑτέρου τῶν Λ, Κ πορεύηται, ἐφ' ἑκατέρας τῶν Δ Ε, Δ Ζ συμβήσεται τὸ ἄτοπον.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ί.

Ταῦτα μὲν κοινῶς· ἐπὶ δὲ τῆς ὑπερβολῆς μόνης, ἐὰν τὰ μὲν ἄλλα ὑπάρχῃ τὰ αὐτά, αἱ δὲ τῆς μιᾶς εὐθείας συμπτώσεις περιέχωσι τὰς τῆς ἑτέρας συμπτώσεις, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐντὸς ᾖ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, τὰ αὐτὰ συμβήσεται τοῖς προειρημένοις, ὡς προείρηται ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι.

Prop. X. *Theor.*

Hæc quidem communiter in omnibus: at in hyperbola tantum, ſi cætera quidem eadem ſint, unius autem rectæ lineæ occurſus contineant occurſus alterius, & punctum Δ ſit intra angulum ſub aſymptotis comprehenſum, evenient illa quæ dicta ſunt ut in primo theoremate tradidimus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιά.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν αἱ τῆς μιᾶς συμπτώσεις μὴ περιέχωσι τὰς τῆς ἑτέρας συμπτώσεις, τὸ δὲ Δ σημεῖον ἐντὸς ᾖ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας· καὶ ἡ καταγραφὴ καὶ ἡ ἀπόδειξις ἡ αὐτὴ τῷ ἐνάτῳ.

Prop. XI. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſi occurſus unius rectæ alterius occurſus non contineant, & punctum Δ ſit intra angulum ſub aſymptotis comprehenſum; & figura & demonſtratio eadem erit, quæ in nono theoremate.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϐ.

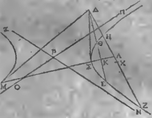
Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν περιέχωσιν αἱ τῆς μιᾶς εὐθείας συμπτώσεις τὰς τῆς ἑτέρας, καὶ ᾖ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης· ἡ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ συμπεσεῖται, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐφάψονται τῶν ἀντικειμένων.

Prop. XII. *Theor.*

Iiſdem poſitis, ſi unius rectæ occurſus alterius occurſus contineant, & punctum ſumptum ſit in angulo deinceps ei qui ſub aſymptotis comprehenditur: recta per diviſiones ducta, ſi producatur, occurret oppoſitæ ſectioni; & quæ ab occurſibus ducuntur ad punctum Δ, oppoſitas ſectiones contingent.

Ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΕΗ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΝΞ, ΟΠ, καὶ κέντρον τὸ Ρ, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐν τῇ ΞΡΠ γωνίᾳ, καὶ ἤχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ τέμνουσαι τὴν ὑπερβολὴν ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, καὶ περιεχέσθω τὰ Ε, Θ ὑπὸ τῶν Ζ, Η, καὶ ἔστω ὡς μὲν ἡ ΕΔ πρὸς ΔΘ οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς ΚΘ, ὡς δὲ ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ· δεικτέον ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Λ συμπεσεῖται τῇ τε ΕΖ τομῇ καὶ τῇ ἀντικειμένῃ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψονται τῶν τομῶν.

Ἔστω δὴ ἀντικειμένη ἡ Μ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΔΜ, ΔΣ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΣ, εἰ δυνατόν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Λ, ἀλλ' ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν, ἢ δι' οὐδετέρου. ἐρχέσθω πρότερον διὰ τοῦ Κ, καὶ τεμνέτω τὴν ΖΗ κατὰ τὸ Χ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΖΧ πρὸς ΧΗ, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΖΛ πρὸς ΛΗ. ἐὰν δὲ μηδὲ δι' ἑτέρου τῶν Κ, Λ ἔρχηται ἡ ΜΣ, ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΕΔ, ΔΖ τὸ ἀδύνατον συμβήσεται.



Sit hyperbola ΕΗ, cujus aſymptoti ΝΞ, ΟΠ, & centrum Ρ; punctum vero Δ ſit in angulo ΞΡΠ; & ducantur ΔΕ, ΔΖ, quarum utraque hyperbolam in duobus punctis ſecet; & puncta Ε, Θ à punctis Ζ, Η contineantur; ſitque ut ΕΔ ad ΔΘ ita ΕΚ ad ΚΘ, & ut ΖΔ ad ΔΗ ita ΖΛ ad ΛΗ: demonſtrandum eſt rectam per Κ, Λ ductam occurrere & ſectioni ΕΖ & ei quæ ipſi opponitur; ac rectas quæ ab occurſibus ducuntur ad punctum Δ, ſectiones contingere.

Sit itaq; ſectio oppoſita Μ; & à puncto Δ ducantur ΔΜ, ΔΣ, quæ ſectiones contingant; junctaque ΜΣ, ſi fieri poſſit, non tranſeat per Κ, Λ; ſed vel per alterum ipſorum, vel per neutrum. tranſeat primum per Κ, & ſecet ΖΗ in Χ. eſt igitur [per 37. 3. huj.] ut ΖΔ ad ΔΗ ita ΖΧ ad ΧΗ, quod eſt abſurdum; ſupponitur enim ut ΖΔ ad ΔΗ ita ΖΛ ad ΛΗ. ſi vero ΜΣ per neutrum punctorum Κ, Λ tranſeat, in utraque ipſarum ΕΔ, ΔΖ impoſſibile illud eveniet.

Prop.

Prop. XIII. *Theor.*

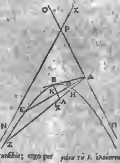
Iiſdem poſitis, ſi punctum Δ ſit in una aſymptotôn, & reliqua eadem exiſtant: quæ per diviſiones tranſit recta aſymptoto in qua eſt punctum parallela erit, & producta occurret ſectioni; quæ vero ab occurſu ad punctum ducitur, ſectionem continget.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγʹ.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων ᾖ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ ὑπάρχῃ, ἡ διὰ τῶν διαιρέσεων ἀγομένη παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ᾽ ἧς ἐστι τὸ σημεῖον, καὶ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ σημεῖον ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

SIT hyperbola, & aſymptoti; ſumptoque in una aſymptotôn puncto Δ, ducantur rectæ lineæ, & dividantur, ut dictum eſt; & ab ipſo Δ recta ΔΒ ſectionem contingat; dico eam, quæ à puncto Β ducitur ipſi ΟΠ parallela, per puncta Κ, Λ tranſire.

Si enim non, vel per unum ipſorum tranſibit, vel per neutrum. tranſeat primo per Κ tantum: quare [per 35.3.huj.] ut ΖΔ ad ΔΗ ita ΖΧ ad ΧΗ, quod eſt abſurdum *: recta igitur à puncto Β ducta parallela ipſi ΠΟ per unum tantum eorum non tranſibit; ergo per utrumque tranſeat neceſſe eſt.



ΕΣΤΩ γὰρ ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τὸ Δ, καὶ διήχθωσαν αἱ εὐθεῖαι, καὶ διῃρήσθωσαν ὡς εἴρηται, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΒ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὴν ΠΟ ἀγομένη ἥξει διὰ τῶν Κ, Λ.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι διὰ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν ἐλεύσεται, ἢ δι᾽ οὐδετέρου. ἐρχέσθω διὰ μόνου τοῦ Κ· ἔσται ἄρα ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΖΧ πρὸς ΧΗ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὴν ΠΟ ἀγομένη διὰ μόνου τοῦ Κ ἐλεύσεται· δι᾽ ἀμφοτέρων ἄρα.

Prop. XIV. *Theor.*

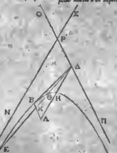
IISDEM poſitis, ſi punctum Δ ſit in una aſymptotôn, & recta quidem ΔΒ ſectionem in duobus punctis ſecet, ΔΗ vero alteri aſymptoto parallela illam ſecet in uno tantum, quod ſit Η; fiatque ut ΔΕ ad ΔΘ ita ΕΚ ad ΚΘ, & ipſi ΔΗ ponatur æqualis & in directo ΗΛ: quæ per puncta Κ, Λ tranſit recta & aſymptoto parallela erit, & ſectioni occurret; quæ vero ab occurſu ducitur ad Δ, ſectionem continget.

Similiter enim ut in ſuperioribus, ducta recta ΔΒ contingente: dico eam, quæ à puncto Β ducitur aſymptoto ΠΟ parallela, per puncta Κ, Λ tranſire.

Si enim per Κ ſolum tranſeat; non erit ΔΗ ipſi ΗΛ æqualis, quod [per 34. 3.huj.] eſt abſurdum. ſi vero per Λ ſolum, non erit ut ΕΔ ad ΔΘ ita ΕΚ ad ΚΘ †. quod ſi neque per Κ tranſeat, neque per Λ, in utriſque abſurdum ſequetur: ergo per utrumque punctum tranſire neceſſe eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδʹ.

ΤΩΝ αὐτῶν ὄντων, ἐὰν τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς ᾖ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἡ μὲν ΔΕ τέμνῃ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἡ δὲ ΔΗ κατὰ μόνον τὸ Η, παράλληλος οὖσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ γένηται ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΔΘ οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς ΚΘ, τῇ δὲ ΔΗ ἴση ἐπ᾽ εὐθείας τεθῇ ἡ ΗΛ· ἡ διὰ τῶν Κ, Λ σημείων ἀγομένη παράλληλός τε ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ καὶ συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.



Ὁμοίως γὰρ τοῖς προειρημένοις, ἀγαγὼν τὴν ΔΒ ἐφαπτομένην· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β παρὰ τὴν ΠΟ ἀσύμπτωτον ἀγομένη ἥξει διὰ τῶν Κ, Λ σημείων.

Εἰ γὰρ διὰ τοῦ Κ μόνου ἥξει, οὐκ ἔσται ἡ ΔΗ τῇ ΗΛ ἴση, ὅπερ ἄτοπον. εἰ δὲ διὰ τοῦ Λ μόνου, οὐκ ἔσται ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΘ οὕτως ἡ ΕΚ πρὸς ΚΘ. εἰ δὲ μήτε διὰ τοῦ Κ, μήτε διὰ τοῦ Λ, κατ᾽ ἀμφότερα συμβήσεται τὸ ἄτοπον· δι᾽ ἀμφοτέρων ἄρα ἐλεύσεται.

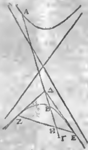
* Ponitur enim ΖΔ ad ΔΗ ſicut ΖΔ ad ΔΗ † Quod eſt abſurdum per 35.3.huj

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιέ.

Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις ληφθῇ τι σημεῖον μεταξὺ τῶν δύο τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων, ἡ δὲ τέμνῃ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων, καὶ ὡς ἔχει ἡ μεταξὺ τῆς ἑτέρας τομῆς, ἧς οὐκ ἐφάπτεται ἡ εὐθεῖα, καὶ τοῦ σημείου, πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς ἑτέρας τομῆς, οὕτως ἔχῃ μείζων τις εὐθεῖα τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῆς κειμένη ἐπ' εὐθείας τε καὶ πρὸς τῷ αὐτῷ πέρατι τῇ ὁμολόγῳ· ἡ ἀπὸ τοῦ πέρατος τῆς μείζονος εὐθείας ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἀγομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον μεταξὺ τῶν τομῶν τὸ Δ, ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἡ μὲν ΔΖ διήχθω ἐφαπτομένη, ἡ δὲ ΑΔΒ τέμνουσα τὰς τομάς, καὶ ὃν ἔχει λόγον ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ ἐχέτω ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ· δεικτέον ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ Δ σημεῖον ἐντός ἐστι τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας, δυνατόν ἐστι καὶ ἑτέραν ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ Δ. ἤχθω ἡ ΔΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΕ ἐρχέσθω, εἰ δυνατόν, μὴ διὰ τοῦ Γ, ἀλλὰ διὰ τοῦ Η· ἔσται δὴ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ.

Prop. XV. *Theor.*

Si in ſectionibus nppoſitis inter duas ſectiones ſumatur aliquod punctum, & ab ipſo duæ rectæ ducantur, altera quidem contingens unam oppoſitarum, altera vero utramqne ſecans; & qnam rationem habet ea quæ inter ſectionem quam nnn contingit recta & punctum interjicitur ad rectam quæ eſt inter punctum & alteram ſectinnem, eandem habeat recta quædam major ea quæ inter ſectiones interjicitur ad exceſſum ipſius in eadem recta & ad eundem terminnm cum ea quæ in eadem eſt ratinne: quæ à termino majoris rectæ ad tactum ducitur, occurret ſectioni; & quæ ab occurſu ad ſumptum punctum, ſectinnem continget.

SINT ſectiones oppoſitæ A, B; ſumptoque inter ſectiones aliquo puncto Δ intra angulum ſub aſymptotis contentum, ab ipſo ducatur recta quidem ΔZ contingens ſectionem, AΔB vero ſectiones ſecans; & quam rationem habet AΔ ad ΔB eandem habeat AΓ ad ΓB: demonſtrandum eſt rectam à puncto Z ad Γ productam occurrere ſectioni; & eam quæ ab occurſu ducitur ad Δ, ſectionem contingere.

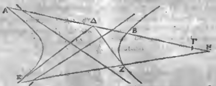
Quoniam enim punctum Δ eſt intra angulum qui ſectionem continet, poterimus [per 49. 2. huj.] ab ipſo Δ aliam contingentem ducere, quæ ſit ΔE; & juncta ZE, ſi fieri poteſt, per Γ non tranſeat, ſed per aliud punctum H: erit igitur [per 37. 3. huj.] ut AΔ ad ΔB ita AH ad HB, quod eſt abſurdum; poſuimus enim ut AΔ ad ΔB ita eſſe AΓ ad ΓB.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ́.

ΤΩΝ αὐτῶν ὄντων, ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γινέσθω· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἐπιζευγνυμένη ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ ἀντικειμένῃ τομῇ, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς ἀντικειμένης τομῆς.

Prop. XVI. *Theor.*

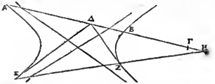
IISDEM poſitis, ſit punctum Δ in angulo deinceps ei qui ſub aſymptotis continetur, & reliqua eadem fiant: dico rectam à puncto Z ad Γ productam occurrere oppoſitæ ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad Δ, eandem opoſitam ſectionem contingere.



Sint

Sint enim eadem quæ ſupra, & punctum Δ ſit in angulo deinceps ei qui ſub aſymptotis continetur; atque à puncto Δ ducatur ΔΕ ſectionem Α contingens; juncta autem ΕΖ & producta, ſi fieri poteſt, non tranſeat per Γ, ſed per aliud punctum Η: erit igitur [per 39. 3. huj.] ut ΑΗ ad ΗΒ ita ΑΔ ad ΔΒ, quod eſt abſurdum; ſupponebatur enim ut ΑΔ ad ΔΒ ita ΑΓ ad ΓΒ.

Ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη τῆς Α τομῆς ἡ ΔΕ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐκβαλλομένη, εἰ δυνατὸν, μὴ ἐρχέσθω ἐπὶ τὸ Γ, ἀλλ' ἐπὶ τὸ Η· ἔσται δὴ ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ὅπερ ἄτοπον, ὑπέκειτο γὰρ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ.



Prop. XVII. *Theor.*

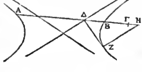
Iisdem poſitis ſit punctum Δ in una aſymptotôn: dico rectam, quæ à Ζ ad Γ ducitur, aſymptoto, in qua eſt punctum, eſſe parallelam.

Sint eadem quæ ſupra, & punctum Δ in una aſymptotôn; ductaque per Ζ eidem aſymptoto parallela non tranſeat per Γ, ſi fieri poteſt, ſed per Η; erit igitur [per 36. 3. huj.] ut ΑΔ ad ΔΒ ita ΑΗ ad ΗΒ, quod eſt abſurdum *: ergo quæ à puncto Ζ ducitur aſymptoto parallela per punctum Γ tranſibit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἔστω τὸ Δ σημεῖον ἐπί τινος τῶν ἀσυμπτώτων· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ ἀγομένη παράλληλός ἐστι τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ' ἧς ἐστι τὸ σημεῖον.

Ἔστω τὰ αὐτὰ τοῖς ἔμπροσθεν, τὸ δὲ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ζ παράλληλος, καὶ, εἰ δυνατὸν, μὴ πιπτέτω ἐπὶ τὸ Γ, ἀλλ' ἐπὶ τὸ Η· ἔσται δὴ ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ, ὅπερ ἄτοπον· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον ἐπὶ τὸ Γ πίπτει.



Prop. XVIII. *Theor.*

Si in ſectionibus oppoſitis aliquod punctum ſumatur inter duas ſectiones, & ab ipſo duæ rectæ ducantur utramque ſectionem ſecantes; & quas rationes habent interjectæ inter unam ſectionem & punctum ad eas quæ inter idem punctum & alteram ſectionem interjiciuntur, eaſdem habeant rectæ majores iis quæ ſunt inter ſectiones oppoſitas ad exceſſus ipſarum: quæ per terminos majorum rectarum tranſeunt, occurrent ſectionibus; & quæ ab occurſibus ad ſumptum punctum ducuntur, ſectiones contingent.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις ληφθῇ τι σημεῖον μεταξὺ τῶν δύο τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ δύο εὐθεῖαι διαχθῶσι τέμνουσαι ἑκατέραν τῶν τομῶν, καὶ ὡς ἔχουσιν αἱ μεταξὺ τῆς μιᾶς τομῆς πρὸς τὰς μεταξὺ τῆς ἑτέρας καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου οὕτως ἔχωσιν αἱ μείζους τῶν ἀπολαμβανομένων μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων πρὸς τὰς ὑπεροχὰς αὐτῶν· ἡ διὰ τῶν περάτων ἀγομένη εὐθεῖα τῶν μειζόνων εὐθειῶν ταῖς τομαῖς συμπεσεῖται, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἀγόμεναι εὐθεῖαι, ἐφάψονται τῶν τομῶν.

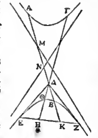
Sint oppoſitæ ſectiones Α, Β, & punctum Δ inter ſectiones, quod quidem primum ponatur in angulo ſub aſymptotis contento, & per Δ rectæ ΑΔΒ, ΓΔΘ ducantur; major igitur

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον μεταξὺ τῶν τομῶν πρότερον ὑποκείσθω ἐν τῇ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένῃ γωνίᾳ, καὶ διὰ τοῦ Δ διήχθωσαν αἱ ΑΔΒ, ΓΔΘ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν

* Eſt enim, [ex hyp.] ut ΑΔ ad ΔΒ ita ΑΓ ad ΓΒ

Digitized by Google

ἡ μὲν ΑΔ τῆς ΔΒ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΔΘ, διότι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΝ τῇ ΑΜ, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ ἐχέτω ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, ὃν δὲ ἔχει λόγον ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ ἐχέτω ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς συμπτώσεις τῆς τομῆς ἐφάψονται.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ Δ ἐντός ἐστι τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας, δυνατὸν ἀπὸ τοῦ Δ δύο ἐφαπτομένας ἀγαγεῖν. ἤχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ· ἐλεύσεται δὴ διὰ τῶν Κ, Η σημείων. εἰ γὰρ μή, ἢ διὰ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν ἐλεύσεται μόνου, ἢ δι' οὐδετέρου. εἰ μὲν γὰρ δι' ἑνὸς αὐτῶν μόνου, ἡ ἑτέρα τῶν εὐθειῶν εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τμηθήσεται καθ' ἕτερον, ὅπερ ἀδύνατον· εἰ δὲ δι' οὐδετέρου, ἐπ' ἀμφοτέρων τὸ ἀδύνατον συμβήσεται.

est ΑΔ quam ΔΒ, & ΓΔ major quam ΔΘ, quoniam [per 16. 2. huj.] ΒΝ est æqualis ΑΜ; quam vero rationem habet ΑΔ ad ΔΒ eandem habeat ΑΚ ad ΚΒ, & quam ΓΔ habet ad ΔΘ eandem habeat ΓΗ ad ΗΘ: dico rectam quæ per Κ, Η tranſit, occurrere ſectioni; & quæ à puncto Δ ad occurſus ducuntur, ſectionem contingere.

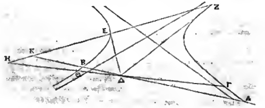
Quoniam enim punctum Δ eſt in angulo ſub aſymptotis contento, poſſumus [per 49. 2. huj.] ab eo duas rectas contingentes ducere. ducantur ΔΕ, ΔΖ; & ΕΖ jungatur,: quæ igitur per puncta Κ, Η tranſibit. ſi enim non, vel tranſibit per unum ipſorum tantum, vel per neutrum. & ſi quidem per unum tantum, altera rectarum [per 37. 3. huj.] in eadem ratione ad aliud punctum ſecabitur; quod fieri non poteſt: ſi vero per neutrum, in utriſque impoſſibile eveniet.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

ΕΙΛΗΦΘΩ δὴ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, καὶ διήχθωσαν αἱ εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς τομάς, καὶ διαιρείσθωσαν ὡς εἴρηται· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψονται τῶν τομῶν.

Prop. XIX. *Theor.*

SUMATUR itaque punctum Δ in angulo deinceps ei qui ſub aſymptotis continetur, ducanturque rectæ ſectiones ſecantes, & modo dicto dividantur: dico eam quæ per Κ, Η producitur, occurrere utrique ſectionum; & quæ ab occurſibus ducuntur ad Δ, ſectiones contingere.



Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτόμεναι ἑκατέρας τῶν τομῶν αἱ ΔΕ, ΔΖ· ἡ ἄρα διὰ τῶν Ε, Ζ καὶ διὰ τῶν Κ, Η ἐλεύσεται. εἰ γὰρ μή, ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἥξει, ἢ δι' οὐδετέρου· καὶ πάλιν ὁμοίως συναχθήσεται τὸ ἄτοπον.

Ducantur enim à puncto Δ rectæ ΔΕ, ΔΖ, quæ utramque ſectionem contingant: ergo quæ ducitur per Ε, Ζ etiam per Κ, Η tranſibit. ſi enim non; vel tranſibit per alterum ipſarum, vel per neutrum: & rurſus eodem modo abſurdum concludetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

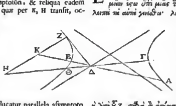
Ἐὰν δὲ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπί τινος ᾖ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ γένηται τὰ αὐτά· ἡ διὰ τῶν περάτων τῶν ὑπεροχῶν ἀγομένη εὐθεῖα παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ' ἧς ἐστι τὸ σημεῖον, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν σύμπτωσιν τῆς

Prop. XX. *Theor.*

Si ſumptum punctum ſit in una aſymptotôn, & reliqua eadem fiant: recta, quæ tranſit per terminos exceſſuum, aſymptoto in qua eſt punctum parallela erit; & quæ à puncto ducitur ad occurſum ſectionis & rectæ per

per terminos tranſeuntis, ſectionem continget.

Sint oppoſitæ ſectiones A, B; & punctum Δ ſit in una aſymptotôn, & reliqua eadem fiant: dico rectam quæ per K, H tranſit, occurrere ſectioni; [& parallelam eſſe aſymptoto in quâ punctum Δ;] & quæ ab occurſu ad Δ ducitur, ſectionem contingere.



Ducatur enim à puncto Δ recta contingens ΔZ, & à Z ducatur parallela aſymptoto in qua eſt punctum Δ: tranſibit igitur ea per puncta K, H. ſi enim non, vel per alterum tantum tranſibit, vel per neutrum; & ita eadem abſurda ſequentur ac in præmiſſis.

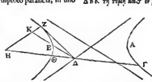
τομῆς καὶ τῆς διὰ τῶν περάτων ἠγμένης εὐθείας ἐφάψεται τῆς τομῆς.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἔστω ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γινέσθω· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η συμπεσεῖται τῇ τομῇ, [καὶ παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ' ἧς τὸ Δ σημεῖον,] καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐφαπτομένη ἡ ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ, παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον ἐφ' ἧς ἐστι τὸ Δ, ἤχθω εὐθεῖα· ἥξει δὴ διὰ τῶν Κ, Η. εἰ γὰρ μή, ἡ διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἥξει ἢ δι' οὐδετέρου· καὶ τὰ αὐτὰ ἄτοπα συμβήσεται τοῖς πρότερον.

Prop. XXI. *Theor.*

Sint rurſus oppoſitæ ſectiones A, B, ſitque punctum Δ in una aſymptotôn; & recta quidem ΔBK, alteri aſymptoto parallela, in uno tantum puncto B occurrat ſectioni; recta vero ΓΔΘH utrique ſectioni occurrat; & ut ΓΔ ad ΔΘ ita ſit ΓH ad HΘ, & ipſi ΔB æqualis ſit BK: dico rectam, quæ per puncta K, H tranſit, occurrere ſectioni, & aſymptoto in qua eſt punctum Δ parallelam eſſe; & quæ ab occurſu ad punctum Δ ducitur, ſectionem contingere.



Ducatur enim recta contingens ΔZ; & à Z ducatur parallela ei aſymptoto in qua eſt Δ: tranſibit igitur ea per puncta K, H. nam ſi non ita ſit, eadem abſurda ſequantur neceſſe eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

ΕΣΤΩΣΑΝ πάλιν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἡ μὲν ΔΒΚ τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον συμβαλλέτω τὸ Β, παράλληλος οὖσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ δὲ ΓΔΘ ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν συμβαλλέτω, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ, τῇ δὲ ΔΒ ἴση ἔστω ἡ ΒΚ· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η σημείων συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ παράλληλος ἔσται τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐφ' ἧς ἐστι τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπὶ τὸ Δ ἀγομένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

Ἤχθω γὰρ ἐφαπτομένη ἡ ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον ἐφ' ἧς ἐστι τὸ Δ ἤχθω εὐθεῖα· ἥξει δὴ διὰ τῶν Κ, Η. εἰ γὰρ μή, τὰ πρότερον εἰρημένα ἄτοπα συμβήσεται.

Prop. XXII. *Theor.*

Similiter autem ſint oppoſitæ ſectiones, aſymptotique; & punctum Δ ſumatur in angulo deinceps ei qui ſub aſymptotis continetur; recta vero ΓΔΘ ſecet utramque ſectionem, & ΔB alteri aſymptoto parallela ſit; ſitque ut ΓΔ ad ΔΘ ita ΓH ad HΘ, & ipſi ΔB æqualis ponatur BK: dico rectam quæ per puncta K, H tranſit, occurrere utrique oppoſitarum ſectionum; & quæ ab occurſibus ducuntur ad punctum Δ, ſectiones eaſdem contingere.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

ΕΣΤΩΣΑΝ δὲ ὁμοίως αἱ ἀντικείμεναι, καὶ αἱ ἀσύμπτωτοι, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, ὁμοίως εἰλήφθω καὶ ἡ μὲν ΓΔΘ τέμνουσα τὰς τομάς, ἡ δὲ ΔΒ παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΘ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ, τῇ δὲ ΔΒ ἴση ἔστω ἡ ΒΚ· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η σημείων συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἀγόμεναι ἐφάψονται τῶν ἀντικειμένων.

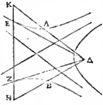
Ἤχθω

Ηχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ Δ Ε, Δ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Ε Ζ, καὶ εἰ δυνατὸν μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Η, ἀλλ᾽ ἤτοι διὰ τοῦ ἑτέρου, ἢ δι᾽ οὐδετέρου ἥξει. εἰ μὲν διὰ τοῦ Η μόνου, οὐκ ἔσται ἡ Δ Β τῇ Β Κ ἴση, ἀλλ᾽ ἑτέρᾳ· ὅπερ ἄτοπον. εἰ δὲ διὰ μόνου τοῦ Κ, οὐκ ἔσται ὡς ἡ Γ Δ πρὸς Δ Θ οὕτως ἡ Γ Η πρὸς Η Θ, ἀλλ᾽ ἄλλη τις πρὸς ἄλλην. εἰ δὲ δι᾽ οὐδετέρου τῶν Η, Κ, ἀμφότερα τὰ ἀδύνατα συμβήσεται.

Ducantur enim ΔΕ, ΔΖ, quæ ſectiones contingant; & juncta ΕΖ, ſi fieri poſſit, non tranſeat per Κ, Η, ſed vel per alterum ipſorum tantum, vel per neutrum. ſi enim per Η tantum tranſeat, recta ΔΒ non erit æqualis ipſi ΒΚ, ſed alii cuidam; quod [per 31. 3.huj.] eſt abſurdum. ſi vero tantum per Κ, non erit ut ΓΔ ad ΔΘ ita ΓΗ ad ΗΘ, ſed [per 37.3.huj.] alia quædam ad aliam. quod ſi per neutrum ipſorum Κ, Η tranſeat, utraque abſurda ſequentur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ΄.

Εστωσαν πάλιν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τὸ Δ σημεῖον ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης, καὶ ἤχθω ἡ μὲν Β Δ τὴν Β τομὴν καθ᾽ ἓν μόνον τέμνουσα, τῇ δὲ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων παράλληλος· ἡ δὲ Δ Α τὴν Α τομὴν ὁμοίως τέμνῃ, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν Δ Β τῇ Β Η, ἡ δὲ Δ Α τῇ Α Κ· λέγω ὅτι ἡ διὰ τῶν Κ, Η συμβάλλει ταῖς τομαῖς, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Δ ἀγόμεναι ἐφάψονται τῶν τομῶν.



Ηχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ Δ Ε, Δ Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Ε Ζ, εἰ δυνατὸν, μὴ ἐρχέσθω διὰ τῶν Κ, Η, ἤτοι δὴ διὰ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἐλεύσεται, ἢ δι᾽ οὐδετέρου. καὶ ἤτοι ἡ Δ Α οὐκ ἔσται ἴση τῇ Α Κ, ἀλλ᾽ ἄλλῃ τινι, ὅπερ ἄτοπον· ἢ ἡ Δ Β τῇ Β Η οὐκ ἴση, ἢ οὐδετέρα οὐδετέρᾳ. καὶ πάλιν ἐπ᾽ ἀμφοτέρων τὸ αὐτὸ ἄτοπον συμβήσεται· ἥξει ἄρα ἡ Ε Ζ διὰ τῶν Κ, Η.

Prop. XXIII. *Theor.*

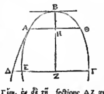
Sint itidem oppoſitæ ſectiones Α, Β, punctumque Δ ſit in angulo deinceps ei qui ſub aſymptotis continetur, & recta quidem ΒΔ ſectionem Β in uno puncto tantum ſecet, & ſit alteri aſymptoto parallela, recta vero ΔΑ ſimiliter ſecet ſectionem Α, ſitque ΔΒ ipſi ΒΗ æqualis, & ΔΑ ipſi ΑΚ: dico rectam quæ tranſit per Κ, Η occurrere ſectionibus; & quæ ab occurſibus ad Δ ducuntur ſectiones contingere.

Ducantur enim ΔΕ, ΔΖ quæ contingant ſectiones; & juncta ΕΖ, ſi fieri poteſt, non tranſeat per Κ, Η; vel igitur per alterum ipſorum, vel per neutrum tranſibit. unde vel ΔΑ non erit æqualis ΑΚ, ſed alii cuipiam, quod [per 31. 3. huj.] eſt abſurdum: vel ΔΒ non erit æqualis ipſi ΒΗ; vel neutra neutræ. & rurſus in utriſque idem continget abſurdum: recta igitur ΕΖ per puncta Κ, Η neceſſario tranſibit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδ΄.

Κώνου τομὴ κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ οὐ συμβάλλει οὕτως, ὥστε μέρος μέν τι εἶναι ταὐτὸν, μέρος δὲ μὴ εἶναι κοινόν.

Ει δυνατὸν, κώνου τομὴ ἡ Δ Α Β Γ κύκλου περιφερείᾳ ἢ κώνου τομῇ τῇ Ε Α Β Γ συμβαλλέτω, καὶ ἔστω αὐτῶν κοινὸν μέρος τὸ αὐτὸ τὸ Α Β Γ, μὴ κοινὸν δὲ τὸ Α Δ καὶ τὸ Α Ε, καὶ εἰλήφθω ἐπ᾽ αὐτῶν σημεῖον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Θ Α, καὶ διὰ τυχόντος σημείου τοῦ Ε τῇ Α Θ παράλληλος ἤχθω ἡ Δ Ε Γ, καὶ τετμήσθω ἡ Α Θ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η διάμετρος ἤχθω ἡ Β Η Ζ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Β παρὰ τὴν Α Θ ἐφάψεται ἑκατέρας τῶν τομῶν, καὶ παράλληλος ἔσται τῇ Δ Ε Γ, καὶ ἔσται ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ Δ Ζ τῇ Ζ Γ ἴση, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ Ε Ζ τῇ Ζ Γ ἴση· ὥστε καὶ ἡ Δ Ζ τῇ Ζ Ε ἐστὶν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.



Prop. XXIV. *Theor.*

Coni ſectio coni ſectioni vel circuli circumferentiæ non ita occurrit, ut pars quidem eadem ſit, pars vero non ſit communis.

Si enim fieri poteſt, coni ſectio ΔΑΒΓ coni ſectioni aut circuli circumferentiæ ΕΑΒΓ occurrat, atque ipſarum communis pars ſit eadem ΑΒΓ, non communis autem ΑΔ, ΑΕ; & ſumpto in ipſis puncto Θ jungatur ΘΑ, & per quodvis punctum Ε ducatur ΔΒΓ parallela ipſi ΑΘ, ſectaque ΑΘ bifariam in Η, ducatur per Η diameter ΒΗΖ: ergo [per 32. 1.huj.] quæ per Β ipſi ΑΘ parallela ducitur, utramque ſectionem continget, & parallela erit ipſi ΔΒΓ; eritque [per 46. vel 47. 1.huj.] in altera quidem ſectione ΔΖ æqualis ΖΓ, in altera vero ΕΖ æqualis ΖΓ: quare & ΔΖ ipſi ΖΕ æqualis erit, quod fieri non poteſt.

EUTOCIUS.

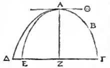
Αλλως.

Εστωσαν αἱ Ε Α Β Γ, Δ Α Β Γ τομαὶ, ὡς εἴρηται, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ Δ Ε Γ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ Δ Ε Γ

Aliter.

Sint ſectiones ΕΑΒΓ, ΔΑΒΓ, ducaturque utcunque recta ΔΕΓ, & per Α ipſi ΔΕΓ parallela

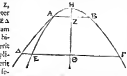
ducatur AΘ. ſi igitur AΘ intra ſectiones cadit, congruet ea demonſtratio quæ ab *Apollonio* affertur. ſi vero contingit in puncto A, utraſque ſectiones continget: atque tum [per 46. vel 47. 1 huj.] diameter alterius ſectionis, quæ ab A ducitur, reliquæ etiam diameter erit; & propterea in puncto Z biſariam ſecabit & rectam ΓΔ & EΓ, quod fieri non poteſt.



παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ. εἰ μὲν οὖν ἐντὸς τῶν τομῶν πίπτει, ἡ ἐν τῷ ῥητῷ ἀπόδειξις ἁρμόσει. εἰ δὲ ἐφάψεται κατὰ τὸ Α, ἀμφοτέρων ἐφάψεται τῶν τομῶν· καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἀγομένη διάμετρος τῆς ἑτέρας τῶν τομῶν, διάμετρος ἔσται καὶ τῆς λοιπῆς· δίχα ἄρα τέμνει κατὰ τὸ Ζ τήν τε ΓΔ καὶ τὴν ΕΓ, ὅπερ ἀδύνατον.

Aliter.

Sint ſectiones EABΓ, ΔABΓ, ut dictum eſt, & in communi ipſarum parte ABΓ ſumatur quodvis punctum B, & ducta AB biſariam ſecetur in Z, perque Z ducatur diameter HZΘ, & per Γ recta ΓEΔ ipſi AB parallela. quoniam itaque ZΘ diameter eſt, & biſariam ſecat rectam AB; erit igitur AB ordinatim applicata, & illi parallela erit ΓEΔ: ergo ΓE biſariam ſecabitur in Θ. ſed in ſectione quidem EABΓ ducta eſt EΓ, & in ſectione ΔABΓ ipſa ΔΓ: recta igitur EΘ rectæ ΘΔ eſt æqualis, quod fieri non poteſt.



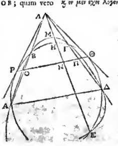
Ἄλλως.

Ἔστωσαν αἱ ΕΑΒΓ, ΔΑΒΓ τομαί, ὡς εἴρηται, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ κοινοῦ τμήματος αὐτῶν σημεῖόν τι τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Ζ διάμετρος ἤχθω ἡ ΗΖΘ, καὶ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΒ ἤχθω ἡ ΓΕΔ. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΖΘ, καὶ δίχα τέμνει τὴν ΑΒ· τεταγμένως ἄρα κατῆκται ἡ ΑΒ, καὶ ἔστι παράλληλος αὐτῇ ἡ ΓΕΔ· δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΓΕ κατὰ τὸ Θ. ἀλλ' ἐν μὲν τῇ ΕΑΒΓ γέγραπται ἡ ΕΓ, ἐν δὲ τῇ ΔΑΒΓ ἡ ΔΓ· ἴση ἄρα ἡ ΕΘ τῇ ΘΔ, ὅπερ ἀδύνατον.

PROP. XXV. *Theor.*

Coni ſectio coni ſectionem vel circuli circumferentiam in pluribus punctis quam quatuor non ſecat.

SI enim fieri poteſt, ſecet in quinque punctis A, B, Γ, Δ, E; ſintque A, B, Γ, Δ, E occurſus deinceps, nullum intermedium relinquentes, & junctæ AB, ΓΔ producantur: convenient igitur [per 24. & 25. 2. huj.] inter ſe extra ſectionem in parabola & hyperbola. itaque conveniant in Λ; & quam rationem habet ΛA ad AB eandem habeat AO ad OB; quam vero habet ΔΛ ad ΛΓ habeat ΔΠ ad ΠΓ: ergo [per 9. 4. huj.] quæ à puncto Π ad O juncta producitur, ex utraque parte occurret ſectioni; & quæ ab occurſibus ducuntur ad Λ ſectiones contingent. occurrat in punctis Θ, P, & ΘΛ, ΛP jungantur: contingent igitur hæ ſectiones; ergo EΛ utramq; ſecabit, quoniam [ex hyp.] inter B, Γ nullus eſt occurſus. itaque ſecet in punctis M, H: ergo [per 37. 3. huj.] in altera quidem ſectione erit ut BΛ ad ΛH ita EN ad NH: in altera autem ut EΛ ad ΛM ita BN ad NM: quod fieri non poteſt *;



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε΄.

Κώνου τομὴ κώνου τομὴν ἢ κύκλου περιφέρειαν οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα τεσσάρων.

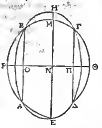
Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτω κατὰ πέντε σημεῖα, τὰ Α,Β,Γ,Δ,Ε, καὶ ἔστωσαν αἱ Α,Β,Γ,Δ,Ε συμπτώσεις ἐφεξῆς μηδεμίαν παραλείπουσαι μεταξὺ αὐτῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ αὗται ἐκτὸς τῆς τομῆς ἐπὶ τῆς παραβολῆς καὶ ὑπερβολῆς. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΛΑ πρὸς ΛΒ ἐχέτω ἡ ΑΟ πρὸς ΟΒ, ὃν δὲ ἔχει λόγον ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ ἐχέτω ἡ ΔΠ πρὸς ΠΓ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Π ἐπὶ τὸ Ο ἐπιζευγνυμένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευγνύμεναι ἐφάψονται τῆς τομῆς. συμπιπτέτω δὲ κατὰ τὰ Θ, Ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΛ, ΛΡ· ἐφάψονται δὴ αὗται. ἡ ἄρα ΕΛ τέμνει ἑκατέραν τομήν, ἐπείπερ μεταξὺ τῶν Β, Γ σύμπτωσις οὐκ ἔστι. τεμνέτω κατὰ τὰ Μ, Η· ἔσται ἄρα διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομὴν ὡς ἡ ΕΛ πρὸς ΛΗ οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΗ, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν ὡς ἡ ΕΛ πρὸς ΛΜ οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΜ· τοῦτο δὲ

* Nam EΛ ad ΛM majorem habet rationem quam EΛ ad ΛH. eſt vero [per 37. 3 huj.] EΛ ad ΛM ut EN ad NM; & EΛ ad ΛH ut EN ad NH: ergo EN ad NM majorem habet rationem quam EN ad NH: unde NM minor eſt quam NH. quod fieri non poteſt.

ἀδύνατον,

Digitized by Google

ἀδύνατον, ὥστε καὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς. Ἐὰν δὲ αἱ ΑΒ, ΔΓ παράλληλοι ὦσιν, ἔσονται μὲν αἱ τομαὶ ἐλλείψεις, ἢ κύκλου περιφέρεια. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ δίχα κατὰ τὰ Ο, Π, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΠΟ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα· συμπεσεῖται δὴ ταῖς τομαῖς. συμπιπτέτω δὲ κατὰ τὰ Θ, Ρ· ἔσται δὴ διάμετρος τῶν τομῶν ἡ ΘΡ, τεταγμένως δὲ ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΑΒ, ΓΔ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τὰς ΑΒ, ΓΔ ἡ ΕΝΜΗ· τεμεῖ ἄρα ἡ ΕΜΗ τὴν ΘΡ καὶ ἑκατέραν τῶν γραμμῶν, διότι ἑτέρα σύμπτωσις οὐκ ἔστι παρὰ τὰς Α, Β, Γ, Δ· ἔσται δὴ διὰ ταῦτα ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ ΝΜ ἴση τῇ ΕΝ, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ ΝΕ τῇ ΝΗ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΝΜ τῇ ΝΗ ἐστὶν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.



quare neque illud quod à principio ſupponebatur. Si vero Α Β, Δ Γ parallelæ ſint, ſectiones erunt ellipſes, vel circuli circumferentia. dividantur Α Β, Γ Δ bifariam in Ο, Π; & juncta Π Ο ad utraſque partes producatur: ſectionibus igitur occurret. occurrat in Θ, Ρ; erit igitur [per 28. 2. huj.] Θ Ρ diameter ſectionum, & Α Β, Γ Δ ad ipſam ordinatim applicatæ. à puncto Ε ducatur Ε Ν Μ Η ipſis Α Β, Γ Δ parallela: ſecabit igitur rectam Θ Ρ & utramq; ſectionem, propterea quod alius occurſus non eſt præter Α, Β, Γ, Δ: ergo, per jam dicta, in altera quidem ſectione erit ipſi Ε Ν æqualis Ν Μ; in altera vero Ε Ν æqualis Ν Η; quare Ν Μ erit æqualis ipſi Ν Η, quod fieri non poteſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛʹ.

Ἐὰν τῶν εἰρημένων γραμμῶν τινες καθ' ἓν ἐφάπτωνται σημεῖον ἀλλήλων, οὐ συμβάλλουσιν ἑαυταῖς καθ' ἕτερα σημεῖα πλείονα ἢ δύο.

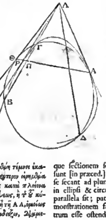
Ἐφαπτέσθωσαν γὰρ ἀλλήλων τινὲς δύο τῶν εἰρημένων γραμμῶν κατὰ τὸ Α σημεῖον· λέγω ὅτι οὐ συμβάλλουσι κατ' ἄλλα σημεῖα πλείονα ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατόν, συμβαλλέτωσαν κατὰ τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἔστωσαν αἱ συμπτώσεις ἐφεξῆς ἀλλήλαις μηδεμίαν μεταξὺ παραλείπουσαι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ ΑΛ· ἐφάψεται δὴ τῶν δύο τομῶν, καὶ συμπεσεῖται τῇ ΓΒ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Λ, καὶ γενέσθω ὡς ἡ ΓΛ πρὸς ΛΒ οὕτως ἡ ΓΠ πρὸς ΠΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΠ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ ταῖς τομαῖς, καὶ αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἐπὶ τὸ Λ ἐφάψονται τῶν τομῶν. συμπιπτέτω κατὰ τὰ Θ, Ρ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΛ, ΛΡ· ἐφάψονται δὴ αὗται τῶν τομῶν· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Λ ἐπιζευγνυμένη τέμνει ἑκατέραν τῶν τομῶν, καὶ συμβήσεται τὰ πρότερον εἰρημένα ἄτοπα· οὐκ ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλας κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. Ἐὰν δὲ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως, ἢ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἡ ΓΒ παράλληλος ᾖ τῇ ΑΛ, ὁμοίως τῷ προειρημένῳ ποιησόμεθα τὴν ἀπόδειξιν, διάμετρον δείξαντες τὴν ΑΘ.

Prop. XXVI. *Theor.*

Si dictarum curvarum aliquæ in uno puncto ſeſe contingant; non occurrent ſibi ipſis ad alia puncta plura quam duo.

Contingant enim ſeſe duæ quæpiam dictarum curvarum in puncto Α: dico eas non occurrere ſibi ipſis ad alia puncta plura quam duo.

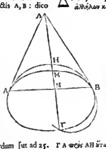


Nam, ſi fieri poteſt, occurrant ad puncta Β, Γ, Δ; ſintque occurſus deinceps, nullum intermedium relinquentes; & juncta Β Γ producatur; à puncto autem Α ducatur contingens Α Λ, quæ quidem continget duas ſectiones & cum recta Γ Β conveniet. conveniat in Λ, & fiat ut Γ Λ ad Λ Β ita Γ Π ad Π Β; jungaturque Α Π, & producatur: occurret igitur ea [per 9. 4 huj.] ſectionibus; & quæ ab occurſibus ad punctum Λ ducuntur, ſectiones contingent. itaque occurrat in punctis Θ, Ρ, & jungantur Θ Λ, Λ Ρ; contingent igitur ſectiones: ergo quæ à puncto Δ ad Λ ducitur utramque ſectionem ſecabit; & eadem quæ dicta ſunt [in præced.] abſurda ſequentur: non igitur ſe ſecant ad plura puncta quam duo. Si vero in ellipſi & circuli circumferentia Γ Β ipſi Α Λ parallela ſit; pari modo [atque in præced.] demonſtrationem faciemus, rectam Α Θ diametrum eſſe oſtendentes.

Prop. XXVII. *Theor.*

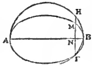
Si prædictarum curvarum aliquæ in duobus punctis ſeſe contingant, in alio puncto ſibi ipſis non occurrent.

PRÆDICTARUM enim curvarum duæ ſeſe contingant in duobus punctis A, B: dico eas ad aliud punctum ſibi ipſis non occurrere.

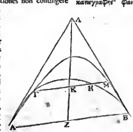


Nam, ſi fieri poteſt, occurrant etiam ad punctum Γ; ſitque primum Γ extra A, B tactus; & ab ipſis A, B ducantur rectæ contingentes, quæ in punctum Δ conveniant, ut in prima figura apparet: contingent igitur hæ utramque ſectionem; & juncta Γ Δ utramque ſecabit. ſecet ea in punctis H, M, & jungatur A N B: ergo in altera quidem ſectione erit ut Γ Δ ad Δ H ita Γ N ad N H; in altera vero ut Γ Δ ad Δ M ita Γ N ad N M; quod eſt abſurdum [ut ad 25. oſtenſum eſt.]

At ſi Γ H parallela ſit rectis ad puncta A, B contingentibus, ut in ellipſi in ſecunda figura; jungemus lineam A B, quæ [per converſ. 27. 2. huj.] ſectionum diameter erit; ergo utraque rectarum Γ H, Γ M in puncto N bifariam ſecabitur; quod eſt abſurdum: igitur ſectiones ad aliud punctum ſibi ipſis non occurrunt, ſed ad A, B tantum.



Sit deinde Γ inter tactus, ut in tertia figura: perſpicuum eſt igitur ſectiones non contingere ſeſe ad punctum Γ, quia ad duo tantum puncta contingere ponebantur. ſecent igitur ſeipſas in Γ, & à punctis A, B ducantur A Δ, Δ B, quæ ſectiones contingant; jungaturque A B, quæ in Z bifariam dividatur: ergo [per 29. 2. huj.] à puncto Δ ad Z ducta diameter erit; quæ quidem per Γ non tranſibit. ſi enim tranſeat, quæ per Γ ipſi A B parallela ducitur [per converſ. 5, & 6. 2. huj.] continget utramque ſectionem, quod fieri non poteſt. itaque ducatur à puncto Γ recta Γ K H M parallela ipſi A B: erit igitur in altera quidem ſectione Γ K æqualis ipſi K H, in altera vero ipſi K Γ æqualis K M; quare K M ipſi K H erit æqualis, quod fieri non poteſt. eodemque modo ſi contingentes inter ſe parallelæ ſint, ex iis quæ diximus idem concludetur abſurdum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ′.

Ἐὰν τῶν προειρημένων γραμμῶν τινες κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις καθ' ἕτερον.

ΔΥΟ γὰρ τῶν εἰρημένων γραμμῶν ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Β· λέγω ὅτι ἀλλήλαις κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ συμβάλλουσιν.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμβαλλέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω πρότερον τὸ Γ ἐκτὸς τῶν Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἐκ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι· ἐφάψονται ἄρα ἀμφοτέρων τῶν γραμμῶν. ἐφαπτέσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Δ, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ· τεμεῖ δὴ ἑκατέραν τῶν τομῶν. τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΝΒ· ἔσται ἄρα ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΓΝ πρὸς ΝΗ, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΜ οὕτως ἡ ΓΝ πρὸς ΝΜ, ὅπερ ἄτοπον.

Ἐὰν δὲ ἡ ΓΗ παράλληλος ᾖ ταῖς κατὰ τὰ Α, Β σημεῖα ἐφαπτομέναις, ὡς ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐν τῇ δευτέρᾳ καταγραφῇ, ἐπιζεύξαντες τὴν ΑΒ ἐροῦμεν ὅτι διάμετρός ἐστι τῶν τομῶν· ὥστε δίχα τμηθήσεται ἑκατέρα τῶν ΓΗ, ΓΜ κατὰ τὸ Ν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα καθ' ἕτερον σημεῖον συμβάλλουσιν αἱ γραμμαὶ ἀλλήλαις, ἀλλὰ κατὰ μόνα τὰ Α, Β.

Ἔστω δὴ τὸ Γ μεταξὺ τῶν ἁφῶν, ὡς ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς· φανερὸν δὴ ὅτι οὐκ ἐφάψονται αἱ γραμμαὶ ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ, κατὰ δύο γὰρ μόνον ὑπέκειντο ἐφαπτόμεναι. τεμνέτωσαν οὖν κατὰ τὸ Γ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Ζ διάμετρός ἐστι, διὰ μὲν οὖν τοῦ Γ οὐκ ἐλεύσεται. εἰ γὰρ ἥξει, ἡ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΒ ἀγομένη ἐφάψεται ἀμφοτέρων τῶν τομῶν. τοῦτο δὲ ἀδύνατον. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΑΒ ἡ ΓΚΗΜ· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ ΓΚ ἴση τῇ ΚΗ, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ ἡ ΚΜ τῇ ΚΓ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΚΗ, ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὴ καὶ ἐὰν παράλληλοι ὦσιν αἱ ἐφαπτόμεναι, κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς ἐπάνω τὸ ἀδύνατον δειχθήσεται.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Παραβολὴ παραβολῆς οὐκ ἐφάψεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

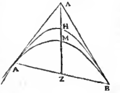
Εἰ γὰρ δυνατὸν ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ παραβολαὶ κατὰ τὰ Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΛΑ, ΛΒ· ἐφάψονται δὴ αὗται ἀμφοτέρων τῶν τομῶν, καὶ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ Λ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἡ ΛΖ. ἐπεὶ οὖν δύο γραμμαὶ αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ δύο τὰ Α, Β, οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις καθ' ἕτερον· ὥστε ἡ ΛΖ ἑκατέραν τῶν τομῶν τέμνει. τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομὴν ἡ ΛΗ τῇ ΗΖ ἴση, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν ἡ ΛΜ τῇ ΜΖ ἴση, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παραβολὴ παραβολῆς ἐφάψεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

Prop. XXVIII. *Theor.*

Parabola parabolam non continget præterquam in uno puncto.

SI enim fieri poteſt, parabolæ A H B, A M B in punctis A, B ſeſe contingant, & ducantur rectæ contingentes Λ A, Λ B: contingent igitur hæ utraſque ſectiones, & in punctum Λ convenient.



Jungatur A B, & bifariam ſecetur in Z, & ducatur Λ Z. quoniam igitur duæ ſectiones A H B, A M B ſeſe contingunt in punctis A, B [per præced.] ad aliud punctum ſibi ipſis non occurrent: quare Λ Z utramque ſectionem ſecabit. ſecet in H, M: ergo [per 35. 1. huj.] in altera quidem ſectione erit Λ H æqualis ipſi H Z, in altera vero Λ M ipſi M Z; quod fieri non poteſt: igitur parabola parabolam præterquam in uno puncto non continget.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

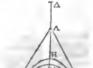
Παραβολὴ ὑπερβολῆς οὐκ ἐφάψεται κατὰ δύο σημεῖα, ἐκτὸς αὐτῆς πίπτουσα.

Ἔστω παραβολὴ μὲν ἡ ΑΗΒ, ὑπερβολὴ δὲ ἡ ΑΜΒ, καὶ εἰ δυνατὸν ἐφαπτέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι ἑκατέρας τῶν Α, Β τομῶν, συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΖ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ τομαὶ κατὰ τὰ Α, Β ἐφάπτονται, κατ' ἄλλο οὐ συμβάλλουσιν· ἡ ἄρα ΛΖ κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο τέμνει τὰς τομάς. τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ, καὶ προσεκβεβλήσθω ἡ ΛΖ· πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὸ κέντρον τῆς ὑπερβολῆς. ἔστω κέντρον τὸ Δ· ἔσται δὴ, διὰ μὲν τὴν ὑπερβολὴν, ὡς ἡ ΖΔ πρὸς ΔΜ οὕτως ἡ ΜΔ πρὸς ΔΛ, καὶ λοιπὴ ἡ ΖΜ πρὸς ΜΛ. μείζων δὲ ἡ ΖΔ τῆς ΔΜ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΜ τῆς ΜΛ. διὰ δὲ τὴν παραβολὴν ἴση ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ· ὅπερ ἀδύνατον.

Prop. XXIX. *Theor.*

Parabola hyperbolam non continget in duobus punctis, extra ipſam cadens.

SIT parabola quidem A H B, hyperbola vero A M B; & ſi fieri poteſt, ſeſe contingant in punctis A, B; & ab ipſis ducantur rectæ utramque ſectionem contingentes, quæ in Λ conveniant; junctaque A B bifariam ſecetur in Z, & ducatur Λ Z. itaque quoniam ſectiones A H B, A M B ſeſe contingunt in punctis A, B [per 27. 4. huj.] ad aliud punctum ſibi ipſis non occurrent: quare Λ Z in alio atque alio puncto ſectiones ſecabit. ſecet in H, M, & producatur Λ Z: igitur [per 29. 2. huj.] in centrum hyperbolæ cadet. ſit quidem centrum Δ: ergo, propter hyperbolam, ut Z Δ ad Δ M ita erit [per 37. 1. huj. & 17. 6.] M Δ ad Δ Λ; & [per 19. 5.] ita reliqua Z M ad M Λ. eſt autem Z Δ major quam Δ M: ergo [per 14. 5.] & Z M major quam M Λ. ſed & propter parabolam [per 35. 1. huj.] erit Z H æqualis ipſi H Λ; quod abſurdum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Παραβολὴ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας οὐκ ἐφάψεται κατὰ δύο σημεῖα, ἐντὸς αὐτῆς πίπτουσα.

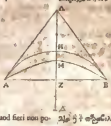
Ἔστω γὰρ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΗΒ, παραβολὴ δὲ ἡ ΑΜΒ, καὶ εἰ δυνατὸν ἐφαπτέσθωσαν κατὰ δύο τὰ Α, Β, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β

Prop. XXX. *Theor.*

Parabola ellipſim vel circuli circumferentiam non continget in duobus punctis, intra ipſam cadens.

SIT ellipſis, vel circuli circumferentia A H B, parabola vero A M B; &, ſi fieri poteſt, in duobus punctis A, B ſeſe contingant, & ab ipſis ducantur

ducantur rectæ contingentes ſectiones, quæ conveniant in punctum Λ; junctaque AB ſecetur in Z bifariam, & jungatur ΛZ; ſecabit igitur ΛZ utramque ſectionem in alio atque alio puncto, uti dictum eſt. ſecet in H, M; & producatur ΛZ uſque ad Δ centrum ellipſeos vel circuli: ergo propter ellipſim & circulum erit [per 37. 1. huj.] ut ΛΔ ad ΔH ita HΔ ad ΔZ, & ita reliqua ΛH ad HZ. eſt autem ΛΔ major quam ΔH; ergo & ΛH major quam HZ. ſed & propter parabolam erit [per 35. 1. huj.] ΛM æqualis ipſi MZ; quod fieri non poteſt.

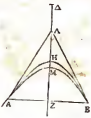


ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΖ· τεμεῖ δὴ ἑκατέραν τῶν τομῶν κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο, ὡς εἴρηται. τεμνέτω κατὰ τὰ Η, Μ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΛΖ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἔστω τὸ Δ κέντρον τῆς ἐλλείψεως ἢ τοῦ κύκλου· ἔστιν ἄρα διὰ τὴν ἔλλειψιν καὶ τὸν κύκλον ὡς ἡ ΛΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς ΔΖ, καὶ λοιπὴ ἡ ΛΗ πρὸς ΗΖ. μείζων δὲ ἡ ΛΔ τῆς ΔΗ· μείζων ἄρα καὶ ΛΗ τῆς ΗΖ. διὰ δὲ τὴν παραβολὴν ἴση ἡ ΛΜ τῇ ΜΖ· ὅπερ ἀδύνατον.

Prop. XXXI. *Theor.*

Hyperbola hyperbolam idem centrum habentem in duobus punctis non continget.

HYPERBOLÆ enim AHB, AMB idem habentes centrum Δ, ſi fieri poteſt, in punctis A, B ſeſe contingant; & ducantur ab ipſis rectæ contingentes, quæ inter ſe conveniant, ut ΛA, ΛB; junctaque ΔΛ producatur ad Z, & jungatur AB: ergo [per 30. 2. huj.] ΔΛZ ſecat bifariam rectam AB in Z, utraſque autem ſectiones in H, M ſecabit; quare [per 37. 1. huj.] propter hyperbolam AHB, rectangulum ZΔΛ eſt æquale quadrato ex ΔH; & propter hyperbolam AMB rectangulum ZΔΛ æquale eſt quadrato ex ΔM: quadratum igitur ex MΔ quadrato ex ΔH æquale erit; quod fieri non poteſt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Ὑπερβολὴ ὑπερβολῆς τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσα οὐκ ἐφάψεται κατὰ δύο σημεῖα.

ὙΠΕΡΒΟΛΑΙ γὰρ αἱ ΑΗΒ, ΑΜΒ τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσαι τὸ Δ, εἰ δυνατὸν, ἐφαπτέσθωσαν κατὰ τὰ Α, Β, ἤχθωσαν δὲ ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι αὐτῶν καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις αἱ ΛΑ, ΛΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΛ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ ΑΒ. ἡ ἄρα ΔΛΖ τὴν ΑΒ δίχα τέμνει κατὰ τὸ Ζ, τεμεῖ δὲ ἡ ΔΛΖ τὰς τομὰς κατὰ τὰ Η, Μ· ἔσται δὴ διὰ μὲν τὴν ΑΗΒ ὑπερβολὴν, ἴσον τὸ ὑπὸ ΖΔΛ τῷ ἀπὸ ΔΗ, διὰ δὲ τὴν ΑΜΒ, τὸ ὑπὸ ΖΔΛ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΜΔ ἴσον τῷ ἀπὸ ΔΗ, ὅπερ ἀδύνατον.

Prop. XXXII. *Theor.*

Si ellipſis ellipſim vel circuli circumferentiam idem centrum habentem in duobus punctis contingat; recta conjungens tactus per centrum tranſibit.

CONTINGANT enim ſeſe dictæ lineæ in punctis A, B; & juncta AB, per A, B puncta ducantur rectæ ſectiones contingentes, quæ, ſi fieri poſſit, conveniant in Λ; & recta AB in Z bifariam dividatur, & jungatur ΛZ: ergo [per 29. 2. huj.] ΛZ diameter erit ſectionum. ſit centrum Δ, ſi fieri poteſt: rectangu-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Ἐὰν ἔλλειψις ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτηται, τὸ αὐτὸ κέντρον ἔχουσα· ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου πεσεῖται.

ἘΦΑΠΤΕΣΘΩΣΑΝ γὰρ ἀλλήλων αἱ εἰρημέναι γραμμαὶ κατὰ τὰ Α, Β σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διὰ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν ἤχθωσαν, καὶ εἰ δυνατὸν συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἡ ΑΒ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΖ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΖ τῶν τομῶν. ἔστω, εἰ δυνατὸν, κέντρον

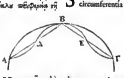
τρον τὸ Δ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ Α Δ Ζ διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομὴν ἴσον τῷ ἀπὸ Δ Η, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν ἴσον τῷ ἀπὸ Δ Μ· ὥστε τὸ ἀπὸ Η Δ ἴσον τῷ ἀπὸ Δ Μ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι συμπεσοῦνται· παράλληλοι ἄρα εἰσί· καὶ διὰ τοῦτο διάμετρός ἡ Α Β· ὥστε διὰ τοῦ κέντρου πίπτει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

lum igitur Α Δ Ζ [per 37.1.huj.] propter alteram quidem ſectionem eſt æquale quadrato ex Δ Η, propter alteram vero æquale quadrato ex Δ Μ: quare quadratum ex Η Δ quadrato ex Δ Μ æquale erit, quod fieri non poteſt: igitur rectæ contingentes à punctis Α, Β ductæ non conveniunt: ergo parallelæ ſunt inter ſeſe: & idcirco recta Α Β diameter eſt; adeoque per centrum tranſibit. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ'.

Κώνου τομὴ, ἢ κύκλου περιφέρεια κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα ἔχουσα, οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ Α Β Γ κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ τῇ Α Δ Β Ε Γ συμβαλλέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κυρτὰ ἔχουσα τὰ Α Β Γ τῇ γραμμῇ. εἰλήφθω τρία σημεῖα τὰ Α, Β, Γ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Α Β, Β Γ· γωνίαν ἄρα περιέχουσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς κοίλοις τῆς Α Β Γ γραμμῆς. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ αἱ Α Β, Β Γ τὴν αὐτὴν γωνίαν περιέχουσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τοῖς κοίλοις τῆς Α Δ Β Ε Γ γραμμῆς· αἱ εἰρημέναι ἄρα γραμμαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἔχουσι τὰ κοῖλα, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη.



Prop. XXXIII. *Theor.*

Coni ſectio vel circuli circumferentia coni ſectioni vel circuli circumferentiæ, ad eaſdem partes concava non habens, ad plura puncta quam duo non occurret.

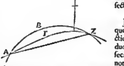
Si enim fieri poteſt, coni ſectio vel circuli circumferentia Α Β Γ coni ſectioni vel circuli circumferentiæ Α Δ Β Ε Γ occurrat ad plura puncta quam duo, non habens convexa Α Β Γ ad eaſdem partes ad quas altera. ſumantur tria puncta Α, Β, Γ; & Α Β, Β Γ jungantur: continent igitur angulum ad eaſdem partes, ad quas ſunt concava ſectionis Α Β Γ. pari modo rectæ Α Β, Β Γ eundem angulum continent ad eas partes ad quas ſunt concava ſectionis Α Δ Β Ε Γ: ergo dictæ curvæ ad eaſdem partes habent concava ſua, quod fieri non poteſt; poſuimus enim ea ad contrarias partes ſita.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια συμπίπτῃ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα, καὶ αἱ μεταξὺ τῶν συμπτώσεων γραμμαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα ἔχωσι· προσεκβαλλομένη ἡ γραμμὴ κατὰ τὰς συμπτώσεις οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Δ, Α Γ Ζ, καὶ ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ Α Β Ζ, συμπίπτουσα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Ζ, καὶ ἐχέτωσαν αἱ Α Β Ζ, Α Γ Ζ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ κοῖλα· λέγω ὅτι ἡ Α Β Ζ γραμμὴ ἐκβαλλομένη οὐ συμπεσεῖται τῇ Δ.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ Α Ζ, καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ Δ, Α Γ Ζ, καὶ ἡ Α Ζ εὐθεῖα κατὰ δύο τέμνει τὴν ὑπερβολὴν, οὐ συμπεσεῖται ἐκβαλλομένη τῇ Δ ἀντικειμένῃ· οὐδὲ ἄρα ἡ Α Β Ζ γραμμὴ συμπεσεῖται τῇ Δ.



Prop. XXXIV. *Theor.*

Si coni ſectio vel circuli circumferentia occurrat uni oppoſitarum ſectionum in duobus punctis; & curvæ, quæ inter occurſus interjiciuntur, ad eaſdem partes concava habeant: producta curva ultra occurſus alteri oppoſitarum ſectionum non occurret.

Sint oppoſitæ ſectiones Δ, Α Γ Ζ; & coni ſectio vel circuli circumferentia Α Β Ζ occurrat alteri oppoſitarum ſectionum in duobus punctis Α, Ζ; habeantque Α Β Ζ, Α Γ Ζ concava ad eaſdem partes: dico curvam Α Β Ζ productam ſectioni Δ non occurrere.

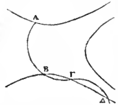
Jungatur enim Α Ζ; &, quoniam Δ, Α Γ Ζ oppoſitæ ſectiones ſunt, & recta Α Ζ in duobus punctis hyperbolam ſecat, producta [per 32.2.huj.] non occurret oppoſitæ ſectioni Δ: quare neque curva Α Β Ζ eidem occurret.

Prop.

Prop. XXXV. *Theor.*

Si coni ſectio vel circuli circumferentia uni oppoſitarum ſectionum occurrat; alteri ipſarum non occurret ad plura puncta quam duo.

SINT oppoſitæ ſectiones A, B; & ipſi A occurrat coni ſectio vel circuli circumferentia ABΓ, ſecetque B in punctis B, Γ: dico ad aliud punctum ipſi BΓ non occurrere.



Si enim fieri poſſit, occurrat in Δ: ergo ſectio BΓΔ ſectioni BΓ occurrit ad plura puncta quam duo, non habens concava ad eaſdem partes; quod [per 33.4.huj.] fieri non poteſt. ſimiliter demonſtrabitur ſi recta ABΓ oppoſitam ſectionem contingat.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε´.

Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια μιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ, τῇ λοιπῇ αὐτῶν οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ συμβαλλέτω τῇ Α ἡ τοῦ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒΓ, καὶ τεμνέτω τὴν Β ἀντικειμένην κατὰ τὰ Β, Γ· λέγω ὅτι κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ συμπεσεῖται τῇ ΒΓ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Δ· ἡ ἄρα ΒΓΔ τῇ ΒΓ τομῇ συμβάλλει κατὰ πλείονα ἢ δύο, μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔχουσα τὰ κοῖλα· ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐὰν ἡ ΑΒΓ γραμμὴ τῆς ἀντικειμένης ἐφάπτηται.

Prop. XXXVI. *Theor.*

Coni ſectio vel circuli circumferentia oppoſitis ſectionibus ad plura puncta quam quatuor non occurret.

HOC autem perſpicue conſtat ex eo, quod ſectio occurrens uni oppoſitarum ſectionum reliquæ non occurrit ad plura puncta quam duo.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ´.

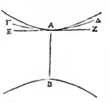
Κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ταῖς ἀντικειμέναις οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

ΦΑΝΕΡΟΝ δὲ τοῦτο, ἐπεὶ ἡ τὴν μίαν τῶν ἀντικειμένων συμπίπτουσα τῇ λοιπῇ κατὰ πλείονα δυεῖν μὴ συμπίπτει.

Prop. XXXVII. *Theor.*

Si coni ſectio vel circuli circumferentia unam oppoſitarum ſectionum concava ſui parte contingat; alteri oppoſitarum non occurret.

SINT oppoſitæ ſectiones A, B; & ſectionem A contingat alia ΓAΔ: dico ſectionem ΓAΔ ſectioni B non occurrere.



Ducatur enim per punctum A recta contingens EAZ: utramq; igitur ſectionem continget in A: quare * non occurret ſectioni B; & propterea neque curva ΓAΔ eidem occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ´.

Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφάπτηται τοῖς κοίλοις αὐτῆς· τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω ἡ ΓΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΑΔ τῇ Β οὐ συμπεσεῖται.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη ἡ ΕΑΖ· ἑκατέρας δὴ τῶν γραμμῶν ἐπιψαύει κατὰ τὸ Α· ὥστε οὐ συμπεσεῖται τῇ Β, ὥστε οὐδὲ ἡ ΓΑΔ.

Prop. XXXVIII. *Theor.*

Si coni ſectio vel circuli circumferentia utramque oppoſitarum ſectionum contingat in uno puncto; oppoſitis ſectionibus in alio puncto non occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λη´.

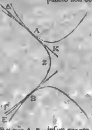
Ἐὰν κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων καθ᾽ ἓν ἐφάπτηται σημεῖον· καθ᾽ ἕτερον οὐ συμπεσεῖται ταῖς ἀντικειμέναις.

* Non enim poteſt tranſire per loca quæ ſunt κατὰ κορυφὴν angulo ſub aſymptotis ſectionis.

Digitized by Google

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἐφαπτέσθω ἑκατέρας τῶν Α, Β κατὰ τὰ Α, Β· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓ γραμμὴ καθ' ἕτερον οὐ συμπεσεῖται ταῖς Α, Β τομαῖς.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒΓ γραμμὴ τῆς Α τομῆς ἐφάπτεται καθ' ἕν, συμπίπτουσα καὶ τῇ Β· τῆς Α ἄρα τομῆς οὐκ ἐφάψεται κατὰ τὰ κοῖλα. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι οὐδὲ τῆς Β. ἤχθωσαν τῶν Α, Β τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΔΚ, ΒΕ, καὶ αὗται ἐφάψονται τῆς ΑΒΓ γραμμῆς. εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτω ἡ ἑτέρα αὐτῶν, καὶ ἔστω ἡ ΔΖ· μεταξὺ ἄρα τῆς ΔΑΖ ἐφαπτομένης καὶ τῆς Α τομῆς παρεμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΚ, ὅπερ ἀδύνατον· ἐφάψονται ἄρα τῆς ΑΒΓ. καὶ διὰ τοῦτο φανερὸν ὅτι ἡ ΑΒΓ καθ' ἕτερον οὐ συμβάλλει ταῖς Α, Β ἀντικειμέναις. οὕτως καὶ φανερὸν ὅτι ἐὰν ἡ ΓΑΒ γραμμὴ συμπίπτῃ τῇ Β ἀντικειμένῃ, οὐκ ἐφάψεται τῆς Α τοῖς κοίλοις ἑαυτῆς· δειχθήσεται δὲ ἀντιστρόφως τῷ λε΄.



Sint oppoſitæ ſectiones A, B; coni autem ſectio vel circuli circumferentia ABΓ utramque ipſarum in punctis A, B contingat: dico lineam ABΓ oppoſitis ſectionibus A, B in alio puncto non occurrere.

Quoniam igitur ABΓ ſectionem A in uno puncto contingit, ſectioni B occurrens; non continget ſectionem A concava ſui parte. ſimiliter demoſtrabitur, neque ita contingere ſectionem B, ducantur rectæ AΔK, BE contingentes ſectiones A, B; quæ & curvam ABΓ contingent. ſi enim fieri poteſt, altera ipſarum ſecet; ſitque ea AZ: ergo inter rectam ΔAZ contingentem & ſectionem A cadit recta intermedia AK; quod [per 32.1.huj.] eſt abſurdum: rectæ igitur AΔ, BE ipſam quoque ABΓ contingent. ex quo apparet curvam ABΓ ad aliud punctum oppoſitis ſectionibus non occurrere. ſic etiam manifeſtum eſt quod, ſi curva ΓAB occurrat oppoſitæ ſectioni B, non continget ſectionem A partibus ejus concavis: è converſo autem 35^m demonſtrabitur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ΄.

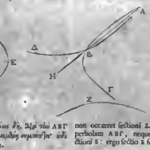
Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα συμπίπτῃ, ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

Prop. XXXIX. *Theor.*

Si hyperbola uni oppoſitarum ſectionum in duobus punctis occurrat, convexa habens è regione ſita; quæ ipſi opponitur ſectio alteri oppoſitarum non occurret.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΔ, Ζ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΒΔ συμβαλλέτω κατὰ τὰ Α, Β σημεῖα, ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτὰ τοῖς κοίλοις, καὶ τῆς ΑΒΓ ἔστω ἀντικειμένη ἡ Ε· λέγω ὅτι ἡ Ε οὐ συμπεσεῖται τῇ Ζ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολὴν τὴν ΑΒΔ εὐθεῖα τέμνει ἡ ΑΒΗ, ἐκβαλλομένη δὲ ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς· ὥστε οὐ συμπεσεῖται τῇ Ζ τομῇ. ὁμοίως δή, διὰ τὴν ΑΒΓ ὑπερβολήν, οὐδὲ τῇ Ε ἀντικειμένῃ συμπίπτει· οὐδὲ ἡ Ε ἄρα τῇ Ζ συμπεσεῖται.



Sint oppoſitæ ſectiones ABΔ, Z; & hyperbola ABΓ ſectioni ABΔ occurrat in punctis A, B, habens convexa è regione ſita; ſitque ſectioni ABΓ oppoſita ſectio E: dico ipſam E ſectioni Z non occurrere.

Jungatur enim AB & ad H producatur. quoniam igitur ABH recta ſecat hyperbolam ABΔ, producta vero ex utraque parte extra ſectionem cadit; ideo [per 33. 2. huj.] non occurret ſectioni Z. ſimiliter, propter hyperbolam ABΓ, neque occurret oppoſitæ ſectioni E: ergo ſectio E ſectioni Z non occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ΄.

Ἐὰν ὑπερβολὴ ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῶν ἀντικειμένων οὐδετέρᾳ συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα.

Prop. XL. *Theor.*

Si hyperbola occurrat utrique oppoſitarum ſectionum: quæ ipſi opponitur ſectio nulli oppoſitarum in duobus punctis occurret.

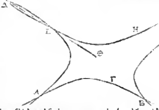
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὑπερβολὴ δὲ ἡ ΑΓΒ συμπιπτέτω ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων·

Sint oppoſitæ ſectiones A, B; & AΓB hyperbola utrique occurrat: dico ſectionem,

Digitized by Google

quæ ipſi ΑΓΒ opponitur, nulli ſectionum Α, Β occurrere in duobus punctis.

Si enim fieri poteſt, occurrat in punctis Δ, Ε; & juncta ΔΕ producatur: ergo quidem [per 33. 2. huj.] propter ſectionem ΔΕΗ recta ΔΕ ſectioni ΑΓΒ non occurret; & propter ſectionem ΑΕΔ non occurret ipſi Β; (per tres enim locos [per 33. 2. huj.] tranſibit) quod fieri non poteſt *. ſimiliter demonſtrabitur neque ſectioni Β in duobus punctis occurrere.



Eadem etiam ratione neutram ipſarum continget. ducatur enim recta contingens ΘΕ, quæ quidem continget utramque ſectionem: ergo propter ſectionem ΗΕ, ΘΕ ipſi ΑΓ non occurret; & propter ſectionem ΑΕ, ΘΕ non occurret ſectioni Β: quare neque ΑΓ ſectio ſectioni Β occurret, contra hypotheſin.

λέγω ὅτι ἡ τῇ ΑΓΒ ἀντικειμένη οὐ συμβάλλει ταῖς Α, Β τομαῖς κατὰ δύο σημεῖα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμβαλλέτω κατὰ τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω· διὰ μὲν δὴ τὴν ΔΕΗ τομὴν οὐ συμπεσεῖται ἡ ΔΕ εὐθεῖα τῇ ΑΒ τομῇ, διὰ δὲ τὴν ΑΕΔ οὐ συμπεσεῖται τῇ Β τομῇ· (διὰ γὰρ τῶν τριῶν τόπων ἐλεύσεται) ὅπερ ἀδύνατον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται ὅτι οὐδὲ τῇ Β τομῇ κατὰ δύο σημεῖα συμπεσεῖται.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὲ οὐδὲ ἐφάψεται ἑκατέρας αὐτῶν. ἀχθείσης γὰρ ἐπιψαυούσης τῆς ΘΕ, ἐφάπτεται μὲν αὐτὴ ἑκατέρας τῶν τομῶν· ὥστε διὰ μὲν τὴν ΗΕ τομὴν οὐ συμπεσεῖται ἡ ΘΕ τῇ ΑΓ, διὰ δὲ τὴν ΑΕ οὐ συμβάλλει τῇ Β· ὥστε οὐδὲ ἡ ΑΓ τῇ Β συμβάλλει, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

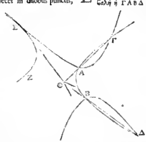
Prop. XLI. *Theor.*

Si hyperbola utramque oppoſitarum ſectionum in duobus punctis ſecet, convexa habens è regione utrique ſita; quæ ipſi opponitur ſectio nulli oppoſitarum occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα΄.

Ἐὰν ὑπερβολὴ ἑκατέραν τῶν ἀντικειμένων τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτὰ ἑκατέρᾳ· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.

SINT oppoſitæ ſectiones Α, Β; & hyperbola ΓΑΒΔ utramque ſecet in duobus punctis, convexa habens è regione utriſque ſita: dico ſectionem ΕΖ huic oppoſitam nulli ipſarum Α, Β occurrere.



Si enim fieri poteſt, occurrat ſectioni Α in puncto Ε; & junctæ ΓΑ, ΔΒ producantur. convenient igitur hæ inter ſeſe. conveniant autem in Θ: erit igitur [per 25. 2. huj.] Θ intra angulum contentum ſub aſymptotis ſectionis ΓΑΒΔ cui opponitur ſectio ΒΖ: ergo quæ à puncto Ε ad Θ ducitur, cadet intra angulum contentum ſub ipſis ΑΘ, ΘΒ. rurſus quoniam ΓΑΕ, ΔΒ oppoſitæ ſectiones ſunt, recta ΔΒΘ producta [per 33. 2. huj.] non conveniet ſectioni ΓΑΕ: quare ſi jungatur ΕΘ, cadet ea extra angulum ΑΘΒ, quod quidem abſurdum; cadebat enim ea ipſa ΕΘ intra angulum ΑΘΒ: quocirca ſectio ΕΖ neutri ſectionum Α, Β conveniet.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΓΑΒΔ ἑκατέραν τῶν Α, Β τεμνέτω κατὰ δύο σημεῖα, ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτά· λέγω ὅτι ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ ΕΖ οὐδεμιᾷ τῶν Α, Β συμπεσεῖται.

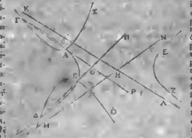
Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμπιπτέτω τῇ ΑΓ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΑ, ΔΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Θ· ἔσται δὴ τὸ Θ ἐν τῇ περιεχομένῃ γωνίᾳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΓΑΒΔ τομῆς, καὶ ἔστιν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ ΕΖ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη [ἐὰν ἐκβληθῇ] ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ τῶν ΑΘΒ περιεχομένης γωνίας. πάλιν ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΓΑΕ, ΔΒ, ἡ ΔΒΘ ἐκβληθεῖσα οὐ συμπεσεῖται τῇ ΓΑΒ τομῇ· ἡ ἄρα ΕΘ ἐπιζευχθεῖσα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ ΑΘΒ γωνίας, ὅπερ ἄτοπον· ἔπιπτε γὰρ αὐτὴ ἡ ΕΘ ἐντὸς τῆς ὑπὸ ΑΘΒ· οὐκ ἄρα ἡ ΕΖ μηδετέρᾳ τῶν Α, Β συμπεσεῖται.

* Scil. fieri non poteſt ut recta ΔΕΘ, tranſiens per tres locos [ad 33. 2. huj.] definitos, ſecet ΑΓΒ vel Β. Sed & fieri non poteſt ut ΑΓΒ ſecet Β, & tamen ΔΕΘ harum neutri occurrat.

EUTOCIUS.

Ἄλλως.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΓΑΒΔ ἑκατέραν αὐτῶν τεμνέτω κατὰ τὰ Γ, Α, Β, Δ, καὶ ἔστω ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΒ, ΓΑ ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Θ· ἔστιν ἄρα τὸ Θ μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΓΑΒΔ τομῆς. ἔστωσαν αἱ τῆς ΓΑΒΔ ἀσύμπτωτοι αἱ ΚΗΛ, ΜΗΝ· φανερὸν δὴ ὅτι αἱ ΝΗ, ΗΛ τὴν ΖΕ τομὴν περιέχουσι. ἡ δὲ ΓΑΘ τέμνει τὴν ΓΑΞ κατὰ δύο τὰ Γ, Α· ἐκβληθεῖσα ἄρα ἐφ' ἑκάτερα οὐ συμπεσεῖται τῇ ΔΒΟ ἀντικειμένῃ, ἀλλ' ἔσται μεταξὺ τῆς ΒΟ καὶ τῆς ΗΛ εὐθείας. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ΔΒΘ ἐκβληθεῖσα τῇ ΓΑΞ τομῇ οὐ συμπεσεῖται, ἀλλ' ἔσται μεταξὺ τῆς ΑΞ, ΗΝ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΠΘ, ΘΡ, μὴ συμβάλλουσαι ταῖς Α, Β τομαῖς, περιέχουσι τὰς ΝΗ, ΗΛ ἀσυμπτώτους, καὶ πολλῷ μᾶλλον τὴν ΕΖ τομήν· ἡ ΕΖ ἄρα οὐδετέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.



Aliter.

Sint oppoſitæ ſectiones Α, Β, & hyperbolá ΓΑΒΔ utramque ipſarum in punctis Γ, Α, Β, Δ ſecet, & ſit ſectió ipſi oppoſita ΕΖ: dico ΕΖ nulli oppoſitarum ſectionum occurrere. junctæ enim ΔΒ, ΓΑ producantur, & conveniant inter ſe in puncto Θ: erit igitur [per 25. 2. huj.] Θ inter aſymptotos ſectionis ΓΑΒΔ. ſint ſectionis ΓΑΒΔ aſymptoti ΚΗΛ, ΜΗΝ: perſpicuum eſt igitur rectas ΝΗ, ΗΛ ſectionem ΖΕ continere. ΓΑΘ autem ſectionem ΓΑΞ in duobus punctis Γ, Α ſecat: ergo [per 33. 2. huj.] producta ex utraque parte non occurret oppoſitæ ſectioni ΔΒΟ, ſed erit inter ΒΟ & rectam ΗΛ. ſimiliter & ΔΒΘ producta ſectioni ΓΑΞ non occurret, ſed erit inter ΑΞ & ΗΝ. quoniam igitur ΠΘ, ΘΡ, non occurrentes ſectionibus Α, Β, continent aſymptotos ΝΗ, ΗΛ, & multo magis ſectionem ΕΖ; ſequitur ΕΖ nulli oppoſitarum ſectionum occurrere.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ΄.

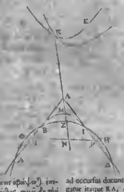
Ἐὰν ὑπερβολὴ μίαν τῶν ἀντικειμένων κατὰ τέσσαρα τέμνῃ σημεῖα· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

Prop. XLII. *Theor.*

Si hyperbola unam oppoſitarum ſectionum in quatuor punctis ſecet; quæ ipſi opponitur ſectio non occurret alteri oppoſitarum.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓΔ, Ε, καὶ τεμνέτω ὑπερβολὴ τὴν ΑΒΓΔ κατὰ τέσσαρα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἔστω αὐτῇ ἀντικειμένη ἡ Κ· λέγω ὅτι ἡ Κ οὐ συμπεσεῖται τῇ Ε.

Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ὃν μὲν ἔχει λόγον ἡ ΛΑ πρὸς ΑΒ ἐχέτω ἡ ΛΠ πρὸς ΠΒ, ὃν δὲ ἡ ΔΛ πρὸς ΛΓ ἡ ΔΡ πρὸς ΡΓ· ἡ ἄρα διὰ τῶν Π, Ρ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν, καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὰς συμπτώσεις ἐφάψονται. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ τὴν



SInt oppoſitæ ſectiones ΑΒΓΔ, Ε; & hyperbola ipſam ΑΒΓΔ ſecet in quatuor punctis Α, Β, Γ, Δ; ſitque ei oppoſita ſectio Κ: dico Κ ſectioni Ε non occurrere.

Si enim fieri poteſt, occurrat in Κ: & junctæ ΑΒ, ΔΓ producantur: convenient igitur [per 25. 2. huj.] inter ſe. conveniant in Λ; & quam rationem habet ΛΑ ad ΑΒ habeat ΛΠ ad ΠΒ; quam vero habet ΔΛ ad ΛΓ habeat ΔΡ ad ΡΓ: ergo [per 9. 4. huj.] recta, quæ per Π, Ρ producitur, utrique ſectioni occurret; & quæ ab Λ ad occurſus ducuntur ſectionem contingent. jungatur itaque ΚΛ, & producatur. ſecabit igitur angulum

angulum B A Γ & ſectiones in alio atque alio puncto. ſecet eas in Z M: ergo [per 39. 3. huj. & 16. 5.] propter oppoſitas ſectiones A Θ Z H, K, erit ut N K ad K A ita N Z ad Z A; & propter ſectiones A B Γ Δ, E ut N K ad K A ita erit N M ad M A, quod fieri non poteſt: igitur ſectiones E, K ſibi ipſis non occurrunt.

ὑπὸ B A Γ γωνίαν, καὶ τὰς τομὰς κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον, τεμνέτω κατὰ τὰ Z, M· ἔςαι δὴ διὰ μὲν τὰς A Θ Z H, K ἀντικειμένας, ὡς ἡ N K πρὸς K A οὕτως ἡ N Z πρὸς Z A, διὰ δὲ τὰς A B Γ Δ, E, ὡς ἡ N K πρὸς K A οὕτως ἡ N M πρὸς M A, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ E, K συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

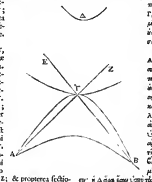
Prop. XLIII. *Theor.*

Si hyperbola alteri oppoſitarum ſectionum in duobus punctis occurrat, concava habens ad eaſdem partes; alteri vero occurrat in uno puncto: quæ ipſi opponitur ſectio nulli oppoſitarum occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ τῇ μὲν ἀντικειμένων συμπίπτῃ κατὰ δύο σημεῖα, ἐπὶ τὰ αὐτὰ ἔχουσα αὐτῇ τὰ κοῖλα, τῇ δὲ καθ' ἓν σημεῖον· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐδετέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται.

SINT oppoſitæ ſectiones A B, Γ; & hyperbola A Γ B ſectioni quidem A B in punctis A, B occurrat, ſectioni vero Γ occurrat in uno puncto Γ; ſitque ipſi A Γ B oppoſita ſectio Δ: dico Δ nulli ſectionum A B, Γ occurrere.



Jungantur enim A Γ, B Γ, & producantur: rectæ igitur A Γ, B Γ [per 33. 2. huj.] ſectioni Δ non occurrent; ſed neque occurrent ſectioni Γ præterquam in uno puncto Γ. ſi enim in alio puncto; oppoſitæ ſectioni A B [per 33. 2. huj.] non occurrent. poſitum autem eſt A Γ, B Γ occurrere ſectioni A B: quare ſequitur, A Γ, B Γ ſectioni Γ in ſolo puncto Γ occurrere; ſectioni vero Δ nullo modo: ergo Δ erit intra angulum B Γ Z; & propterea ſectionibus oppoſitis A B, Γ minime occurret.

ἜΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ A B, Γ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ A Γ B τῇ μὲν A B συμπιπτέτω κατὰ τὰ A, B, τῇ δὲ Γ καθ' ἓν τὸ Γ, καὶ ἔςω τῇ A Γ B ἀντικειμένη ἡ Δ· λέγω ὅτι ἡ Δ οὐδετέρᾳ τῶν A B, Γ συμπεσεῖται.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ A Γ, B Γ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· αἱ ἄρα A Γ, B Γ τῇ Δ τομῇ οὐ συμπεσοῦνται· ἀλλ' οὐδὲ τῇ Γ τομῇ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ συμπεσοῦνται πλὴν κατὰ τὸ Γ. εἰ γὰρ συμβάλλωσι καὶ καθ' ἕτερον, τῇ A B ἀντικειμένῃ οὐ συμπεσοῦνται. ὑπόκειται δὲ συμπίπτουσαι αἱ A Γ, B Γ ἄρα εὐθεῖαι τῇ μὲν Γ τομῇ καθ' ἓν συμβάλλουσι τὸ Γ, τῇ δὲ Δ τομῇ οὐδὲν ὅλως συμβάλλουσιν· ἡ Δ ἄρα ἔςαι ὑπὸ τὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ E Γ Z· ὥςε ἡ Δ τομὴ οὐ συμπεσεῖται τῶν A B, Γ ἀντικειμένων.

Prop. XLIV. *Theor.*

Si hyperbola uni oppoſitarum ſectionum occurrat in tribus punctis; quæ ipſi opponitur, alteri oppoſitarum, præterquam in uno puncto, non occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾷ τῶν ἀντικειμένων κατὰ τρία σημεῖα συμβάλλῃ· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται πλὴν καθ' ἕν.

SINT oppoſitæ ſectiones A Λ B Γ, Δ E Z; & hyperbola A M B Γ occurrat ſectioni A Λ B Γ in tribus punctis A, B, Γ; ſit autem ſectioni A M B Γ oppoſita ſectio Δ E K: dico ſectionem Δ E K non occurrere ſectioni Δ E Z præterquam in uno puncto.

Si enim fieri poteſt, in punctis Δ, E occurrat: & jungantur A B, Δ E; quæ vel parallelæ erunt inter ſe, vel non.

Sint primum parallelæ; ſecenturque A B, Δ E bifariam in punctis H, Θ, & jungatur H Θ: eſt igitur [per 36. 2. huj.] H Θ diameter omnium ſe-

ἜΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ A Λ B Γ, Δ E Z, καὶ ὑπερβολὴ ἡ A M B Γ συμβαλλέτω τῇ A Λ B Γ κατὰ τρία σημεῖα τὰ A, B, Γ, ἔςω δὲ τῇ A M B Γ ἀντικειμένη ἡ Δ E K· λέγω ὅτι ἡ Δ E K τῇ Δ E Z οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα ἢ ἕν.

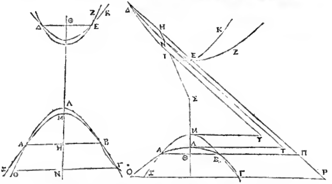
Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμβαλλέτω κατὰ τὰ Δ, E· καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ A B, Δ E ἤτοι παράλληλοί εἰσιν, ἢ οὔ.

Ἔςωσαν πρότερον παράλληλοι, καὶ τετμήσθωσαν αἱ A B, Δ E δίχα κατὰ τὰ H, Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ H Θ· διάμετρος ἄρα ἐςὶ πασῶν τῶν τομῶν,

καὶ

καὶ τεταγμένως ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ A B, Δ E. ἤχθω δὲ ἀπὸ τοῦ Γ παρὰ τὴν A B ἡ Γ N O Ξ· ἔσται δὴ καὶ αὐτὴ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον κατηγμένη, καὶ συμπεσεῖται ταῖς τομαῖς κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο. εἰ γὰρ κατὰ τὸ αὐτό, οὐκέτι κατὰ τρία συμβάλλουσι, ἀλλὰ τέσσαρα· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ A M B τομῇ ἴση ἡ Γ N τῇ N Ξ, ἐν δὲ τῇ A Λ B ἡ Γ N τῇ N O· καὶ ἡ O N ἄρα τῇ N Ξ ἐστὶν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

ctionum, atque ad eam applicantur ordinatim A B, Δ E. ducatur à puncto Γ recta Γ N O Ξ parallela A B: erit igitur & ipſa ad diametrum ordinatim applicata; & ſectionibus in alio atque alio puncto occurret. ſi enim in eodem puncto, non occurrerent ſectiones ſibi ipſis in tribus punctis, ſed in quatuor. ergo in ſectione A M B erit Γ N ipſi N Ξ æqualis, & in A Λ B ſectione Γ N æqualis ipſi N O; quare O N eſt æqualis ipſi N Ξ, quod fieri non poteſt.



Μὴ ἔστωσαν δὲ παράλληλοι αἱ A B, Δ E, ἀλλ' ἐκβαλλόμεναι συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Π, καὶ ἡ Γ O ἤχθω παρὰ τὴν A Π, καὶ συμπιπτέτω τῇ Δ Π ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ P, καὶ τετμήσθωσαν αἱ A B, Δ E δίχα κατὰ τὰ H, Θ, καὶ διὰ τῶν H, Θ διάμετροι ἤχθωσαν αἱ H N, Σ I, Θ Λ, M Σ, ἀπὸ δὲ τῶν N, I, Λ, M ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ Y I, N T, M T, Λ T· ἔσονται δὴ αἱ μὲν Y I, N T παρὰ τὴν Δ Π, αἱ δὲ Λ T, M T παρὰ τὰς A Π, O P. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ M T πρὸς τὸ ἀπὸ T I οὕτως τὸ ὑπὸ A Π B πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Π E, καὶ ὡς τὸ ἀπὸ Λ T πρὸς τὸ ἀπὸ T N οὕτως τὸ ὑπὸ A Π B πρὸς τὸ ὑπὸ Δ Π E· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ M T πρὸς τὸ ἀπὸ T I οὕτως τὸ ἀπὸ Λ T πρὸς τὸ ἀπὸ T N. διὰ τὰ αὐτὰ ἔσται, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ M T πρὸς τὸ ἀπὸ T I οὕτως τὸ ὑπὸ Ξ P Γ πρὸς τὸ ὑπὸ Δ P E, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ Λ T πρὸς τὸ ἀπὸ T N οὕτως τὸ ὑπὸ O P Γ πρὸς τὸ ὑπὸ Δ P E· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ O P Γ τῷ ὑπὸ Ξ P Γ, ὅπερ ἀδύνατον.

Sed non ſint parallelæ A B, Δ E; producanturque & conveniant in Π, & ducatur Γ O ipſi A Π parallela, quæ cum Δ Π producta conveniat in P. ſecentur autem A B, Δ E bifariam in H, Θ; & per H, Θ ducantur diametri H N, Σ I; Θ Λ, M Σ; & in punctis N, I, Λ, M rectæ T I, N T, M T, Λ T ſectiones contingant: erunt igitur [per 5. 2. huj.] T I, N T parallelæ ipſi Δ Π; & Λ T, M T ipſis A Π, O P parallelæ. & quoniam ut quadratum ex M T ad quadratum ex T I ita [per 19. 3. huj.] rectangulum A Π B ad rectangulum Δ Π E, ac (per eandem) ut quadratum ex Λ T ad quadratum ex T N ita rectangulum A Π B ad rectangulum Δ Π E: ut igitur quadratum ex M T ad quadratum ex T I ita quadratum ex Λ T ad quadratum ex T N. eadem ratione ut quadratum ex M T ad quadratum ex T I ita erit rectangulum Ξ P Γ ad rectangulum Δ P E, & ut quadratum ex Λ T ad quadratum ex T N ita O P Γ rectangulum ad rectangulum Δ P E: ergo rectangulum O P Γ rectangulo Ξ P Γ eſt æquale, quod impoſſibile eſt *.

* *Hanc propoſitionem fœde depravatam integritati ſuæ reſtituimus.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ τῆς μὲν ἐφάπτηται τῶν ἀντικειμένων, τὴν δὲ κατὰ δύο σημεῖα τέμνῃ· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῶν ἀντικειμένων οὐδεμιᾷ συμπεσεῖται.

Ἐστωσαν ἀντικείμεναι αἱ A B Γ, Δ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ A B Δ τὴν μὲν A B Γ τεμνέτω κα-

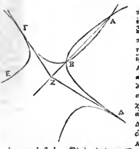
PROP. XLV. *Theor.*

Si hyperbola unam oppoſitarum ſectionum contingat, alteram vero ſecet in duobus punctis; quæ ipſi opponitur ſectio nulli oppoſitarum occurret.

Sint oppoſitæ ſectiones A B Γ, Δ; & hyperbola A B Δ ſectionem quidem A B Γ in punctis

ctis Α, Β ſecet, ſectionem vero Δ contingat in Δ; & ſit hyperbolæ ΑΒΔ oppoſita ſectio ΓΕ: dico ΓΕ nulli ipſarum ΑΒΓ, Δ occurrere.

Si enim fieri poteſt, occurrat ipſi ΑΒΓ in Γ puncto, jungaturque ΑΒ; & per Δ ducatur contingens, quæ cum recta ΑΒ conveniat in Ζ: punctum igitur Ζ [per 25 & 3.2.huj.] erit intra aſymptotos ſectionis ΑΒΔ. eſt autem ipſi oppoſita ſectio ΓΕ: ergo quæ à puncto Γ ad Ζ ducitur cadet intra angulum ipſis ΒΖ, ΖΔ contentum. rurſus quoniam oppoſitæ ſectiones ſunt ΑΒΓ, Δ, contingens ΔΖ, ſi producatur, non occurret [per 33. 2.huj.] ſectioni ΑΒΓ: quæ igitur à puncto Γ ad Ζ ducitur extra angulum ΒΖΔ cadet, quod eſt abſurdum; cadebat enim ipſa ΓΖ intra eundem angulum ΒΖΔ· quare ΓΕ nulli oppoſitarum ſectionum ΑΒΓ, Δ occurret.



τὰ τὰ Α, Β, τῆς δὲ Δ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἔστω τῆς ΑΒΔ τομῆς ἀντικειμένη ἡ ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ ΓΕ οὐδεμιᾷ τῶν ΑΒΓ, Δ συμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω τῇ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ διὰ τοῦ Δ ἐφαπτομένη ἤχθω συμπίπτουσα τῇ ΑΒ κατὰ τὸ Ζ· τὸ Ζ ἄρα σημεῖον ἐντὸς ἔσται τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΑΒΔ τομῆς. καὶ ἔστιν αὐτῆς ἀντικειμένη ἡ ΓΕ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἐντὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ τῶν ΒΖΔ περιεχομένης γωνίας. πάλιν ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΑΒΓ, Δ, ἐφαπτομένη, ἡ ΔΖ, ἐὰν ἐκβληθῇ, οὐ συμπεσεῖται τῇ ΑΒΓ τομῇ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ὑπὸ ΒΖΔ γωνίας, ὅπερ ἄτοπον· ἐπέπεσε γὰρ καὶ ἐντὸς τῆς αὐτῆς· οὐκ ἄρα ἡ ΓΕ μιᾷ τῶν ΑΒΓ, Δ συμπεσεῖται.

Prop. XLVI. *Theor.*

Si hyperbola unam oppoſitarum ſectionum in uno puncto contingat, eandemque ſecet in duobus punctis; quæ ipſi opponitur ſectio alteri oppoſitarum non occurret.

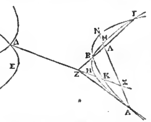
SInt oppoſitæ ſectiones ΑΒΓ, Δ, & hyperbola ΑΗΓ ſectionem ΑΒΓ contingat quidem in puncto Α, ſecet vero in Β, Γ; & ipſi ΑΗΓ oppoſita ſit ſectio Ε: dico B ſectioni Δ non occurrere.

Si enim fieri poteſt, occurrat in Δ; junctaque ΒΓ producatur ad Ζ; & à puncto Α ducatur recta ΑΖ contingens. ſimiliter demonſtrabitur punctum Ζ eſſe intra angulum ſub aſymptotis contentum; & rectam ΑΖ utraſq; ſectiones contingere; & ΔΖ productam ſecare ſectiones inter Α, Β, videlicet in punctis Η, Κ: & quam rationem habet ΓΖ ad ΖΒ habeat ΓΛ ad ΛΒ, & juncta ΛΑ producatur; ſectiones igitur in alio atque alio puncto ſecabit. ſecet in Μ, Ν: ergo [per 1. 4. huj.] quæ per Ζ ad puncta Μ, Ν ducuntur ſectiones contingent. & ſimiliter iis quæ ſuperius dicta ſunt, propter alteram quidem ſectionem [per 39. 3. huj.] erit ut ΞΔ ad ΔΖ ita ΞΚ ad ΚΖ; propter alteram vero ut ΞΔ ad ΔΖ ita

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛʹ.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν μὲν ἐφάπτηται, κατὰ δύο δὲ συμπίπτῃ· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ οὐ συμπεσεῖται ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, Δ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ ΑΗΓ ἐφαπτέσθω μὲν κατὰ τὸ Α, τεμνέτω δὲ κατὰ τὰ Β, Γ, καὶ τῆς ΑΗΓ ἀντικειμένη ἔστω ἡ Ε· λέγω ὅτι ἡ Ε τῇ Δ οὐ συμπεσεῖται.



Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΖ ἐφαπτομένη. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι τὸ Ζ σημεῖον ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων περιεχομένης γωνίας ἐστί, καὶ ἡ ΑΖ ἐφάψεται τῶν τομῶν ἀμφοτέρων, καὶ ἡ ΔΖ ἐκβαλλομένη τεμεῖ τὰς τομὰς μεταξὺ τῶν Α, Β κατὰ τὰ Η, Κ· καὶ ὃν δὲ ἔχει λόγον ἡ ΓΖ πρὸς ΖΒ ἐχέτω ἡ ΓΛ πρὸς ΛΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΛ ἐκβεβλήσθω· τεμεῖ δὴ τὰς τομὰς κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο. τεμνέτω κατὰ τὰ Μ, Ν· αἱ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰ Μ, Ν ἐφάψονται τῶν τομῶν. καὶ ἔσται ὁμοίως τοῖς πρότερον, διὰ μὲν τὴν ἑτέραν τομήν, ὡς ἡ ΞΔ πρὸς ΔΖ οὕτως ἡ ΞΚ πρὸς ΚΖ, διὰ δὲ τὴν ἑτέραν, ὡς ἡ ΞΔ πρὸς ΔΖ οὕτως ἡ

ΞΗ

ΞΗ πρὸς ΗΖ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀντικειμένη συμπεσεῖται τῇ ἀντικειμένῃ.

ΞΗ ad ΗΖ, quod fieri non poteſt*: oppoſita igitur ſectio alteri oppoſitarum non occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζʹ.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφαπτομένη καθ' ἕτερον αὐτῇ σημεῖον συμπίπτῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΕΖΗ, καὶ ὑπερβολή τις ἡ ΔΑΓ ἐφαπτέσθω μὲν κατὰ τὸ Α, τεμνέτω δὲ κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω τῇ ΔΑΓ ἀντικειμένη ἡ ΕΖΘ· λέγω ὅτι οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ ἀντικειμένῃ κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

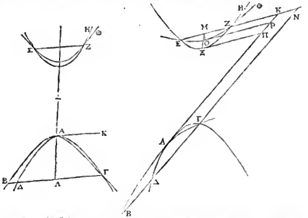
Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμβαλλέτω κατὰ δύο, τὰ Ε, Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ, καὶ διὰ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῶν τομῶν ἤχθω ἡ ΑΚ· ἤτοι δὴ παράλληλοί εἰσιν, ἢ οὔ. ἔστωσαν πρότερον παράλληλοι, καὶ ἤχθω ἡ διχοτομοῦσα διάμετρος τὴν ΕΖ. ἥξει ἄρα διὰ τοῦ Α, καὶ ἔσται διάμετρος τῶν δύο συζυγῶν. ἤχθω διὰ τοῦ Γ παρὰ τὰς ΑΚ, ΕΖ ἡ ΓΛΔΒ· τεμεῖ ἄρα τὰς τομὰς κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ ἴση ἡ ΓΛ τῇ ΛΔ, ἐν δὲ τῇ λοιπῇ ἡ ΓΛ τῇ ΛΒ. τοῦτο δὲ ἀδύνατον.

Prop. XLVII. *Theor.*

Si hyperbola unam oppoſitarum ſectionum contingens in alio puncto ſecet; quæ ipſi opponitur ſectio alteri oppoſitarum non occurret præterquam in uno puncto.

SINT oppoſitæ ſectiones ΑΒΓ, ΕΖΗ; & hyperbola quædam ΔΑΓ contingat ΑΒΓ in Α, & in Γ ſecet; opponaturque ipſi ΔΑΓ ſectio ΕΖΘ: dico eam alteri oppoſitarum non occurrere præterquam in uno puncto.

Si enim fieri poteſt, occurrat in duobus punctis Ε, Ζ: jungaturque ΕΖ, & per Α ducatur ſectiones contingens ΑΚ: vel igitur ΑΚ, ΕΖ parallelæ ſunt inter ſe, vel non. ſint primum parallelæ, & ducatur diameter biſariam ſecans ipſam ΕΖ: quæ [per 34. 2. huj.] per Α igitur tranſibit; atque erit diameter duarum conjunctarum. ducatur etiam per Γ recta ΓΛΔΒ parallela ipſis ΑΚ, ΕΖ: ſecabit igitur ea ſectiones in alio atque alio puncto: & in altera quidem erit ΓΛ æqualis ipſi ΛΔ, in altera vero ΓΛ æqualis ipſi ΛΒ. hoc vero fieri non poteſt.



Μὴ ἔστωσαν δὲ παράλληλοι αἱ ΑΚ, ΕΖ, ἀλλὰ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ ἡ ΓΔ παρὰ τὴν ΑΚ ἠγμένη συμπιπτέτω τῇ ΕΖ κατὰ τὸ Ν, αἱ δὲ διάμετροι διχοτομοῦσαι τὴν ΕΖ κατὰ τὸ Μ τεμνέτωσαν τὰς τομὰς κατὰ τὰ Ξ, Ο, καὶ ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν τῶν τομῶν ἀπὸ τῶν Ξ, Ο αἱ ΞΠ, ΟΡ· ἔσται ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ ΑΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΞ οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΡ πρὸς τὸ ἀπὸ ΡΟ, καὶ διὰ τοῦτο ὡς τὸ ὑπὸ ΔΝΓ

At non ſint parallelæ ΑΚ, ΕΖ, ſed conveniant in Κ; recta vero ΓΔ ipſi ΑΚ parallela ducta conveniat cum ΕΖ in Ν; & diametri biſariam dividentes ΕΖ in puncto Μ ſectiones in punctis Ξ, Ο ſecent; atque à Ξ, Ο ducantur ΞΠ, ΟΡ ſectiones contingentes: erit igitur [ut in 44. 4. huj.] quadratum ex ΑΠ ad quadratum ex ΠΞ ſicut quadratum ex ΑΡ ad quadratum ex ΡΟ; & propterea [per 19. 3. huj.] ut rectangulum

* Eſt enim, [per 11. 5.] ΞΗ ad ΗΖ ut ΞΚ ad ΚΖ. & ideo, [per 14. 5.] quando ΞΗ major eſt quam ΞΚ, erit ΗΖ major quam ΚΖ. quod fieri non poteſt.

ΔΝΓ

ΔNΓ ad rectangulum BNZ ita rectangulum BNΓ ad rectangulum ENZ: ergo [per 9. 5.] rectangulum ΔNΓ rectangulo BNΓ eſt æquale, quod fieri non poteſt.

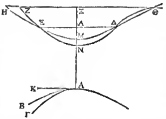
πρὸς τὸ ὑπὸ ENZ οὕτως τὸ ὑπὸ BNΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ENZ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΔNΓ τῷ ὑπὸ BNΓ, ὅπερ ἀδύνατον.

Prop. XLVIII. *Theor.*

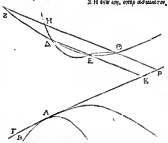
Si hyperbola unam oppoſitarum ſectionum in uno puncto contingat; quæ ipſi opponitur ſectio alteri oppoſitarum non occurret ad plura puncta quam duo.

Sint oppoſitæ ſectiones AB, EΔH; & hyperbola AΓ ſectionem AB in puncto A contingat; ſitque ipſi AΓ oppoſita ſectio ΔEZ: dico ΔEZ non occurrere ſectioni ΔEH ad plura puncta quam duo.

Si enim fieri poteſt, occurrat ad puncta tria Δ, E, Θ; & ducatur recta AK ſectiones AB, AΓ contingens: juncta vero ΔE producatur. & ſint primum AK, ΔE inter ſe parallelæ; ſeceturque ΔE bifariam in Λ, & jungatur AΛ: erit igitur [per 34. 2. huj.] AΛ diameter duarum conjugatarum, quæ ſectiones inter puncta Δ, E ſecabit in M, N; propter ΔΛE in puncto Λ bifariam ſectam. ducatur per Θ recta ΘΞZH parallela ΔE: erit igitur in altera ſectione ΘΞ æqualis ipſi ΞZ, in altera vero ΘΞ ipſi ΞH æqualis; quare ΞZ ipſi ΞH eſt æqualis, quod fieri non poteſt.



Sed non ſint AK, ΔE parallelæ, conveniantque in K, & reliqua eadem fiant: producta vero AK occurrat ipſi ZΘ in P. ſimiliter ac in iis quæ jam dicta ſunt, demonſtrabimus, ut rectangulum ΔKE ad quadratum ex AK ita eſſe rectangulum ZPΘ ad quadratum ex PA in ſectione ZΔB; &, in ſectione HΔE, ita rectangulum HPΘ ad quadratum ex PA: rectangulum igitur HPΘ æquale eſt rectangulo ZPΘ, quod fieri non poteſt: ergo BΔZ ipſi EΔH ad plura puncta quam duo non occurret.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μη'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν σημεῖον ἐπιψαύῃ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ AB, EΔH, καὶ ὑπερβολὴ ἡ AΓ τῆς AB ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ A, καὶ ἔστω τῆς AΓ ἀντικειμένη ἡ ΔEZ· λέγω ὅτι ἡ ΔEZ τῇ ΔEH οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμβαλλέτω κατὰ τρία τὰ Δ, E, Θ, καὶ ἤχθω τῶν AB, AΓ ἐφαπτομένη ἡ AK, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔE ἐκβεβλήσθω· καὶ ἔστωσαν πρότερον παράλληλοι αἱ AK, ΔE, καὶ τετμήσθω ἡ ΔE δίχα κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AΛ· ἔσται δὴ διάμετρος ἡ AΛ τῶν δύο συζυγιῶν, καὶ τεμεῖ τὰς τομὰς μεταξὺ τῶν Δ, E, κατὰ τὰ M, N, ἐπεὶ ἡ ΔΛE δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΔE ἡ ΘΞZH· ἔσται δὴ ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἴση ἡ ΘΞ τῇ ΞZ, ἐν δὲ ἑτέρᾳ ἡ ΘΞ τῇ ΞH· ὥστε καὶ ἡ ΞZ τῇ ΞH ἐστὶν ἴση, ὅπερ ἀδύνατον.

Μὴ ἔστωσαν δὲ αἱ AK, ΔE παράλληλοι, ἀλλὰ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ K, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ γεγονέτω, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ AK συμπιπτέτω τῇ ZΘ κατὰ τὸ P. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΔKE πρὸς τὸ ἀπὸ AK, ἐν μὲν τῇ ZΔE τομῇ, οὕτως τὸ ὑπὸ ZPΘ πρὸς τὸ ἀπὸ PA, ἐν δὲ τῇ HΔE, οὕτως τὸ ἀπὸ HPΘ πρὸς τὸ ἀπὸ PA· τὸ ἄρα ὑπὸ HPΘ ἴσον τῷ ὑπὸ ZPΘ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ EΔZ τῇ EΔH κατὰ πλείονα σημεῖα συμβάλλει ἢ δύο.

ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων ἐφάπτηται· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῶν ἀντικειμένων οὐδεμιᾷ συμπεσεῖται.

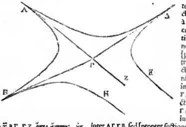
Ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΔ, ΒΗ, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒ ἑκατέρας αὐτῶν ἐφαπτέσθω κατὰ τὰ Α, Β. ἀντικειμένη δὲ αὐτῇ ἔστω ἡ Ε· [a] λέγω ὅτι ἡ Ε οὐδετέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΗ συμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμπιπτέτω τῇ ΑΔ κατὰ τὸ Δ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν· συμπεσοῦνται δὴ ἀλλήλαις ἐντὸς τῶν ἀσυμπτώτων τῆς ΑΒ τομῆς. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΔ ἐκβαλλομένη πεσεῖται ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ ἔσται τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀλλὰ καὶ μεταξὺ τῶν ΒΓ, ΓΖ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ Ε συμπεσεῖται τῶν ΑΔ, ΒΗ.

Prop. XLIX. *Theor.*

Si hyperbola contingat utramque oppoſitarum ſectionum; quæ ipſi opponitur ſectio, neutri oppoſitarum occurret.

Sint oppoſitæ ſectiones ΑΔ, ΒΗ, & hyperbola ΑΒ utramque ipſarum in punctis Α, Β contingat; opponaturque ei ſectio Ε: [a] dico quod Ε neutri ſectionum ΑΔ, ΒΗ occurret.



Si enim fieri poteſt, occurrat ſectioni ΑΔ in Δ; & à punctis Α, Β ducantur rectæ contingentes ſectiones, quæ quidem [per 36. 1. huj.] intra aſymptotos ſectionis ΑΒ convenient. conveniant in Γ, & jungatur ΓΔ: ergo [ob ſectionem ΔΕ] recta ΓΔ producta cadet in loco intermedio inter ΑΓ, ΓΒ. ſed [propter ſectionem ΑΔ] cadet eadem inter ΒΓ, ΓΖ, quod fieri non poteſt: igitur ſectio Ε ſectionibus oppoſitis ΑΔ, ΒΗ non occurret.

EUTOCIUS.

[a] Λέγω ὅτι ἡ Ε οὐδετέρᾳ τῶν ΑΔ, ΒΗ συμπεσεῖται.] Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Γ, ἐντὸς τῆς περιεχούσης γωνίας τὴν ΑΒ τομήν· φανερὸν δὴ ὅτι αἱ ΑΓ, ΓΒ ἐκβαλλόμεναι οὐ συμπεσοῦνται ταῖς ἀσυμπτώτοις τῆς Ε τομῆς, ἀλλὰ περιέχουσιν αὐτάς, καὶ πολὺ μᾶλλον τὴν Ε τομήν. καὶ ἐπεὶ τῆς ΑΔ τομῆς ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, ἡ ΑΓ ἄρα οὐ συμπεσεῖται τῇ ΒΗ. ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ οὐ συμπεσεῖται τῇ ΑΔ· ἡ ἄρα Ε τομὴ οὐδεμιᾷ τῶν ΑΔ, ΒΗ τομῶν συμπεσεῖται.

[a] Dico Ε neutri ſectionum ΑΔ, ΒΗ occurrere] Ducantur enim à punctis Α, Β rectæ contingentes ſectiones, atque conveniant inter ſe in puncto Γ, intra angulum [per 25. 2. huj.] ſectionem ΑΒ continentem: itaque conſtat rectas ΑΓ, ΓΒ productas aſymptotis ſectionis Ε non occurrere, ſed ipſas continere & multo magis ſectionem Ε. & quoniam ΑΓ ſectionem ΑΔ contingit, [per 33. 2. huj.] non occurret ipſi ΒΗ. ſimiliter oſtendemus rectam ΒΓ ſectioni ΑΔ non occurrere: ergo ſectio Ε neutri ipſarum ſectionum ΑΔ, ΒΗ occurret.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν'.

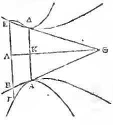
Ἐὰν ἑκατέρα τῶν ἀντικειμένων ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν ἐφάπτηται, ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχουσα· οὐ συμπεσεῖται καθ' ἕτερον σημεῖον.

Ἐφαπτέσθωσαν γὰρ ἀλλήλων ἀντικείμεναι κατὰ τὰ Α, Δ σημεῖα· λέγω ὅτι καθ' ἕτερον σημεῖον οὐ συμβάλλουσιν.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, συμβαλλέτωσαν κατὰ τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολὴ, μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐφαπτομένη κατὰ τὸ Δ, συμπέπτωκε ταύτῃ κατὰ τὸ Ε· ἡ ἄρα ΑΒ τῇ ΑΓ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν. ἤχθω-

Prop. L. *Theor.*

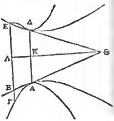
Si utraque oppoſitarum ſectionum oppoſitarum utramque in uno puncto contingat, ad eaſdem partes concava habens; in alio puncto non occurret.



Contingant enim ſeſe oppoſitæ ſectiones in punctis Α, Δ: dico eas in alio puncto ſibi ipſis non occurrere.

Si enim fieri poteſt, occurrant in Ε. & quoniam hyperbola unam oppoſitarum ſectionum in Δ contingens eandem ſecat in Ε; ſectio ΑΒ [per 47. 4. huj.] ipſi ΑΓ præterquam in uno puncto non occurret. ducantur

cantur à punctis Α, Δ rectæ ΑΘ, ΘΔ, quæ ſectiones contingant; junctâque ΑΔ, per Ε ducatur ΕΒΓ ipſi ΑΔ parallela; & per Θ ducatur oppoſitarum ſectionum ſecunda diameter ΘΚΛ, quæ [per 39. 2.huj.] ſecabit ΑΔ bifariam in Κ: ergo [ex natura 2dæ diam.] utraque ΕΒ, ΕΓ in puncto Λ bifariam ſecabitur; & propterea ΒΛ æqualis erit ipſi ΛΓ, quod fieri non poteſt: igitur in alio puncto ſibi ipſis non occurrent.



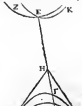
σιν ἀπὸ τῶν Α, Δ τῶν τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΘ, ΘΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΑΔ ἤχθω ἡ ΕΒΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ δευτέρα διάμετρος ἤχθω τῶν ἀντικειμένων ἡ ΘΚΛ· τεμεῖ δὴ τὴν ΑΔ δίχα κατὰ τὸ Κ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΕΒ, ΕΓ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ· ἴση ἄρα ἡ ΒΛ τῇ ΛΓ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα συμπεσοῦνται κατ' ἄλλο σημεῖον.

Prop. LI. *Theor.*

Si hyperbola unam oppoſitarum ſectionum contingat in duobus punctis; quæ ipſi opponitur ſectio, alteri oppoſitarum non occurret.

SINT oppoſitæ ſectiones ΑΔΒ, Ε; & hyperbola ΑΓ ſectionem ΑΔΒ in duobus punctis Α, Β contingat; opponaturque ipſi ΑΓ ſectio Ζ: dico Ζ ipſi Ε non occurrere.

Si enim fieri poteſt, occurrat in Ε; & à punctis Α, Β ducantur contingentes ſectiones ΑΗ, ΗΒ; junganturq; ΑΒ, ΕΗ & producatur ΕΗ: ſecabit igitur ſectiones in alio atque alio puncto. ſit autem ea ΕΗΓΔΘ. itaque quoniam ΑΗ, ΗΒ ſectiones contingunt, & ΑΒ conjungit tactus; erit [per 37. 3. huj.] in altera quidem conjugatione ut ΘΕ ad ΕΗ ita ΘΔ ad ΔΗ; in altera vero [ut ΘΕ ad ΕΗ] ita ΘΓ ad ΓΗ; quod fieri non poteſt: igitur ſectio Ζ ſectioni Ε non occurret.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων κατὰ δύο σημεῖα ἐφάπτηται· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται.

ἘΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΔΒ, Ε, καὶ ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ τῆς ΑΔΒ ἐφαπτέσθω κατὰ δύο σημεῖα τὰ Α, Β, καὶ ἔστω ἀντικειμένη τῇ ΑΓ ἡ Ζ· λέγω ὅτι ἡ Ζ τῇ Ε οὐ συμπεσεῖται.

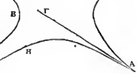
Εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ε, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Α, Β ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΕΗ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΗ· τεμεῖ δὴ κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον τὰς τομάς. ἔστω δὲ ὡς ἡ ΕΗΓΔΘ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ ΑΗ, ΗΒ καὶ ἡ ΑΒ τὰς ἁφὰς ἐπιζεύγνυσιν, ἔσται ἐν μὲν τῇ ἑτέρᾳ συζυγίᾳ ὡς ἡ ΘΕ πρὸς ΕΗ οὕτως ἡ ΘΔ πρὸς ΔΗ, ἐν δὲ τῇ ἑτέρᾳ οὕτως ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ; ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ Ζ τῇ Ε συμβάλλει.

Prop. LII. *Theor.*

Si hyperbola unam oppoſitarum ſectionum contingat, convexa habens è regione ſita; quæ ipſi opponitur ſectio alteri oppoſitarum non occurret.

SINT oppoſitæ ſectiones ΑΔ, Β; & hyperbola quædam ΑΗ ſectionem ΑΔ in puncto Α contingat; ipſi autem ΑΗ opponatur Ζ: dico Ζ ſectioni Β non occurrere.

Ducatur enim à puncto Α recta ΑΓ ſectiones contingens: ergo [per 33. 2. huj.] ΑΓ, ob ſectionem ΑΗ, ſe-



ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

Ἐὰν ὑπερβολὴ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ἐπιψαύῃ, ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα· ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀντικειμένων οὐ συμπεσεῖται.

ἘΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΔ, Β, καὶ τῆς ΑΔ τομῆς ἐφαπτέσθω ὑπερβολή τις ἡ ΑΗ κατὰ τὸ Α, ἀντικειμένη δὲ τῇ ΑΗ ἔστω ἡ Ζ· λέγω ὅτι ἡ Ζ τῇ Β οὐ συμπεσεῖται.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐφαπτομένη τῶν τομῶν ἡ ΑΓ· ἡ ἄρα ΑΓ, διὰ μὲν τὴν ΑΗ τομήν, οὐ συμπεσεῖ-

ται

Digitized by Google

τῇ τῇ Ζ, διὰ δὲ τὰ ΑΔ τομέα, ἐ συμπεσεῖται τῇ Β· ὥστε ἡ ΑΓ μεταξὺ πεσεῖται τ̃ Β, Ζ τομῶν· καὶ φανερὸν ὅτι ἡ Β τῇ Ζ ἐ συμπεσεῖται.

ſectioni Z non occurret; &, ob ΑΔ ſectionem, non occurret ſectioni B: quare ΑΓ inter B, Z ſectiones cadat neceſſe eſt: & idcirco ſectionem B ſectioni Z non occurrere manifeſto conſtat.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ΄.

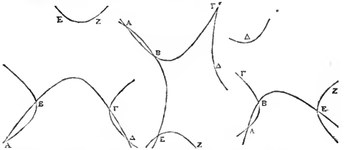
Αντικείμεναι ἀντικειμένας ἐ τέμνουσι κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

ΕΣΤΩΣΑΝ γὰρ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἕτεραι ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖ, καὶ τεμνέτω πρότερον ἡ ΑΒΓΔ τομὴ ἑκατέραν τ̃ ΑΒ, ΓΔ κατὰ τέσσαρα σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα, ὡς ἐπὶ τ̃ πρώτης καταγραφῆς· ἡ ἄρα τῇ ΑΒΓΔ τομῇ ἀντικειμένη ἡ ΕΖ ἐδεμιᾷ τ̃ ἀντικειμένων τ̃ ΑΒ, ΓΔ ἐ συμπεσεῖται.

Prop. LIII. *Theor.*

Oppoſitæ ſectiones oppoſitas non ſecant in pluribus punctis quam quatuor.

SINT oppoſitæ ſectiones ΑΒ, ΓΔ, & aliæ oppoſitæ ΑΒΓΔ, ΕΖ; & ſecet primo ΑΒΓΔ ſectio ipſas ΑΒ, ΓΔ in quatuor punctis Α, Β, Γ, Δ, convexa habens è regione ſita, ut in prima figura apparet: ergo [per 41. 4. huj.] quæ ſectioni ΑΒΓΔ opponitur, hoc eſt ſectio ΕΖ, neutri ipſarum ΑΒ, ΓΔ occurret.



Ἀλλὰ δὴ ἡ ΑΒΓ τὴν μὲν ΑΒΕ τεμνέτω κατὰ τὰ Α, Β, τὴν δὲ ΓΔ καθ᾽ ἓν τὸ Γ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς· ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΓΔ ἐ συμπεσεῖται. εἰ δὲ τῇ ΑΒ συμβάλλει ἡ ΕΖ, καθ᾽ ἓν μόνον συμβάλλει· εἰ γὰρ κατὰ δύο συμβάλλῃ τῇ ΑΒ, ἡ ἀντικειμένη αὐτῇ ἡ ΑΒΓ τῇ ἑτέρᾳ ἀντικειμένῃ τῇ ΓΔ ἐ συμπεσεῖται. ὑπόκειται δὲ καθ᾽ ἓν τὸ Γ συμβάλλουσα.

Sed ΑΒΓ ſectionem quidem ΑΒΕ ſecet in punctis Α, Β, ipſam vero ΓΔ in uno puncto Γ, ut in ſecunda figura: quare [per 39. 4. huj.] ΕΖ non occurret ſectioni ΓΔ. ſi autem ſectioni ΑΒ occurrit ΕΖ, in uno tantum puncto occurrit: nam ſi occurrat in duobus punctis, ſectio ΑΒΓ quæ [per 41. 1.4.huj.] ipſi opponitur, non occurret alteri ΓΔ. atqui in uno puncto Γ occurrere ſupponitur.

Εἰ δέ, ὡς ἔχει ἐπὶ τ̃ τρίτης καταγραφῆς, ἡ ΑΒΓ τὴν μὲν ΑΒΕ τέμνει κατὰ δύο τὰ Α, Β, τῇ δὲ ΑΒΕ συμβάλλει ἡ ΕΖ· τῇ μὲν Δ ἐ συμπεσεῖται, τῇ δὲ ΑΒΕ συμπίπτουσα ἐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο *.

Quod ſi ſectio ΑΒΓ ſectionem ΑΒΕ in duobus punctis Α, Β ſecet, ut in tertia figura; occurrat autem ΕΖ ſectioni ΑΒΕ: ſectioni quidem Δ [per 39.4.huj.] non occurret; atque ipſi ΑΒΕ occurrens [per 35.4.huj.] non occurret ad plura puncta quam duo *.

* In figura tertia ſupponitur paralleliſmus aſymptotôn ſectionum ΑΒΕ & ΕΖ, quo in caſu, eoque ſolo, oppoſitæ ſectiones oppoſitis ſectionibus ad tria tantum puncta Α, Β, Ε occurrere poſſunt: nam ſi non parallelæ ſint, ſed vel tantillum inclinent verſus partes Ε, Ζ, habebitur caſus primus, occurrente ſectione ΕΖ ſectioni ΑΒΕ in alio puncto ultra Ε. Si vero in alteras partes ſive verſus Γ, Δ inclinent aſymptoti, conveniet ſectio ΑΒΓ cum ſectione Δ, eritque caſus ſecundus. Neque alius modus quo ſibi conveniant ad quatuor puncta oppoſitæ hyperbolæ, convexa ſua ſibi invicem obvertentes, excogitari poteſt. Idem concipe de figuris propoſitionis proxime ſequentis.

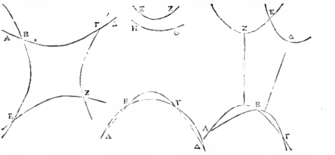
Si

Si vero ΑΒΓΔ utramque ſecet in uno puncto, ut in quarta figura; ſectio ΕΖ [per 40. 4. huj.] nulli ipſarum in duobus punctis occurret: ergo, propter ea quæ dicta ſunt & ipſorum converſa, ſectiones oppoſitæ ΑΒΓΔ, ΕΖ ſectionibus ΒΕ, ΓΖ non occurrent ad plura puncta quam quatuor.

Εἰ δὲ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τετάρτης καταγραφῆς, ἡ ΑΒΓΔ ἑκατέραν τέμνει καθ' ἓν σημεῖον, καὶ ἡ ΕΖ οὐδετέρᾳ συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα· ὥστε, διὰ τὰ εἰρημένα καὶ τὰ ἀντίστροφα αὐτῶν, αἱ ΑΒΓΔ, ΕΖ ἀντικείμεναι ταῖς ΒΕ, ΓΖ τομαῖς οὐ συμπεσοῦνται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

At ſi ſectiones ad eaſdem partes concava habeant, atque altera alteram in quatuor punctis ſecet, ut in quinta figura; ΕΖ neutri oppoſitarum occurret: neque enim ΕΖ occurret ipſi ΑΚ hyperbolæ; ſic enim hyperbola ΑΚ oppoſitis ſectionibus ΑΒΓΔ, ΕΖ occurret [contra 36. 4. huj.] ad plura puncta quam quatuor. ſed [per 42. 4. huj.] neque ΗΘ occurret ipſi ΕΖ.

Ἐὰν δὲ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχωσι, καὶ ἑτέρα τὴν ἑτέραν τέμνῃ κατὰ τέσσαρα τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ἐπὶ τῆς πέμπτης καταγραφῆς, ἡ ΕΖ ἑκατέρᾳ οὐ συμπεσεῖται· οὐδὲ μὲν ἡ ΕΖ οὐ συμπεσεῖται τῇ ΑΚ. οὕτως γὰρ ἔσται ἡ ΑΚ ταῖς ΑΒΓΔ, ΕΖ ἀντικειμέναις συμπίπτουσα κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα. ἀλλ' οὐδὲ ἡ ΗΘ τῇ ΕΖ συμπεσεῖται.



Si autem, ut in ſexta figura, ſectio ΑΒΓ oppoſitarum alteri occurrat in tribus punctis, ΕΖ [per 44. 4. huj.] alteri in uno tantum puncto occurret. & eodem modo in reliquis dicemus. Quoniam igitur in omni diverſitate caſuum conſtat propoſitum, oppoſitæ ſectiones oppoſitis ſectionibus ad plura puncta quam quatuor non occurrent.

Εἰ δὲ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς ἕκτης καταγραφῆς, ἡ ΑΒΓ τῇ ἑτέρᾳ τομῇ συμβάλλει κατὰ τρία σημεῖα, ἡ ΕΖ τῇ ἑτέρᾳ καθ' ἓν μόνον συμπεσεῖται. καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον ἐροῦμεν. ἐπεὶ οὖν κατὰ πάσας τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστι τὸ προτεθὲν, ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις οὐ συμβάλλουσι κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ τέσσαρα.

Prop. LIV. *Theor.*

Si oppoſitæ ſectiones oppoſitas in uno puncto contingant; non occurrent sibi ipſis ad alia puncta plura quam duo.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

Ἐὰν ἀντικείμεναι ἀντικειμέναις καθ' ἓν σημεῖον ἐπιψαύωσιν, οὐ συμπεσοῦνται κατ' ἄλλα σημεῖα πλείονα ἢ δύο.

SINT oppoſitæ ſectiones ΑΒ, ΓΔ; aliæ vero ΒΓ, ΕΖ; & ſectio ΒΓ contingat ΑΒ in puncto Β, & convexa habeant è regione ſita; occurratque primum ΒΓΔ ſectio ipſi ΓΔ in duobus punctis Γ, Δ, ut in prima figura. quoniam igitur ΒΓΔ in duobus punctis ſecat, convexa habens è regione ſita; ſectio ΕΖ [per 39. 4. huj.] ipſi ΑΒ non occurret. rurſus quoniam ΒΓΔ contingit ΑΒ in Β, convexa habens è regione ſita; non occurret [per 52. 4. huj.] ΕΖ ſectioni ΓΔ; quare ΕΖ neutri ſectionum ΑΒ, ΓΔ occurret: occurrunt igitur ſibi ipſis ad duo tantum puncta Γ, Δ.

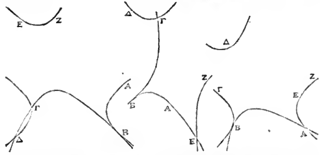
ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἕτεραι αἱ ΒΓ, ΕΖ, καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΑΒ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Β, καὶ ἐχέτωσαν ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ, καὶ συμπιπτέτω πρῶτον ἡ ΒΓΔ τῇ ΓΔ κατὰ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ, ὡς ἐπὶ τοῦ πρώτου σχήματος. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΓΔ κατὰ δύο σημεῖα τέμνει, ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτὰ, ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ οὐ συμπεσεῖται. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΒΓΔ τῆς ΑΒ ἐφάπτεται κατὰ τὸ Β, ἀντεστραμμένα ἔχουσα τὰ κυρτὰ, ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ οὐ συμπεσεῖται· ἡ ἄρα ΕΖ οὐδετέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ τομῶν συμπεσεῖται· μόνον ἄρα κατὰ δύο τὰ Γ, Δ συμβάλλουσι.

Ἄλλαι

Digitized by Google

Ἀλλὰ δὴ τὴν ΓΔ ἡ ΒΓ τεμνέτω καθ' ἓν σημεῖον τὸ Γ, ὡς ἐπὶ τοῦ δευτέρου σχήματος· ἡ ἄρα ΕΖ τῇ μὲν ΓΔ οὐ συμπεσεῖται, τῇ δὲ ΑΒ συμπεσεῖται καθ' ἓν μόνον. ἐὰν γὰρ κατὰ δύο συμβάλλῃ ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ, ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ οὐ συμπεσεῖται. ὑπόκειται δὲ συμβάλλειν καθ' ἕν.

Sed ΒΓ ſecet ΓΔ in uno puncto Γ, ut in ſecunda figura: ergo [per 52. 4. huj.] ΕΖ ſectioni quidem ΓΔ non occurret; ipſi vero ΑΒ occurret in uno puncto tantum. ſi enim in duobus punctis occurrat ΕΖ ipſi ΑΒ, [per 39. 4. huj.] non occurret ΒΓ ipſi ΓΔ. atqui in uno puncto occurrere ſupponebatur.

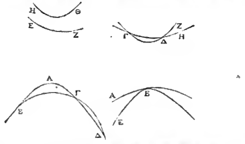


Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῇ Δ τομῇ μὴ συμπίπτῃ, ὡς ἐπὶ τοῦ τρίτου σχήματος, διὰ μὲν τὰ προειρημένα ἡ ΕΖ τῇ Δ οὐ συμπεσεῖται, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΑΒ οὐ συμπεσεῖται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο.

Quod ſi ΒΓ non occurrat ſectioni Δ, ut in tertia figura, propter ea, quæ [ad 52. 4.huj.] dicta ſunt, ΕΖ ipſi Δ non occurret: & [per 35. 4.huj.] non occurret ΕΖ ipſi ΑΒ ad plura puncta quam duo.

Ἐὰν δὲ αἱ τομαὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα ἔχωσιν, [ὡς ἐπὶ τοῦ τετάρτου καὶ πέμπτου σχήματος] αἱ αὐταὶ ἀποδείξεις ἁρμόσουσι. κατὰ πάσας οὖν τὰς ἐνδεχομένας διαστολὰς δῆλόν ἐστιν ἐκ τῶν δεδειγμένων τὸ προτεθέν.

At vero ſi ſectiones ad eaſdem partes concava habeant, [ut in figuris quartâ & quintâ] demonſtrationes eædem accommodabuntur. quare, juxta omnes poſſibiles diverſitates, ex jam demonſtratis manifeſto conſtabit propoſitum.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ νέ.

Ἐὰν ἀντικείμεναι ἀντικειμένων κατὰ δύο ἐπιψαύωσι, καθ' ἕτερον σημεῖον οὐ συμπεσοῦνται.

Prop. LV. *Theor.*

Si ſectiones oppoſitæ oppoſitas contingant in duobus punctis; in alio puncto ſibi ipſis non occurent.

ΕΣΤΩΣΑΝ ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἕτεραι αἱ ΑΓ, ΕΖ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν πρῶτον, ὡς

SINT oppoſitæ ſectiones ΑΒ, ΓΔ, & aliæ ΑΓ, ΕΖ; & primum in punctis Α, Γ ſeſe contin-

gant, ut in prima figura. quoniam enim ΑΓ utramque ΑΒ, ΓΔ contingit in punctis Α, Γ: ſectio igitur ΕΖ [per 49.4.huj.] neutri ipſarum ΑΒ, ΓΔ occurret.

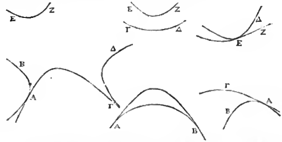
Contingant autem ſeſe, ut in ſecunda figura. pari modo demonſtrabitur [per 51. 4. huj.] ΓΔ ipſi ΕΖ non occurrere.

* [Sed contingant, ut in —— figura, ſectio quidem ΓΑ ſectionem ΑΒ in Α: ſectio vero Δ ipſam ΕΖ in Ζ. quoniam igitur ΑΓ contingit ΑΒ, convexa habens è regione ſita; ΕΖ ſectioni ΑΒ non occurret. rurſus quoniam ΖΔ contingit ΕΖ, non occurret ſectio ΓΑ ſectioni ΔΖ.]

ἐπὶ τοῦ πρώτου σχήματος, κατὰ τὰ Α, Γ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΓ ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐφάπτεται κατὰ τὰ Α, Γ σημεῖα· ἡ ΕΖ ἄρα οὐδετέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ συμπεσεῖται.

Ἐφαπτέσθωσαν δὲ, ὡς ἐπὶ τοῦ δευτέρου. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι ἡ ΓΔ τῇ ΕΖ οὐ συμπεσεῖται.

* [Ἐφαπτέσθωσαν δὲ, ὡς ἐπὶ τοῦ —— σχήματος. ἡ μὲν ΓΑ τῆς ΑΒ κατὰ τὸ Α, ἡ δὲ Δ τῆς ΕΖ κατὰ τὸ Ζ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ ἐφάπτεται, ἀντεστραμμένα τὰ κυρτὰ ἔχουσα, ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ οὐ συμπεσεῖται. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΖΔ τῆς ΕΖ ἐφάπτεται, ἡ ΓΑ τῇ ΔΖ οὐ συμπεσεῖται.]



Denique ſi ΑΓ contingat ΑΒ in Α, & ΕΖ contingat ΕΔ in Ε, habentes concava ad eaſdem partes, ut in tertia figura; in alio puncto ſibi ipſis [per 50.4.huj.] non occurrent: neque quidem ΕΖ occurret ipſi ΑΒ. juxta omnes igitur diverſitates, ex jam demonſtratis conſtabit illud quod proponebatur.

Εἰ δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῆς ΑΒ ἐφάπτηται κατὰ τὸ Α, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΕΔ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔχωσιν ἐπὶ τὰ αὐτὰ τὰ κοῖλα, ὡς ἐπὶ τοῦ τρίτου σχήματος· καθ' ἕτερον οὐ συμπεσοῦνται· οὐδὲ μὴν ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ συμπεσεῖται. κατὰ πάσας οὖν τὰς ἐνδεχομένας διαφορὰς δῆλόν ἐστιν ἐκ τῶν δεδειγμένων τὸ προτεθέν.

* Neſcio cujus interpolatoris vitio factum eſt, ut in omnibus Codicibus tam *Græcis* & *Latinis* quam *Arabicis*, reperiatur caſus ille tertius, quem uncis incluſum ut ſpurium & *Apollonio* noſtro indignum abolendum cenſemus, nec ſchemate dignamur. Propoſitione enim LII[da] hujus liquido patet, impoſſibile eſſe, ſi hyperbolæ duæ ſeſe extrinſecus contingant, ut ſectiones iiſdem oppoſitæ vel conveniant vel ſeſe contingant.

APOL-

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI TRES POSTERIORES
(*Sc.* Vtus. VItus. & VIImus.)

EX

ARABICO SERMONE

IN

LATINUM CONVERSI,

CUM

PAPPI ALEXANDRINI

LEMMATIS.

SUBJICITUR

LIBER CONICORUM OCTAVUS

RESTITUTUS.

Opera & ſtudio EDMUNDI HALLEII apud *Oxonienſes*
Geometriæ Profeſſoris *Saviliani.*

Digitized by Google

MAXIME REVERENDO

IN CHRISTO PATRI AC DOMINO

D. *NARCISSO MARSH*,

Archiepiscopo *ARMACHANO*

ET

Totius *HIBERNIÆ* Primati,

ARTIUM MATHEMATICARUM

FAUTORI SUMMO,

SUIQUE ORDINIS PROPE UNICO,

HANC

QUINTI, SEXTI ET SEPTIMI LIBRI

CONICORUM APOLLONII

VERSIONEM,

E CODICE SUO ARABICO PRÆSTANTISSIMO

ADORNATAM,

Ea qua par eſt reverentia & obſervantia

Humillime offert

EDM. HALLEIUS.

Digitized by Google

LECTORI S.

P*Ræſtantiſſimus ille Codex* Armachanus, *ex quo ſequentem Verſionem adornavimus, in ora libri charactere majuſculo hunc titulum præ ſe fert.*

ڪتب المخروطات لنصير الدين الطوسي

"*Liber Conicorum juxta* Naſir-eddin Tuſæum." *Et tam in principio quam fine libb.* V VI^ti. & VII^mi *occurrunt hæc verba.*

ڪتب ابلونيوس في المخروطات اخرج ثابت بن قرة واصلاح بني موسى

"*Liber* Apollonii *de Conicis. Traduxit* Thebit ben Corah, *emendavit vero* Beni "Moſes. *In calce autem legitur Epiloge, quæ quaſi Hiſtoriola eſt, quâ manu, quo loco & tempore deſcriptus fuit ille Codex atque hoc modo ſe habet, Interprete* D^no Sike I.L.D. *viro omnigenâ literaturâ perpolito, Linguarum Orientalium peritiſſimo, & He*braicæ *apud* Cantabrigienſes *Profeſſore digniſſimo.*

"*Hæc eſt narratio, quam in fine hujus libri ſcripſit* Muley *maximus* Naſir-eddin" (*hic dictus* نصير الحق والدين). "*Abſolvit ſcriptor harum linearum* Mohammed "Ebn Mohammed Ebn Al-Haſan Tuſæus *complere hunc librum & corrigere hoc* "*exemplar, auxilio Dei & optimo adjutorio ejus, die* 21. *menſis* Dhi'lhajje *anni* 645, "(*anno Chr.* 1248. *Mart.* 9.) *Inceperat eo deſcribendo occupari die* 12mo *menſis* Rabiae "*prioris ejuſdem anni,* (*Chr.* 1247. *Aug.* 16.) *nec tamen ei vacavit amplius quam duas* "*tertias partes ejus intervalli. Abſolvit autem ſcribere Scholia in hoc exemplar, ac diſpo*"*nere & corrigere figuras ejus,* Achmed Ebn Aly Abu'lfaraj Mohammed, *qui cogno*"*minatur* Ebno'lbawwâb Bagdadenſis (*Deus fortunet ſtatum ejus*) *menſe* Moharram "*anni* 662. (*Chr.* 1263. *Octob.*) *laudans Deum pro beneficiis ejus, & orans pro propheta* "*ejus electo* Mohammede *& familia ejus. Laus Deo, & pax ſuper ſervis ejus electis:* "*fiducia noſtra eſt Deus & optimus protector.*

"*Abſolutum eſt exemplar hoc, in urbe* Marága, *feria ſecunda, die decimo menſis* Shaa"bân *anno* 702, (*Chr.* 1303. *Mart.* 30.) *menſis* Perſici Chordâd *die* Aſmôn.

Ad marginem autem paginæ ultimæ aſcribuntur hæc verba,

وجدت مكتوبا علي اخر نسخة الذي نسخت منها هذه النسخة واما المقالة الثامنة من الكتاب لم تنقل الي العربي فلم توجد في اليوناني

hoc eſt,

"*Scriptum legitur in calce exemplaris unde deſcriptum eſt hoc exemplar. Partem octa*"*vam hujus libri in* Arabicum *non traductam fuiſſe, quia etiam in* Græco *non reperta* "*eſt.*" *Adeo ut de octavo libro recuperando vix ulla ſpes ſit.*

Porro urbs Marága, *in qua ante quadringentos annos nobile hoc Conicorum exemplar ſcriptum dicitur, eſt in confiniis* Mediæ & Aſſyriæ, *ſub Long.* 82^gr. *& Lat.* 37^gr.$\frac{1}{2}$. *Urbs autem* Tûs, *unde ortus* Naſir-eddin, *in eadem fere Latitudine ac* Marága *ſita, Longitudinem habet* 92^gr.$\frac{1}{2}$. *civitate* Bagdâd *habente* 80^gr. *juxta Tabulas* Perſicas *Geographicas* à Gravio *noſtro editas.*

Benigne igitur velim accipias hoc quicquid eſt operis, ab oriente ad nos advectum & hoc unico (quod ſcimus) exemplari feliciter conſervatum; & noſtris quæſo in eo interpretando & luce donando conatibus faveas. Errata quæ operarum incuriâ irrepſerunt, aut nobis forſan quandoque minus perſpicacibus exciderunt, ne ægre feras hoc modo corrigere.

Pag. 4. lin. 13. *lege*, pro ΓΖ, ΓΣ. *p.* 14. *l.* 48. pro ΓΧΠ, ΓΘΠ. *p.* 16. *l.* 13. pro *quadratum igitur ex* ξΔ. *leg.* Exceſſus igitur quadrati ex ΓΔ ſupra quadratum ex ξΔ. *Prop.* 25 in Schem. Hyperb. fiat Α pro Δ. *p.* 24. *l.* 4. pro ΘΖ ΘΚ. *p.* 42. *l.* 12. pro 11um, 10um. *p.* 66. *l.* 38. pro ΛΖ, ΛΖ. *p.* 77. *l.* 7. pro ΜΞ, ΜΧ. *p.* 91. *l.* 5. pro ΗΖΚ, ΖΗΚ. *p.* 92. *l.* 13 pro *quadr*[illegible] ΓΛΔ, *rectangulum* ΓΛΔ. *p.* 97. *l.* 13. pro *majorem*, minorem. *p.* 100. *l.* 3^a. pro 12um, 23[illegible]. *p.* 108. *l.* 38. pro *latus ejus rectum*, latere ejus recto. *p.* 13[illegible]. *l.* 4. pro ΑΒ, ΑΓ. *p.* 123. *l.* penult. pro *recta datur; ab*, *leg.* recta datur ab. *p.* 136. *l.* 43. pro *major*, minor.

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΛΗΜΜΑΤΑ
ΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟ ΠΕΜΠΤΟΝ
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA
IN QUINTUM LIBRUM CONICORUM
APOLLONII PERGÆI.

ΛΗΜΜΑ α'.

Τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ. Λέγω ὅτι εἰ μὲν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΒΔΓ τῷ ἀπὸ ΑΔ τετραγώνῳ, γίνεται ὀρθὴ ἡ Α γωνία· εἰ δὲ μεῖζον, ἀμβλεῖα· εἰ δὲ ἔλασσον, ὀξεῖα.

Ἔστω πρότερον ἴσον, ἀνάλογον ἄρα καὶ περὶ ἴσας γωνίας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ· ὥστε ὀρθὴ ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Α γωνία. ἀλλὰ ἔστω μεῖζον, καὶ αὐτῷ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ΔΕ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΕΓ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία, ὧν αὐτῆς

LEMMA I.

Sit ΑΒΓ triangulum, ac ducatur cathetus ΑΔ. Dico quod ſi rectangulum ΒΔΓ æquale ſit quadrato ex ΑΔ, erit angulus ad Α rectus; ſi majus fuerit eo, obtuſus; ſin minus, acutus.

PRIMO ſit æquale, ac ΒΔ erit ad ΑΔ ſicut ΑΔ ad ΔΓ, & ſunt circa æquales angulos, quare angulus ad Α æqualis eſt angulo ad Δ. ac propterea angulus ad Α rectus eſt. Sed ſit majus, eique æquale fiat quadratum ex ΔΕ, & jungantur ΒΕ, ΕΓ; erit igitur angulus ΒΕΓ rectus, adeoque



μείζων ἡ Α γωνία. ἀλλὰ ἔστω ἔλασσον· καὶ αὐτῷ ἴσον κείσθω τὸ ἀπὸ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΖΓ· ἔσται δὴ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνία, καὶ αὐτῆς ἐλάσσων ἡ πρὸς τῷ Α γωνία· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ Α γωνία.

angulus ad Α obtuſus ſive recto major eſt. Si vero minus fuerit, ipſi æquale ponatur quadratum ex ΔΖ, & jungantur ΒΖ, ΖΓ, ac angulus ΒΖΓ rectus erit, eoque minor eſt angulus ad Α, ac proinde angulus ad Α acutus. Q. E. D.

ΛΗΜΜΑ β.

Θέσει ἐουσῶν [πρὸς ὀρθὰς] δύο εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ σημείου δοθέντος τοῦ Δ· γράψαι διὰ τοῦ Δ ὑπερβολὴν περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒ, ΒΓ.

Γεγονέτω· κέντρον ἄρα αὐτῆς ἐστὶ τὸ Β. ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ καὶ ἐκβεβλήσθω, διάμετρος ἄρα ἐστί· κείσθω τῇ ΔΒ ἴση ἡ ΒΕ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν, δοθὲν ἐστὶ τὸ Ε καὶ πέρας τῆς διαμέτρου. ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΔΖ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ. καὶ κείσθω τῇ ΒΖ ἴση ἡ ΖΓ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Γ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστίν. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΒ, δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ δοθέν, δοθεῖσα ἄρα ἡ ΑΓ τῷ μεγέθει. καὶ ἔσται ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, διὰ τὸ καὶ τὴν ΒΖ τῇ ΖΓ ἴσην εἶναι. ἔστω δὲ ὀρθία τοῦ πρὸς τῇ ΕΔ εἴδους ἡ ΔΗ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ, ΔΓ δύναται τὸ τέταρτον τοῦ ὑπὸ ΕΔΗ,

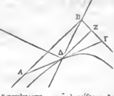
LEMMA II.

Duabus rectis ΑΒ, ΒΓ invicem normalibus poſitione datis, ac dato puncto Δ, deſcribere per Δ hyperbolam circa aſymptotos ΑΒ, ΒΓ.

PUta factum, ac centrum ejus erit Β. Jungatur igitur recta ΒΔ producaturque, quæ proinde diameter erit. Ponatur ΒΕ [illegible] ΒΔ æqualis, quare data eſt, unde & datum punctum Ε diametri terminus eſt. De Δ ſuper rectam ΒΓ demittatur cathetus ΔΖ, ac ſiat ΖΓ ipſi ΒΖ æqualis, ac datum erit punctum Γ. juncta autem & [illegible]ducta recta ΓΔ ad punctum Α, recta ΓΑ data [illegible] poſitione; ac recta ΑΒ datur poſitione, quare pun[illegible] Α datur. Datur [illegible] punctum Γ, adeoque recta ΑΓ datur [illegible] erit quoque ΑΔ ipſi ΔΓ æqualis, ob ΒΖ ipſi [illegible] æqualem. Sit jam ΔΗ latus rectum figuræ diame[illegible] ΔΕ, poterit igitur utraque ΑΔ, ΑΓ quartam [illegible] rectanguli

anguli EΔH. ſed & eædem poſſunt quartam partem quadrati ex AΓ, quare rectangulum ſub EΔH æquale eſt quadrato ex AΓ. Datum autem eſt quadratum ex AΓ, datum igitur rectangulum EΔH; unde datâ rectâ EΔ data quoque eſt HΔ, ac punctum H datum. [a] datis autem poſitione duabus rectis EΔ, ΔH in eodem plano ad angulos rectos inter ſe conſtitutis, per datum punctum Δ & ſub angulo AΔB fit hyperbola, cujus diameter eſt BΔ, vertex vero Δ, ordinatim autem applicatæ ducuntur ſub angulo dato AΔB, ac poſſunt ſpatia ipſi ΔH adjacentia, latitudineſque habentia eas quas puncto Δ contermines ipſæ ordinatim applicatæ è diametro productâ abſcindunt, excedentia vero figuris ſimilibus figuræ EΔH. data eſt igitur poſitione ſectio hyperbolica.

ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ ΑΓ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΔΗ τῷ ἀπὸ ΑΓ τετραγώνῳ. δοθὲν δὲ τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον, δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΒΔΗ. καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΒΔ, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΗΔ, ὥστε δοθὲν τὸ Η. [a] ἐπεὶ ἐν θέσει δεδομένων δύο εὐθειῶν ἐν ἐπιπέδῳ τῶν ΒΔ, ΔΗ ὀρθῶν ἀλλήλαις κειμένων, καὶ ὑπὸ δοθέντος τοῦ Δ ὑπὸ τῆς ΑΔΒ γωνίας γίνεται ὑπερβολὴ, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΒΔ, κορυφὴ δὲ τὸ Δ, αἱ δὲ καταγόμεναι κατάγονται ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, δυνάμεναι τὰ παρὰ τὴν ΔΗ παρακείμενα, πλάτη ἔχοντα ἃ αὐταὶ ἀπολαμβάνουσιν ἀπὸ τῆς ἐπ' εὐθείας τῇ διαμέτρῳ πρὸς τὸ Δ, ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΕΔΗ. θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ τομή.



[b] Componetur autem problema hoc modo. Sint duæ rectæ poſitione datæ AB, BΓ; punctum autem datum Δ; ac juncta BΔ producatur ad E; ipſique BΔ æqualis fiat BE; & demittatur normalis ΔZ, ac fiat ΓZ ipſi BZ æqualis. jungatur ΓΔ & producatur ad A, ipſique ΔE aptetur ΔH, ita ut quadratum ex AΓ æquale ſit rectangulo EΔH; & diametro ΔE deſcribatur hyperbola, modo in analyſi dicto. Dico hanc ſectionem problema efficere. Quoniam enim BZ ipſi ZΓ æqualis eſt, erunt etiam AΔ, ΔΓ æquales: utraque igitur AΔ, ΔΓ, potens quartam partem quadrati ex AΓ, poterit quartam partem rectanguli EΔH, nempe figuræ ſuper diametrum ΔE factæ. Hoc autem ita ſe habente, demonſtratum, eſt in ſecundo libro Conicorum, hyperbolæ aſymptotos eſſe rectas AB, BΓ.

[b] Συντεθήσεται δὲ τὸ πρόβλημα οὕτως. Ἔστωσαν αἱ τῇ θέσει δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ αὐτῇ ἴση κείσθω ἡ ΒΕ. καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΔΖ, καὶ τῇ ΒΖ ἴση κείσθω ἡ ΖΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Α· καὶ τῇ ΔΕ παραβεβλήσθω ἡ ΔΗ, καὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον κείσθω τὸ ὑπὸ ΕΔΗ· καὶ γεγράφθω, ὡς ἐν τῇ ἀναλύσει λέγομεν, περὶ διάμετρον ΔΕ ὑπερβολή. λέγω ὅτι ποιεῖ τὸ πρόβλημα. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ἀπὸ ΑΔ, ΔΓ δυνάμει τὸ τέταρτόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου, καὶ ὅτι τοῦ ὑπὸ ΕΔΗ, τουτέστι τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ διαμέτρῳ εἴδους. Ἐὰν δὲ ᾖ οὕτω, [c] δέδεικται ἐν τῷ δευτέρῳ ὅτι ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΑΒ, ΒΓ τῆς ὑπερβολῆς.

LEMMA III.

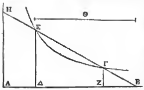
Sit recta AB poſitione data, ac punctum Γ datum; ac, ductâ rectâ BΓ, ſit recta BΔ data: & erigatur normalis ΔE. Dico punctum E contingere hyperbolam per punctum Γ tranſeuntem.

ΛΗΜΜΑ γ'.

Θέσει εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ δοθὲν τὸ Γ· διήχθω ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω δοθεῖσα ἡ ΒΔ, ὀρθὴ δὲ ἀνήχθω ἡ ΔΕ. ὅτι τὸ Ε ἅπτεται θέσει κώνου τομῆς ὑπερβολῆς ἐρχομένης διὰ τοῦ Γ.

SIT ΓZ normalis, ipſique BΔ æqualis ponatur ZA; datur itaque punctum A: & erectâ normali AH, dabitur poſitione recta AH, occurrens ipſi BΓ productæ ad punctum H: datis igitur poſitione rectis AB, AH, hyperbola, per datum punctum Γ aſymptotis AB, AH deſcripta, tranſibit per punctum E; quia BH ipſi EΓ æqualis eſt, ob totam BE toti HΓ æqualem. Hoc autem ex præcedente manifeſtum eſt.

Ἤχθω κάθετος ἡ ΓΖ, καὶ τῇ ΒΔ ἴση κείσθω ἡ ΖΑ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Α. ἀνήχθω ὀρθὴ ἡ ΑΗ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ συμπιπτέτω τῇ ΒΓ, ἐπ' ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ Η· καὶ θέσει δοθεισῶν τῶν ΒΑ, ΑΗ, καὶ σημείου δοθέντος τοῦ Γ, ὑπερβολὴ περὶ ἀσυμπτώτους ΗΑ, ΑΒ ἐλεύσεται ἄρα καὶ διὰ τοῦ Ε, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΒΗ, ἐπεὶ καὶ ὅλη ΕΒ τῇ ΗΓ. καὶ ἔστιν διὰ τὸ προγεγραμμένον.



Componetur autem hoc modo. Sit AB recta poſitione data, & punctum datum Γ; ſitque BΓ recta ducta, data autem recta ſit Θ. demiſſa normali ΓZ, ipſi Θ æqualis fiat ZA; & ad angulos rectos erigatur AH occurrens rectæ BΓ productæ in H: dein aſymptotis HA, AB, per punctum Γ intra datum, deſcribatur hyperbola. Dico eam problemati ſatisfacere, hoc eſt, ſi demittatur cathetus aliqua EΔ, ſemper fiet BΔ ipſi Θ æqualis. Hoc autem manifeſtum eſt propter aſymptotos; æquales enim ſunt EH, ΓB, adeoque AΔ ipſi ZB æqualis: tota igitur AZ, hoc eſt recta Θ, æqualis eſt toti BΔ.

Συντεθήσεται δὲ οὕτως. Ἔστω ἡ μὲν τῇ θέσει δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δοθὲν τὸ Γ, ἡ δὲ διηγμένη ἡ ΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα ἡ Θ· καὶ αὐτῇ ἴση ἔστω, καθέτου ἀχθείσης τῆς ΓΖ, ἡ ΖΑ· καὶ ὀρθὴ ἀνήχθω ἡ ΑΗ· συμπιπτέτω δὲ τῇ ΒΓ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Η· καὶ περὶ ἀσυμπτώτους τὰς ΗΑ, ΑΒ διὰ δοθέντος τοῦ Γ γεγράφθω ὑπερβολή, λέγω ὅτι ποιεῖ τὸ πρόβλημα, τουτέστιν ὅτι, ὅταν ἂν κάθετος ἀχθῇ ἡ ΒΔ, ἴση γίνεται ἡ ΒΔ τῇ Θ. τοῦτο δὲ φανερὸν διὰ τὰς ἀσυμπτώτους, ἴση γὰρ ἡ ΕΗ τῇ ΓΒ, ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΖΒ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΑΖ, τουτέστιν ἡ Θ, ἴση ἐστὶ τῇ ΒΔ.

[a] Vide Prop. LIII. Lib. primi. [b] Vide Prop. IV. Lib. ſecundi. [c] Vide Prop. I. Lib. ſecundi.

ΛΗΜΜΑ δ′.

Ἔστω ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΓ. ὅτι τῶν ΒΑ, ΑΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΑΔ.

Κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ. καὶ διελόντι ἄρα γίνεται ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, τουτέστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΓΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΕ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΓΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶν τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΕΒ τῷ ἀπὸ ΔΕ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΓΔΕ. ἀνάλογον καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς ΑΓ· ὅλη ἄρα πρὸς ὅλην ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΓ· ὥστε τῶν ΒΑ, ΑΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν ἡ ΑΔ.

LEMMA IV.

Sit ut ΒΑ ad ΑΓ ita quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΔΓ. Dico ΑΔ mediam eſſe proportionalem inter ΒΑ & ΑΓ.



Fiat ΔΕ ipſi ΓΑ æqualis; ac dividendo erit ut ΒΓ ad ΓΑ, hoc eſt, ut rectangulum ΓΒΕ ad rectangulum ſub ΑΓ, ΕΒ ita (per ſextam II. Elem.) rectangulum ΓΒΕ ad quadratum ex ΒΔ: quare rectangulum ſub ΑΓ, ΕΒ æquale eſt quadrato ex ΔΕ, hoc eſt rectangulo ΓΔΕ. ob proportionales igitur & componendo, erit ut ΒΔ ad ΔΓ ſive ΔΓ, ita ΔΑ ad ΑΓ: quapropter tota ΒΑ ad totam ΑΔ erit in eadem ratione ΑΔ ad ΑΓ; ita ut ΑΔ media proportionalis ſit inter ΒΑ, ΑΓ.

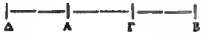
ΛΗΜΜΑ ε′.

Ἔστω τὸ ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον τῷ δὶς ἀπὸ ΑΓ. ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ.

Κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΔ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΓΑ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΒΓ. καὶ παρὰ τὴν αὐτήν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ, τουτέστιν ἡ ΑΓ, τῇ ΓΒ.

LEMMA V.

Sit rectangulum ΑΒΓ duplum quadrati ex ΑΓ. Dico ΑΓ ipſi ΓΒ æqualem eſſe.



Fiat ΑΔ ipſi ΑΓ æqualis: erit itaque rectangulum ΓΔΑ æquale rectangulo ΑΒΓ. & applicato utroque ad eandem rectam ΑΓ, erit ΑΔ ipſi ΑΓ æqualis etiam rectæ ΓΒ æqualis.

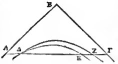
ΛΗΜΜΑ ς′.

Περὶ τὰς αὐτὰς ἀσυμπτώτους τὰς ΑΒ, ΒΓ ὑπερβολαὶ γεγράφθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ· λέγω ὅτι οὐ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις.

Εἰ γὰρ δυνατὸν συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ· καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω εἰς τὰς τομὰς εὐθεῖα ἡ ΑΔΕΖΓ· ἔσται δή, διὰ μὲν τὴν ΔΖ τομὴν, ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΖΓ· διὰ δὲ τὴν ΔΕ τομὴν, ἴση ἡ ΑΔ τῇ ΕΓ. ὥστε ἡ ΓΖ τῇ ΓΕ ἴση ἐστὶν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα συμβάλλουσιν αἱ τομαὶ ἀλλήλαις.

LEMMA VI.

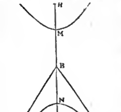
Circa eaſdem aſymptotos ΑΒ, ΒΓ deſcribantur hyperbolæ ΔΕ, ΔΖ. Dico eas non occurrere invicem.



Nam ſi fieri poſſit, conveniant in puncto Δ, & per Δ ducatur ad ſectiones recta ΑΔΕΖΓ; erit igitur, propter ſectionem ΔΖ, recta ΑΔ ipſi ΖΓ æqualis. verum, propter ſectionem ΔΕ, eadem ΑΔ ipſi ΕΓ æqualis erit, adeoque ΓΖ ipſi ΓΕ æqualis: quod impoſſibile eſt. hæ ſectiones igitur non concurrunt inter ſe.

Λέγω δὲ ὅτι καὶ εἰς ἄπειρον αὐξόμεναι ἔγγιον προσάγουσιν ἑαυταῖς, καὶ εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα. ἤχθω γάρ τις καὶ ἑτέρα ἡ ΘΝΚ, καὶ ἔστω ἡ διάμετρος ΜΝ, ἧς πέρας τὸ Μ [ἔστω καὶ τῆς ΔΠΖ διάμετρος ἡ ΠΗ·] ἔσται ἄρα ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΗΟΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΡ οὕτως ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ὥστε ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ οὕτω τὸ ὑπὸ ΗΟΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΡ, καὶ ἐναλλάξ. μεῖζον δὲ ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΜΛΝ τοῦ ὑπὸ ΗΟΠ, * μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΞΛ τῆς ΘΣ· καὶ διὰ τὰς τομὰς, ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΞΔ τῷ ὑπὸ ΣΘΡ, [ἑκάτερον γὰρ τῷ ἀπὸ ΠΤ ἴσον·] ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΞΔ τῆς ΘΡ· ὥστε ἀεὶ εἰς ἐλάττον ἀφικνοῦνται διάστημα. ἀλλὰ καὶ προσάγουσιν, εἰ γὰρ ἑκατέρα αὐτῶν τῆς ἀσυμπτώτου ἔγγιον προσάγει, δηλονότι καὶ ἑαυταῖς.

Dico quoque quod eædem in infinitum productæ ſemper invicem propiores fiunt, & ad minorem procedunt diſtantiam. Ducatur enim alia hyperbola ΘΝΚ, ſitque diameter ejus ΜΝ, cujus terminus Μ; ac ſit ΝΠ diameter hyperbolæ ΔΠΖ: erit igitur rectangulum ΜΛΝ ad quadratum ex ΛΞ, ut diameter tranſverſa ad latus rectum; & ut rectangulum ΗΟΠ ad quadratum ex ΟΡ ita diameter tranſverſa ad latus rectum: quare rectangulum ΜΛΝ eſt ad quadratum ex ΛΞ ut rectangulum ΗΟΠ ad quadratum ex ΟΡ, ac permutando. ſed rectangulum ΜΛΝ majus eſt rectangulo ΗΟΠ, * quare ΞΛ major eſt quam ΘΣ ac propter ſectiones, rectangulum ΖΞΔ rectangulo ΣΘΡ æquale eſt [utrumque enim quadrato ex ΠΤ æquale] quapropter ΞΔ minor eſt quam ΘΡ. ſemper igitur ſectiones accedunt invicem ad minora intervalla, ſibique adjacent. nam ſi utraque earum aſymptotis ſemper propius accedit, manifeſtum eſt & ſibi ipſis ſemper appropinquare.



* *Manca*

* *Manca eſt hæc demonſtratio: placuit igitur aliam hic ſubjicere, ab antiquâ & integrâ* Pappi, *ut ex veſtigiis ejus conjicere licet, non multum diverſam.*

Quoniam enim ſectiones ſunt circa eaſdem aſymptotos, erit ut rectangulum ΜΔΝ ad quadratum ex ΔΞ ita rectangulum ΗΛΠ ad quadratum ex ΔΔ. pariterque ut rectangulum ΜΟΝ ad quadratum ex ΟΘ ita rectangulum ΗΟΠ ad quadratum ex ΟΡ, ſunt enim omnia in ratione lateris tranſverſi ad latus rectum: reliquum igitur ad reliquum erit in eadem ratione. quare ut latus tranſverſum ad rectum ita differentia rectangulorum ΜΛΝ, ΗΛΠ ad differentiam quadratorum ex ΛΞ, ΛΔ, hoc eſt [per 6. II. El.] ad rectangulum ΖΞΔ; & ita differentia rectangulorum ΜΟΝ, ΗΟΠ ad differentiam quadratorum ex ΟΘ, ΟΡ, ſive rectangulum ΣΘΡ. Sed differentia rectangulorum ΜΛΝ, ΗΛΠ æqualis eſt differentiæ rectangulorum ΜΟΝ, ΗΟΠ; ſemper enim [per *Pappi* Lem. 4. in Lib. III.] æqualis eſt rectangulo ΜΠΝ: eſt igitur rectangulum ΖΞΔ æquale rectangulo ΖΘΡ. Verum ΖΞ major eſt quam ΖΘ, adeoque ΞΔ minor eſt quam ΘΡ. Quapropter hæ ſectiones ſemper accedunt invicem ad minora intervalla.

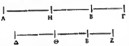
Aliter & brevius

Propter Hyperbolas, ΑΡ æqualis eſt ipſi ΣΓ [per 8. II. huj.] ac ΑΘ ipſi ΚΓ; ac proinde reliqua ΘΡ reliquæ ΣΚ æqualis eſt, quocunque modo duxeris rectam ΑΓ. Eſt autem [per 10. II. huj.] rectangulum ΣΑΡ ſemper æquale rectangulo ΖΥΔ, ac rectangula ΚΑΘ, ΕΥΞ ſunt ubique æqualia, quare & eorundem differentiæ ſemper æquales ſunt. Sed [per *Pappi* Lem. 4. in III. huj.] differentia rectangulorum ΣΑΡ, ΚΑΘ æqualis eſt rectangulo ΣΘΡ, & differentia rectangulorum ΖΥΔ, ΕΥΞ æqualis eſt rectangulo ΖΞΔ, adeoque rectangula ΣΘΡ, ΖΞΔ ſunt ubique æqualia: unde patet ΞΔ minorem eſſe quam ΘΡ. Ac manifeſtum eſt hyperbolam ΔΠΖ ubique intra hyperbolam ΕΝΞ conſtitui, quia rectangulum ΔΘΓ ubique minus eſt rectangulo ΑΡΓ.

LEMMA VII.

Sit ut ΑΒ ad ΒΓ ita ΔΕ ad ΕΖ, & ut ΒΑ ad ΑΗ ita ΕΔ ad ΔΘ. Dico ut ſolidum baſin habens quadratum ex ΑΓ, altitudinem vero ΑΒ, ad ſolidum baſin habens quadratum ex ΔΖ altitudinemque ΔΕ, ita cubus ex ΑΗ una cum eo quod eſt ad cubum ex ΗΒ in ratione quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ, ad cubum ex ΔΘ una cum eo quod eſt ad cubum ex ΘΕ in ratione quadrati ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΕ.

Quoniam enim ut ΓΑ eſt ad ΑΒ ita ΖΔ ad ΔΕ, erit etiam ut quadratum ex ΓΑ ad quadratum ex ΑΒ ita quadratum ex ΖΔ ad quadratum ex ΔΕ. ſed ut quadratum ex ΓΑ eſt ad quadratum ex ΑΒ, ſumptâ communi altitudine ΑΒ, ita ſolidum baſin habens quadratum ex ΑΓ & altitudinem ΑΒ ad cubum ex ΑΒ: ut autem quadratum ex ΖΔ ad quadratum ex ΔΕ, ob communem altitudinem ΔΕ; ita erit ſolidum baſin habens quadratum ex ΖΔ & altitudinem ΔΕ ad cubum ex ΔΕ. Hæc igitur proportionalia ſunt; ac permutando. Sed ut cubus ex ΑΒ eſt ad cubum ex ΔΕ ita cubus ex ΑΗ ad cubum ex ΔΘ, & ita cubus ex ΗΒ ad cubum ex ΘΕ. verum ut cubus ex ΗΒ ad cubum ex ΘΕ ita ſolidum quod eſt ad cubum ex ΗΒ in ratione quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ, ad ſolidum quod eſt ad cubum ex ΘΕ in ratione quadrati ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΕ. ut vero unus antecedentium eſt ad unum conſequentium ita omnes ad omnes; quare erit, ut ſolidum baſin habens quadratum ex ΑΓ & altitudinem ΑΒ, ad ſolidum baſin habens quadratum ex ΔΖ altitudinemque ΔΕ, ita cubus ex ΑΗ una cum eo quod ad cubum ex ΗΒ rationem habet quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΓΒ, ad cubum ex ΔΘ una cum eo quod ad cubum ex ΘΕ rationem habet quadrati ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΕ. Q. E. D.



ΛΗΜΜΑ ζ.

Ἔστω ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΘ· ὅτι γίνεται ὡς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΔΖ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΑΗ κύβος μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΔ κύβον μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ οὕτω τὸ ἀπὸ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ, κοινὸν ὕψος ἡ ΑΒ, οὕτω τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβον. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ, κοινὸν ὕψος ἡ ΔΕ, οὕτω τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ ΖΔ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΕ κύβον. καὶ ταῦτα ἄρα ἀνάλογον καὶ ἐναλλάξ ἐστιν. ἔστι δὲ ὡς ὁ ἀπὸ τῆς ΑΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΕ κύβον, οὕτως ὅ τε ἀπὸ ΑΗ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΔΘ κύβον, καὶ ὁ ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον. ἀλλ' ὡς ὁ ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον, οὕτω τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, πρὸς τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΕ· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ στερεὸν βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ στερεὸν τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον ὕψος δὲ τὴν ΔΕ, οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς ΑΗ κύβος μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΗΒ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, πρὸς τὸν ἀπὸ ΔΘ κύβον μετὰ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸν ἀπὸ τῆς ΘΕ κύβον ὃν τὸ ἀπὸ ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ.

LEMMA VIII.

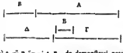
Si ſint Α & Β ſimul æqualia ipſis Γ & Δ ſimul. Dico Α excedere Γ eodem exceſſu quo Δ majus eſt quam Β.

ΛΗΜΜΑ η.

Ἔστω τὸ Α μετὰ τοῦ Β ἴσον τῷ Γ μετὰ τοῦ Δ. ὅτι ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ Δ τοῦ Β.

Ἔστω

ΕΣΤΩ γὰρ ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ τὸ Ε, τὸ ἄρα Α ἴσον ἐστὶ τοῖς Γ, Ε. κοινὸν προσκείσθω τὸ Β· τὰ Α, Β ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς Γ, Ε, Β. ἀλλὰ τὰ Α, Β τοῖς Γ, Δ ἴσα ὑπόκειται· καὶ τὰ Γ, Δ ἄρα τοῖς Γ, Ε, Β ἴσα. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ Γ, λοιπὸν ἄρα τὸ Δ ἴσον τοῖς Ε, Β· ὥστε τὸ Δ τοῦ Β ὑπερέχει τῷ Ε. ᾧ ἄρα ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ Δ τοῦ Β ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι ἐὰν ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ Δ τοῦ Β, ὅτι τὰ Α, Β ἴσα ἐστὶ τοῖς Γ, Δ.

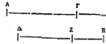


SIT E exceſſus quo A majus eſt quam Γ; A igitur æquale eſt utriſque Γ, E. commune adjiciatur B, & A, B ſimul æqualia erunt ipſis, Γ, E, B ſimul ſed ex hypotheſi A, B ſimul æqualia ſunt ipſis Γ, Δ ſimul; quare Γ, Δ ipſis Γ, E, B æquantur. commune auferatur Γ, ac reliquum Δ reliquis E, B æquale erit; ac Δ majus erit quam B exceſſu ipſius E: quo igitur exceſſu A ſuperat Γ eodem & Δ ſuperabit B. Pari modo demonſtrari poteſt, quod ſi A ſuperat Γ eodem exceſſu quo Δ ſuperat B, utraque A, B ſimul utriſque Γ, Δ ſimul æqualia eſſe.

ΛΗΜΜΑ θ'.

Εστω δύο μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΒ. ὅτι ἐὰν ὑπερέχῃ τὸ ΑΒ τοῦ ΑΓ, ὑπερέχει καὶ τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτὸν, τῷ λόγον ἔχοντι πρὸς τὸ ΓΒ τὸν αὐτόν.

ΕΣΤΩ γὰρ τὸ μὲν πρὸς τὸ ΑΒ λόγον τινὰ ἔχον τὸ ΔΕ, τὸ δὲ πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχον τὸ ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΖ πρὸς τὸ ΒΓ λόγον ἔχει τὸν αὐτόν. καὶ ἔστι τὸ ΕΖ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει τὸ ΔΕ τοῦ ΔΖ, τουτέστι τὸ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒ τοῦ λόγον ἔχοντος πρὸς τὸ ΑΓ τὸν αὐτόν.



LEMMA IX.

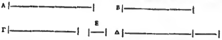
Sint duæ magnitudines AB, ΓB. Dico quod ſi majus fuerit AB quam AΓ, illud quod ad AB rationem aliquam habet ſuperabit quod ad AΓ eandem habet rationem, exceſſu qui eandem ipſam rationem ad ΓB habebit.

HAbeat enim ΔE rationem aliquam ad AB, & ſit ΔZ ad AΓ in eadem ratione; reliquum itaque EZ eandem ipſam rationem habebit ad BΓ. eſt autem EZ exceſſus quo ΔE ſuperat ΔZ, ſive quo id quod ad AB rationem habet excedit illud quod ad AΓ eandem habet rationem.

ΛΗΜΜΑ ι'.

Τὸ Α τοῦ Γ ἐλάσσονι ὑπερεχέτω ἤπερ τὸ Δ τοῦ Β. ὅτι τὰ Α, Β ἐλάσσονά ἐστι τῶν Γ, Δ.

ΕΣΤΩ γὰρ ᾧ ὑπερέχει τὸ Α τοῦ Γ τὸ Ε, τὰ Α, Β ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς Γ, Ε, Β. ἐπεὶ δὲ τὸ Α τοῦ Γ ἐλάσσονι ὑπερέχει ἤπερ τὸ Δ τοῦ Β· τὸ δὲ Α τοῦ Γ ὑπερέχει τῷ Ε, τὸ Ε ἄρα ἔλασσόν ἐστι τῆς τῶν Δ, Β ὑπεροχῆς. ὥστε τὰ Ε, Β ἐλάσσονά ἐστι τοῦ Δ. κοινὸν προσκείσθω τὸ Γ, τὰ Γ, Ε, Β ἄρα ἐλάσσονά ἐστι τῶν Γ, Δ. ἀλλὰ τὰ Γ, Ε, Β ἴσα ἐδείχθη τοῖς Α, Β· τὰ Α, Β ἄρα ἐλάσσονά ἐστι τῶν Γ, Δ. ὁμοίως καὶ τὸ ἀναστρέφον καὶ τὰ τῆς ἐλλείψεως ὁμοίως.



LEMMA X.

Excedat A ipſum Γ minore differentia quam qua Δ ſuperat B, Dico A, B ſimul minora eſſe quam Γ, Δ ſimul ſumpta.

SIT enim E exceſſus ipſius A ſupra Γ, unde A, B ſimul ipſis Γ, E, B ſimul ſumptis æqualia erunt ſuperat autem A ipſum Γ minore quam quo Δ ſuperat B: eſt autem E exceſſus quo A ſuperat Γ: igitur E minor eſt differentia ipſarum Δ, B; adeoque E, B minora ſunt quam Δ. commune addatur Γ, ac Γ, E, B ſimul minora erunt quam Γ, Δ. Sed demonſtratum eſt Γ, E, B æqualia eſſe ipſis A, B ſimul: quare A, B minora ſunt quam Γ, Δ ſimul. Pari modo conſtabit hujus converſa, & quid accidat ubi A minus fuerit quam Γ.

APOL-

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBER QUINTUS.

Apollonius Attalo S. P.

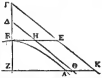
—— *Conſcriptæ à nobis ſunt hoc Libro quinto propoſitiones de* Maximis *&* Minimis. *Sciendum autem eos qui vel ante nos vel noſtro tempore vixerunt,* Minimarum *doctrinam leviter tantum attigiſſe: ideoque demonſtrarunt tantum quænam Rectæ contingant Sectiones, & viciſſim, nempe quidnam iis accidat propterea quod Sectionum Tangentes ſint. Ac quidem de hiſce egimus Libro primo, niſi quod in eorum expoſitione prætermiſimus* Minimarum *doctrinam. Conſtitueramus autem eum in his quoque demonſtrandis ſervare ordinem, quem in præmiſſis trium Sectionum Elementis ſequuti ſumus, relatione habitâ ad quamlibet Sectionum diametrum: quoniam vero innumera ſunt quæ hiſce accidunt, id ſolum in præſentia conati ſumus, ut oſtenderemus quomodo ſe res habeat reſpectu Axium ſive diametrorum principalium. Has autem Propoſitiones de* Minimis *accurate admodum diviſimus & diſtinximus in ſuas Claſſes: iiſque adjunximus illas quæ ad præfatam* Maximarum *doctrinam ſpectant. Id namque ſcientiæ hujus ſtudioſis in primis neceſſarium eſt, tum ad Diviſiones &* [illegible] *Problematum, tum ad eorundem Compoſitiones: præterquam quod hæc ipſa res de earum numero ſit, quæ per ſe contemplatione non indignæ videantur.* Vale.

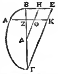
PROPOSITIO I.

SI in Hyperbola vel Ellipſi ad Verticem principalem Sectionis erigatur Axi normalis, quæ ſit dimidio Lateris recti æqualis; & ab ejus extremitate ducatur recta ad centrum ſectionis, ut & à quovis in ſectione puncto Axi ordinatim applicata: poterit ea duplum quadrilateri ſub rectis hoc modo ductis & lateris recti dimidio contenti.

Sit AB Hyperbola vel Ellipſis, cujus Axis BΓ ac centrum Δ: & ſit latus rectum Sectionis BE, ipſiuſque BE dimidium ſit BH. Jungatur ΔH, & ducatur ordinatim applicata quævis AZ, quæ parallela erit ipſi BE; & producatur ad Θ. Dico quadratum ex AZ duplum eſſe quadrilateri BZHΘ.

Ducatur è puncto E recta EΓ, quæ parallela erit ipſi ΔH; ac producatur ZΘ ad K: erit igitur ΘK parallela & æqualis ipſi HE, hoc eſt ipſi BH. Adjiciatur communis ZΘ, ac ZK æqualis erit utriſque BH, ZΘ ſimul ſumptis; adeoque quod fit ſub ZK & BZ æquale erit ei quod fit ſub BH, ZΘ ſimul ſumptis & BZ. Sed rectangulum ſub ZK, BZ æquale eſt quadrato ipſius AZ: (per 12^{am} & 13^{am} 1^{mi}.) Igitur rectangulum ſub BH, ZΘ ſimul ſumptis & BZ æquale eſt quadrato ex AZ. Verum rectangulum ſub utriſque ZΘ, BH & BZ duplum eſt quadrilateri BZHΘ. Quocirca quadratum ex AZ duplum eſt quadrilateri BZHΘ. Q. E. D.

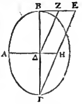




PROPOSITIO II.

CAdat autem ordinatim applicata ſuper centrum Ellipſeos Δ; fiat BZ dimidium ipſius BE: ac jungatur ΔZ. Dico quadratum ex AΔ duplum eſſe trianguli BZΔ.

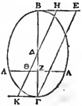
Connectatur recta ΓE. Quoniam enim BZ ipſi ZE æqualis eſt, atque etiam ZE ipſi ΔH æqualis, quæ parallela eſt ipſi BE, ideo rectangulum ſub ΔH, ΔB duplum eſt trianguli ΔZB. Sed rectangulum ſub ΔH, BΔ æquale eſt quadrato ex AΔ (per 13^{am} 1^{mi}.) Igitur quadratum ex AΔ duplum eſt trianguli ΔZB. Q. E. D.



PROPOSITIO III.

CAdat jam ordinatim applicata ab altera parte puncti Δ, ſive ultra centrum Ellipſeos, ut AZ; ac fiat BH dimidium lateris recti BE, ac jungatur HΔ quæ producatur in directum. Per punctum Z ipſi BE parallela, ad occurſum ipſius HΔ, ducatur ZΘ. Dico quadratum ex AZ duplum eſſe differentiæ triangulorum BΔH, ZΔΘ.

Per punctum Γ ducatur ΓK ipſi BE parallela, quæ occurrat ipſi HΔ in puncto K: ac completâ Sectione AB, producatur AZ ad A. erit igitur (per primam hujus) quadratum ex ZA duplum plani ΓKΘZ. Eſt antem ZA ipſi ZA æqualis, adeoque quadratum ex AZ æquale eſt quadrilatero ΓKΘZ. Planum autem hoc ΓKΘZ æquale eſt differentiæ triangulorum ΓΔK, ZΔΘ; quorum triangulum ΓΔK æquale eſt triangulo BΔH, ob BΔ ipſi ΔΓ æqualem. Quadratum igitur ex AZ duplum eſt differentiæ triangulorum BΔH, ZΔΘ. Quod erat demonſtrandum.



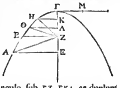
*

PROPO-

PROPOSITIO IV.

SI capiatur in Axe Parabolæ punctum cujus diſtantia à Vertice Sectionis æquetur dimidio Lateris recti, & ab eo ducantur rectæ quælibet ad Sectionem; earundem Minima *erit ea quæ ad Verticem Sectionis ducitur, atque huic propiores minores erunt remotioribus: cujuſcunque vero alterius ductæ quadratum ſuperabit quadratum hujus, exceſſu quadrato interceptæ inter verticem & normalem ad axem ab extremitate ejus demiſſam æquali.*

Sit Axis Parabolæ ΓE, in quo ſit ΓZ æqualis dimidio lateris recti; & è puncto Z educantur ad Sectionem ABΓ rectæ AZ, BZ, ΘZ, HZ, *quarum* BZ *ſit Axi normalis.* Dico quod ΓZ, quæ ad verticem Sectionis de puncto Z ducitur, minor eſt quâvis aliâ ad Sectionem ABΓ ductâ; eidemque propiores minores ſunt remotioribus: quodque unaquæque earum poteſt ſimul quadratum ipſius ΓZ, una cum quadrato interceptæ inter Verticem Γ & normalem ad axem demiſſam.



Demittantur normales HK, ΘΛ, AE; ac ſit ΓM dimidium Lateris recti, adeoque ΓZ æqualis eſt ipſi ΓM: & (per 11^{mum} primi) duplum rectangulum ſub ΓM, ΓK æquale eſt quadrato ex HK. Sed duplum rectangulum ſub ΓM, ΓK æquale eſt duplo rectangulo ſub ΓZ, ΓK; igitur quadratum ex HK æquale eſt duplo rectangulo ſub ΓZ, ΓK: ac duplum rectangulum ſub ΓZ, ΓK una cum quadrato ex KZ æquale erit quadratis ex HK & KZ ſimul, hoc eſt, quadrato ex HZ. Quoniam vero duplum rectangulum ſub ZΓ, ΓK una cum quadrato ex ZK (*per 7. 11^{di} Elem.*) æquale eſt *quadratis ex* ΓZ, ΓK *ſimul; æqualia erunt quadrata ex* ΓZ, ΓK quadrato ex ZH. Quadratum igitur ex ZH excedit quadratum ex ZΓ quadrato ipſius ΓK. *Ac pari argumento probabitur quadratum ex* ZΘ, *& ex* AZ *excedere quadratum ex* ΓZ *quadratis interceptarum* ΓΛ, ΓE, *reſpectivè. Si vero* BZ *fuerit ordinatim applicata ad Axem* ΓZ, *erit duplum rectangulum* ΓM *in* ΓZ, *hoc eſt, duplum quadratum ex* ΓZ, *æquale quadrato ex* BZ; *adeoque quadratum ex* BZ *excedit quadratum ex* ΓZ *ipſo quadrato ex* ΓZ. Hinc manifeſtum eſt AZ *majorem eſſe quam* BZ, *&* BZ *quam* ΘZ, & ΘZ quam HZ, ac HZ majorem eſſe quam ΓZ; omniumque *Minimam* eſſe ΓZ: rectaſque eidem propiores minores eſſe remotioribus. Patet etiam exceſſum quadrati cujuſcunque alterius ductæ ſupra quadratum *Minimæ*, æqualem eſſe quadrato interceptæ inter normalem ab extremitate ejus ad Axem demiſſam & Sectionis Verticem. Q. E. D.

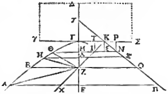
PROPOSITIO V.

SI vero detur in Axe Hyperbolæ punctum, quod à Vertice Sectionis diſtet dimidio Lateris recti; eadem evenient in hoc quæ in Parabolâ: præterquam quod exceſſus quadratorum ductarum ſupra quadratum Minimæ *æquales erunt rectangulis factis ſuper interceptas inter ordinatim applicatas & Sectionis Verticem, ſimilibuſque contento ſub Axe tranſverſo & eodem Axe unâ cum latere ejus recto ſimul, ita ut in ſingulis Axi tranſverſo reſpondeat intercepta inter ordinatim applicatam & Sectionis Verticem.*

Sit ABΓ Hyperbola, cujus Axis ΔΓE; ac fiat ΓZ æqualis dimidio lateris recti: & è puncto Z educantur ad ſectionem rectæ quotcunque ZA, ZB, ZH, ZΘ. Dico quod recta ΓZ minor eſt quavis aliâ de Z ad ſectionem ducendâ; eidemque propior minor eſt remotiore: quodque ductæ cujuſlibet ZA, ZB, ZH, ZΘ quadratum excedit

dit quadratum ex ΓZ rectangulo facto ſuper interceptam inter Verticem Γ & normalem in Axem, ſimili vero rectangulo contento ſub Axe tranſverſo Sectionis ΔΓ & rectâ utriſque Axi & lateri ejus recto ſimul ſumptis æquali.

Fiat ΓZ æqualis lateri recto, cujus dimidium ſit ΓK; ac ſit centrum Sectionis τ: *ductiſque & productis rectis* τK, KZ, *occurrant iis* ordinatim ad Axem ΓE applicatæ, ut ΘMIN, HΛΞ, AXEΠ: & producatur normalis BZ ad O. Ducantur etiam ipſi ΓM parallelæ PN, Kξ, TI. Jam quadratum ex ΘM duplum eſt quadrilateri ΓKMN (per primam hujus) & quadratum ex ZM duplum eſt trianguli ZMI; quia ZM æqualis eſt ipſi MI, ob ΓZ ipſi ΓK æqualem. Eſt igitur quadratum ex ΘZ duplum triangulorum ΓKZ, IKN; quia æquale eſt quadratis ex ΘM & MZ ſimul. Quadratum vero ex ΓZ æquale eſt duplo trianguli ΓKZ, ob æquales ΓZ, ΓK; ut & rectangulum PNIT duplum eſt trianguli IKN. Quocirca quadratum ex ΓZ minus eſt quadrato ex ΘZ rectangulo PNIT. Eſt autem ΔΓ ad ΓZ ut τΓ ad ΓK; & ut τΓ ad ΓK ita Kξ ad ξN. Sed Kξ æqualis eſt ipſi ξI, ob IM, MZ æquales. Ut igitur ΔΓ ad ΓΣ, hoc eſt ut Axis tranſverſus ad Latus rectum, ita ξI ad ξN: & invertendo ut ΓΣ ad ΔΓ ita ξN ad Iξ: dein componendo, erunt ΔΓ, ΓΣ ſimul ſumptæ ad ΔΓ ut IN ad ξI. Verum ξI, TI æquales ſunt; quare TI eſt ad NI ut ΔΓ ad ΔΓ, ΓΣ ſimul. Producatur itaque ΓΣ ad γ, ita ut Γγ æqualis ſit Axi ΔΓ, & erit TI ad IN ſicut ΓΔ ad γΣ. Hæc igitur latera, cum proportionalia ſint & ſub æqualibus angulis, continebunt ſpatia ſimilia, nempe rectangula ſub TI, IN & ſub ΓΔ, γΣ: ac recta TI, quæ ipſi ΓM æqualis eſt, reſpondet lateri ΓΔ. Quocirca rectangulum ſuper ΓM ſactum, quod ſimile ſit rectangulo ſub ΓΔ & ΓΔ una cum latere recto ſimul, erit rectangulum PNIT. Quadratum igitur ex ΘZ excedit quadratum ex ΓZ rectangulo facto ſuper ΓM, ſimili rectangulo contento ſub Axe ΓΔ & utriſque ΓΔ & latere ejus recto ſimul ſumptis. Pari modo demonſtrabitur quadratum ex HZ excedere quadratum ex ΓZ rectangulo facto ſuper ΓΛ, ſimilique deſcripto.



Dico quoque quadratum ex BZ excedere quadratum ex ΓZ rectangulo etiam ſimili prædictis. Quoniam enim quadratum ex BZ æquale eſt duplo quadrilatero ΓKOZ (per primam hujus) ac quadratum ex ΓZ duplum eſt trianguli ΓKZ: ideo quadratum ex BZ excedit quadratum ex ΓZ duplo trianguli ZKO. Manifeſtum autem eſt rectangulum, trianguli ZKO duplum, fieri ſuper rectam ΓZ, ac ſimile eſſe rectangulo modo deſcripto. Quadratum itaque ex BZ excedit quadratum ex ΓZ rectangulo ſuper ΓZ ſacto & rectangulo dicto ſimili. Dico quoque quadratum ex AZ eodem modo ſe habere. Quoniam enim quadratum ex AE duplum eſt quadrilateri ΓKΠE (per primam hujus) & quadratum ex ZE duplum eſt trianguli XZE; igitur quadratum ex AZ duplum eſt triangulorum XKΠ, ΓKZ, ob quadratum ex AZ quadratis ex AE, EZ æquale. Duplum autem trianguli ΓKZ eſt quadratum ex ΓZ; differentia igitur quadratorum ex AZ & ΓZ duplum eſt trianguli XKΠ: unde pari modo demonſtrabitur, rectangulum, trianguli XKΠ duplum, fieri ſuper rectam ΓE, ac ſimile eſſe deſcripto.

Quoniam vero exceſſus quadratorum harum rectarum, quibus ſuperant quadratum ex ΓZ, ſunt rectangula ſuper rectas ΓE, ΓZ, ΓΛ, ΓM facta, quæ proinde perpetuo variantur; & quod ſit ſuper ΓE majus eſt ſacto ſuper ΓZ, & quod ſit ſuper ΓZ majus eo ſuper ΓΛ, & quod ſuper ΓΛ majus facto ſuper ΓM: erit igitur ΓZ omnium ductarum *Minima*: reliquarum vero quæ propiores ſunt eidem minores erunt remotioribus. Poteſt autem omnis recta ſic ducta quadratum *Minimæ*, una cum rectangulo ſuper interceptam inter ordinatim applicatam & Verticem Γ facto, quod ſimile ſit rectangulo contento ſub Axe ΓΔ & utriſque ΓΔ & latere ejus recto ſimul ſumptis. Q. E. D.

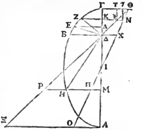
PROPO-

PROPOSITIO VI.

Iiſdem poſitis quæ prius, niſi quod jam Sectio ſit Ellipſis, & Axis ſit Axis major ejus; erit Minima *omnium de puncto dato ductarum, ea quæ æqualis eſt ſemilateri recto;* Maxima *vero reſidua pars Axis; è reliquis vero, quæ propiores* Minimæ *ſunt minores erunt remotioribus ab eâ: Quadratum autem cujuſcunque alterius ductæ excedet quadratum* Minimæ *rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatam & Sectionis Verticem, quod ſimile ſit contento ſub Axe tranſverſo & exceſſu ejuſdem Axis ſupra Latus ejus rectum, ita ut Axis tranſverſus reſpondeat interceptæ inter ordinatim applicatam & Sectionis Verticem.*

Sit ΑΒΓ Ellipſis, & Axis ejus major ΑΓ; ſitque ΓΔ æqualis ſemilateri recto: & è puncto Δ educantur ad Sectionem rectæ ΔΖ, ΔΕ, ΔΒ, ΔΗ. Dico quod ΔΓ Minima eſt è rectis per Δ ducendis; quodque ΔΑ earundem Maxima eſt; quodque eæ quæ minus diſtant à ΔΓ minores ſunt remotioribus ab eâdem: quodque quadratum ex ΔΖ majus eſt quadrato ex ΔΓ, ſpatio æquali rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatam & verticem Γ, ſimili contento ſub Axe ΓΑ & exceſſu ejuſdem ſupra Latus rectum ejus.

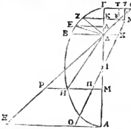
Fiat ΓΘ dimidium Lateris recti, ſitque centrum Ι, & ducantur normales ad Axem ΖΚΝ, ΕΛ, ΒΔΧ: & per punctum Α iiſdem parallela ſit recta ΑΞ, Axique ΓΑ parallelæ duæ ξΤ, Ντ. Jam quadratum ex ΖΚ (per primam hujus) duplum eſt quadrilateri ΓΘΝΚ; quadratum vero ex ΔΚ duplum eſt trianguli ΚΔξ, quia ΚΔ ipſi Κξ æqualis eſt, ob æqualitatem ipſarum ΔΓ, ΓΘ. Quadratum igitur ex ΔΖ duplum eſt triangulorum ΔΓΘ, ΘξΝ. Sed quadratum ex ΔΓ duplum eſt trianguli ΔΓΘ, & rectangulum ξΝΤτ duplum eſt trianguli ξΘΝ: quadratum itaque ex ΔΖ excedit quadratum ex ΔΓ rectangulo ξΝΤτ. Eſt autem ΙΓ ad ΓΔ ſive ΓΘ ſicut ΑΓ ad Latus rectum, & Ντ eſt ad τΘ in eadem ratione; quare Ντ eſt ad τΘ ſicut ΑΓ ad Latus rectum. Sed Ντ ipſi ΘΤ æqualis eſt, unde ΑΓ eſt ad Latus rectum ſicut ΘΤ ad τΘ; ac per converſionem rationis ΓΑ erit ad exceſſum ejus ſupra Latus rectum ut ΘΤ eſt ad Ττ. Sed ΘΤ ipſi ξΤ æqualis eſt, ob æquales ΓΔ, ΓΘ; adeoque Τξ eſt ad Ττ ſive ξΝ ſicut ΑΓ ad exceſſum ejuſdem ſupra Latus rectum: Axi vero ΑΓ reſpondet ipſa Τξ, quæ æqualis eſt interceptæ ΓΚ: rectangulum igitur ξΝΤτ æquale eſt facto ſuper ΚΓ, quod ſimile ſit contento ſub ΑΓ & exceſſu ejuſdem ſupra Latus rectum. Quadratum igitur ex ΔΖ excedit quadratum ex ΔΓ ſpatio æquali rectangulo facto ſuper ΓΚ ſimilique rectangulo dicto. *Eodem modo conſtabit quadratum ex* ΕΔ *excedere quadratum ex* ΔΓ *rectangulo ſimili ſuper interceptam* ΓΛ *facto.*



Dico quoque quadratum ex Δs eodem modo ſe habere. Quadratum enim ex Δs duplum eſt quadrilateri ΓΔΧΘ; quadratum vero ex ΓΔ duplum eſt trianguli ΓΔΘ: igitur differentia inter quadratum ex Δs & ex ΔΓ æquale eſt duplo trianguli ΔΘΧ. Sed rectangulum factum ſuper ΔΓ jam deſcripto ſimile, duplum eſt trianguli ΔΘΧ; quare differentia inter quadrata ex ΒΔ & ΔΓ æqualis eſt rectangulo facto ſuper ΔΓ, quod deſcripto ſimile ſit. Dico etiam quadratum ex ΔΗ majus eſſe quam quadratum ex ΓΔ rectangulo facto ſuper ΜΓ ſimilique præmonſtrato. Eſt enim quadratum ex ΗΜ (per primam hujus) duplum quadrilateri ΜΑΟΠ: quadratum vero ex ΜΔ duplum eſt trianguli ΔΜΡ; quia ΔΜ ipſi ΜΡ æqualis eſt, ob æquales ΔΓ, ΓΘ. Quadratum igitur ex ΔΗ duplum eſt utriuſque, trianguli ΑΙΟ & trapezii ΙΔΡΠ ſimul.

Tri-

Triangulum autem ΑΙΟ æquale eſt triangulo ΙΘΓ, quare quadratum ex ΔΗ duplum eſt trianguli ΓΘΙ & ſpatii ΙΔΡΠ; hoc eſt, duplum triangulorum ΔΓΘ & ΡΘΠ. Sed quadratum ex ΓΔ duplum eſt trianguli ΔΓΘ: igitur differentia quadratorum ex ΔΓ & ΔΗ duplum eſt trianguli ΡΘΠ. Sed rectangulum factum ſuper ΓΜ deſcripto ſimile duplum eſt trianguli ΡΘΠ: quare exceſſus quadrati ex ΔΗ ſupra quadratum ex ΔΓ æqualis eſt rectangulo præmonſtratis ſimili ſuper ΓΜ facto.



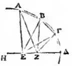
Similiter quadratum ex ΑΔ duplum eſt trianguli ΞΑΔ; triangulum autem ΟΙΑ æquale eſt triangulo ΘΙΓ: igitur quadratum ex ΑΔ duplum eſt triangulorum ΞΘΟ, ΔΓΘ. Sed quadratum ex ΓΔ duplum eſt trianguli ΔΓΘ; differentia igitur quadratorum ex ΑΔ & ΔΓ duplum eſt trianguli ΞΘΟ. Rectangulum autem ſuper ΑΓ factum deſcriptoque ſimile eſt etiam duplum trianguli ΞΘΟ. Quocirca quadratum ex ΑΔ excedit quadratum ex ΔΓ rectangulo contento ſub ΑΓ & exceſſu ejuſdem ſupra latus rectum figuræ. Eſt autem rectangulum factum ſuper ΓΑ majus facto ſuper ΓΜ, & quod ſuper ΓΜ majus facto ſuper ΓΔ, *& quod ſuper* ΓΔ *facto ſuper* ΓΛ, *& quod ſuper* ΓΛ *majus facto ſuper* ΓΚ. Recta igitur ΓΔ *Minima* eſt è rectis per punctum Δ ad Sectionem ductis, & ΔΑ eſt earundem *Maxima*. Quoad cæteras vero, quæ propior eſt Minimæ minor eſt remotiore ab eadem. Exceſſus vero quadrati cujuſcunque earum ſupra quadratum Minimæ rectangulum eſt rectangulo præmonſtrato ſimile. Q. E. D.

PROPOSITIO VII.

SI ſumatur punctum in Minimâ *jam deſcriptâ, in quavis è tribus Sectionibus, à quo ducantur rectæ quælibet ad Sectionem: Earundem* Minima *erit recta jungens punctum illud & Sectionis Verticem. Cæterarum vero ad idem Axis latus ductarum, quæ propior eſt* Minimæ *minor erit remotiore.*

Sit ΑΒΓΔ ſectio Conica, cujus Axis ΔΗ, ac in eo recta *Minima* ΔΕ: inter Δ & Ε capiatur punctum aliquod ut Ζ, à quo ducantur ad Sectionem rectæ quælibet ΖΓ, ΖΒ, ΖΑ. Dico quod ΔΖ earundem Minima eſt, quodque huic propior minor eſt remotiore.

Jungatur enim ΓΕ, quæ proinde major erit quam ΔΕ; unde angulus ΓΔΕ major erit angulo ΔΓΕ; ac angulus ΖΔΓ multo major erit angulo ΔΓΖ; adeoque ΓΖ major erit quam ΖΔ. Pariter quoniam ΒΕ major eſt quam ΓΕ, angulus ΒΓΕ major erit angulo ΓΒΕ, unde & multo major eſt angulus ΒΓΖ angulo ΖΒΓ: quare ΒΖ major eſt quam ΖΓ. Eodemque modo demonſtrabitur ΑΖ majorem eſſe quam ΒΖ. Ipſa igitur ΔΖ Minima eſt rectarum de puncto Ζ ad Sectionem ductarum: è cæteris vero quæ eidem ΔΖ propior eſt minor erit remotiore. Q. E. D.



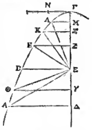
PROPOSITIO VIII.

SI capiatur in Axe Parabolæ punctum, quod à vertice Sectionis plus diſtet dimidio Lateris recti; & à puncto illo verſus Sectionis Verticem ponatur Axis ſegmentum æquale dimidio lateris recti; à cujus extremitate erigatur Axi normalis ad occurſum Sectionis

onis producenda: & ducatur recta jungens punctum hujus occurſus & punctum prius datum. Hæc recta Minima *erit omnium de puncto illo in Axe dato ad ſectionem ducendarum. E reliquis vero quæ ab utrâque parte eidem propior eſt minor erit remotiore. Exceſſus autem quadrati cujuſcunque ductæ ſupra quadratum* Minimæ *æqualis erit quadrato partis interceptæ inter ordinatim applicatas, ab earundem extremitatibus ad Axem demiſſas.*

Sit ABΓ Parabola, cujus Axis ΓΔ; in quo capiatur ΓE major dimidio Lateris recti; ac fiat ZE dimidio lateris recti æqualis, ipſique ΓE normalis ducatur ZH, & jungatur EH. Dico EH Minimam eſſe è rectis per punctum E ad Sectionem ductis: e cæteris vero ad puncta quævis ut A, B, Γ ductis, quæ eidem EH propior eſt minor erit remotiore, ab utroque ejus latere. Eductis etiam è puncto E ad Sectionem rectis EK, EΛ, EA, dico quadratum cujuſcunque earum excedere quadratum ex EH, ſpatio æquali quadrato interceptæ inter ordinatim applicatam & punctum Z.

Ducantur ordinatim applicatæ, ſitque BE Axi normalis, ac fiat ΓN dimidium Lateris recti. Erit igitur (per 11^mam^ primi) duplum rectangulum ſub ΓN, ΓΞ æquale quadrato ex KΞ, eidemque æquale eſt duplum rectangulum ſub EZ, ΓΞ. Duplum autem rectangulum ſub EZ, ZΞ, una cum quadratis ex EZ & ZΞ ſimul, æquale eſt quadrato ex EΞ; quare duplum rectangulum ſub EZ & utrâque ΓΞ, ZΞ ſimul ſumptâ, una cum quadratis ex EZ, ZΞ ſimul, æquale eſt quadratis ex KΞ & ΞE; hoc eſt quadrato ex KE. Sed duplum rectangulum ſub EZ & utraque ΓΞ, ZΞ ſimul duplum eſt rectanguli ſub EZ, ZΓ: Quadratum igitur ex KE æquale eſt duplo rectangulo ſub EZ, ZΓ una cum quadratis ex ZΞ, EZ. Quod autem fit ſub EZ, ZΓ bis, æquale eſt quadrato ex ZH, ob ZE ipſi ΓN æqualem: quare quadrata ex ZH, ZE & ZΞ ſimul ſumpta æqualia ſunt quadrato ex EK. Sed quadrata ex ZH, ZE æquantur quadrato ex EH; unde quadratum ex EK æquale eſt quadratis ex EH, ZΞ; adeoque exceſſus quadrati ex EK ſupra quadratum ex EH æqualis eſt quadrato ex ZΞ. Eodem modo demonſtrabitur quadratum ex EΛ excedere quadratum ex EH quadrato ipſius ZM. Quoniam vero duplum rectanguli ſub ΓZ, ZE æquale eſt quadrato ex ZH, ob ZE ipſi ΓN æqualem: erit etiam exceſſus quadrati ex ΓE ſupra quadratum ex EH æqualis quadrato ex ΓZ. Eſt autem ZΞ minor quam ZM, & ZM quam ZΓ: recta igitur EH minor eſt quavis recta per E ad Sectionem ductâ inter punctum H & Verticem Γ.

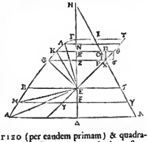


Pariter quadratum ex BE æquale eſt duplo rectangulo ſub ΓN, ΓE; hoc eſt ſub EZ, ΓE bis: quod autem fit ſub ΓZ, ZE bis æquale eſt quadrato ex ZH: quadratum igitur ex BE æquale eſt quadratis ex EH & EZ ſimul ſumptis. Unde quadratum ex BE excedit quadratum ex EH quadrato ipſius EZ. Quinetiam quadratum ex γΘ æquale eſt rectangulo ſub Γγ, ZE bis, ob ZE ipſi ΓN æqualem. Quadratum autem ex γE exceſſus eſt quadratorum ex utraque γZ, ZE ſupra duplum rectangulum ſub γZ, ZE; quapropter rectangulum ΓZ in ZE bis, una cum quadratis ex γZ, ZE ſimul æquantur quadrato ex ΘE. Sed ΓZ in ZE bis una cum quadrato ex ZE, æquale eſt quadrato ex EH: exceſſus igitur quadrati ex ΘE ſupra quadratum ex EH æquale eſt quadrato ex γZ. Simili argumento differentia quadratorum ex AE & EH æqualis erit quadrato ex ΔZ. Eſt autem ΔZ major quam γZ, & γZ quam ZE. Recta igitur EH minor eſt quavis recta per punctum E ad Sectionem ducta; & quæ illi propior eſt minor eſt remotiore: & exceſſus quadrati alterius cujuſvis ſupra quadratum ejus æqualis eſt quadrato interceptæ inter ordinatim applicatam & punctum Z. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

SI capiatur in Axe Hyperbolæ punctum quod diſtet à Vertice Sectionis plus quam dimidio Lateris recti; ac dividatur ea, quæ inter punctum datum & Centrum Sectionis intercipitur, in ſegmenta rationem diametri tranſverſæ ad latus rectum inter ſe habentia, ita ut pars illa quæ centro adjacet reſpondeat diametro tranſverſæ; & ad punctum diviſionis erigatur Axi normalis occurrens Sectioni: Ductâ rectâ jungente punctum occurſûs & punctum in Axe ſumptum, erit hæc rectarum omnium à puncto illo ad Sectionem ductarum Minima. *E cæteris vero ab utroque latere eidem adjacentibus, quæ propior eſt minor erit remotiore. Exceſſus etiam quadrati cujuſcunque ductæ ſupra quadratum* Minimæ *æqualis erit rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatas ab iiſdem demiſſas, ſimili vero contento ſub diametro tranſverſa & utriſque diametro tranſverſâ & Latere recto ſimul ſumptis; ita ut diameter tranſverſa reſpondeat interceptæ.*

Sit ΑΒΓ Hyperbola, cujus Axis ΑΓ centrumque Η; ſitque ΓΕ major dimidio Lateris recti: ac fiat ΗΖ ad ΖΕ ut diameter tranſverſa ad Latus rectum, cadente puncto Ζ inter puncta Γ, Ε. Ad Ζ erigatur normalis ſuper Axem ut ΖΘ, ac jungatur ΘΕ. Dico ΘΕ Minimam eſſe è rectis de puncto Ε ad ſectionem ductis; illique ab utroque latere propiorem minorem eſſe remotiore: Exceſſum etiam quadrati cujuſcunque earum ſupra quadratum Minimæ æquari rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatas, quod ſimile ſit rectangulo contento ſub diametro tranſverſâ & utriſque diametro tranſverſâ & Latere recto ſimul ſumptis; ita ut diameter tranſverſa reſpondeat interceptæ inter ordinatim applicatas.



Fiat ΓΙ dimidium Lateris recti, ac juncta ΗΙ producatur ad δ; ipſique Ηδ occurrat ordinatim applicata ΖΘ producta in Χ: ac jungatur & utrinque producatur ΕΧ. Ducantur etiam normales ΛΝ, ΚΞ, cæteræque ad occurſum ipſarum Ηδ, ΕΧ continuandæ. Jam quoniam ΗΓ eſt ad ΓΙ ut diameter tranſverſa ad Latus rectum, ſive (*per conſtructionem*) ut ΗΖ ad ΖΕ; ac ΗΓ eſt ad ΓΙ ut ΗΖ ad ΖΧ: ΖΧ itaque ipſi ΖΕ æqualis erit. Quadratum autem ex ΖΘ duplum eſt quadrilateri ΓΙΖΧ (per primam hujus) & quadratum ex ΖΕ duplum eſt trianguli ΕΖΧ: quadratum igitur ex ΘΕ duplum eſt quadrilateri ΓΙΕΧ. Pariter quadratum ex ΚΞ duplum eſt plani ΓΙΞΟ (per eandem primam) & quadratum ex ΕΞ duplum eſt trianguli ΕΞθ, adeoque quadratum ex ΕΚ duplum eſt utriuſque, quadrilateri ΓΙΕΧ & trianguli ΟΧθ ſimul ſumpti. Demonſtravimus autem quadratum ex ΘΕ duplum eſſe Trapezii ΓΙΕΧ; exceſſus igitur quadrati ex ΕΚ ſupra quadratum ex ΕΘ duplum eſt trianguli ΟΧθ. Ducantur rectæ ΟΡ, ΧΠ, θσ Axi ΓΔ parallelæ: & erit ut ΗΓ ad ΓΙ ita θΠ ad ΠΟ, ob θΠ ipſi ΧΠ æqualem; adeoque θΠ eſt ad ΠΟ ut diameter tranſverſa ad latus rectum; componendo autem θΠ erit ad θΟ ut diameter tranſverſa ad rectam compoſitam ex diametro tranſverſa & Latere recto. Sed θΠ æqualis eſt ipſi θσ: igitur rectangulum ΡΟθσ ſimile erit contento ſub diametro tranſverſâ & compoſitâ ex utraque, diametro tranſverſâ & latere recto. Rectangulum autem ΡΟθσ duplum eſt trianguli ΟΧθ, quo exceſſu quadratum ex ΕΚ ſuperat quadratum ex ΕΘ: & ΡΟ æqualis eſt interceptæ

Digitized by Google

ceptæ ZΞ. Quapropter differentia inter quadrata ex EΘ & EK æqualis eſt rectangulo facto ſuper ZΞ, ſimilique rectanguln deſcripto, ita ut ZΞ reſpondeat diametro tranſverſæ. Pari mndn demonſtrabitur quadratum ex EΛ excedere quadratum ex EΘ rectangulo facto ſuper ZN, ſimilique prædicto; ita nt diameter tranſverſa interceptæ ZN reſpondeat. Quinctiam quadratum ex ΓE duplum eſt trianguli ΓET, & quadratum ex EΘ duplum eſt quadrilateri ΓEIX; adeoque exceſſus quadrati ex ΓE ſupra quadratum ex EΘ duplum eſt trianguli IXT: quod æquale eſt rectangulo ſuper ΓZ factn & prædeſcripto ſimili. Exceſſus igitur quadrati ex ΓE ſupra quadratum ex EΘ æqualis eſt rectangulo factn ſuper ΓZ ſimilique prædicto. Sed ZΞ minnr eſt quam ZN, & ZN quam ZΓ; adeoque recta EΘ minnr eſt quam EK, & EK minor eſt quam EΛ, & EΛ quam EΓ. Recta igitur EΘ minnr eſt quavis rectà per punctum E inter Θ & Verticem Γ ad Sectionem ductà.

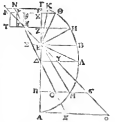
Verum etiam quadratum ex BE æquale eſt duplo quadrilateri ΓEIϒ, unde exceſſus quadrati ex EB ſupra quadratum ex EΘ erit duplum trianguli EXϒ: duplum autem hujus trianguli rectangulum eſt ſuper ZE factum, ſiuuleque rectangulo jam dicto. Eſt quoque quadratum ex Mξ (per primam hujus) duplum quadrilateri ΓIξγ, & qnadratum ex Eξ duplum trianguli Eξϒ: quadratum igitur ex ME duplum eſt trianguli ϒXγ & quadrilateri ΓEIX ſimul ſumpti. Sed demonſtratum eſt quadratum ex ΘE duplum eſſe quadrilateri ΓEIX: quocirca rectangulum ſuper Zξ factum & prædicto ſimile, cum ſcilicet duplum ſit trianguli ϒXγ, exceſſus eſt quo quadratum ex EM ſuperat quadratum ex EΘ. Pari nndo conſtabit quadratum ex EΛ excedere quadratum ex ΘE rectangulo ſuper ZΔ facto prædictiſque ſimili. Jam EZ minor eſt quam Zξ, & Zξ quam ZΔ: quare ΘE minnr eſt quam EB, & EB quam EM, & EM quam EΛ. Eſt igitur recta EΘ Minima omnium per punctum E ad Sectinnem ductarum; & quæ ab ntraque parte ipſi ΘE propior eſt minor eſt remotiore: & exceſſus quadrati cujuſcunque earum ſupra qnadratum ipſius ΘE æqualis eſt rectangulo facto ſnper interceptam inter ordinatim applicatas & præmonſtrato rectangulo ſimili. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

SI ſumatur in Axe majore Ellipſeos punctum quod diſtet à Vertice Sectionis pluſquam dimidio lateris recti; ac dividatur intercepta inter Verticem Sectionis & punctum illud, ita ut ſegmentum, quod interjacet Sectionis centrum & punctum diviſionis, ſit ad diſtantiam ejuſdem puncti ab illo in Axe prius ſumpto in ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum; & à puncto diviſionis erigatur Axi normalis Sectioni occurrens; & ab occurſu ducatur recta ad punctum in Axe ſumptum: erit hæc Minima *è rectis quæ per punctum illud ad Sectionem duci poterunt; & è cæteris quæ eidem propior eſt minor erit remotiore: exceſſus autem quadrati cujuſlibet earum ſupra quadratum* Minimæ *æqualis erit rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatas ab iiſdem demiſſas, ſimili vero contento ſub diametro tranſverſa & exceſſu diametri tranſverſæ ſupra latus rectum.*

Sit ABΓ Ellipſis cujus Axis major AΓ, & centrum Δ; ac ſit EΓ major dimidin lateris recti, & fiat ΔZ ad ZE nt AΓ ad Latus rectum. Ad punctum Z erigatur normalis ZH quæ producatur, ac jungatur EH. Dico EH Minimam eſſe è rectis ad Sectionem per pnnctum E ducendis; eidemque propiorem minnrem eſſe remotiore ab eadem: exceſſum etiam, quo quadratum alterius cujuſcuuque ductæ ſuperat quadratum ejus, æqualem eſſe rectanguln facto ſnper interceptam inter punctum Z & ordinatim applicatam, quod ſimile ſit coutento ſub Axe AΓ & exceſſu quo Axis ille ſnperat latus rectum, ita ut Axi AΓ reſpondeat intercepta inter ordinatam & punctum Z.

Ducantur normales ut in Schemate; ſitque ΑΕ ad angulos rectos ipſi ΑΓ; ac fiat ΓΝ dimidium Lateris recti: jungaturque ΝΔ, quæ occurrat ipſi ΗΖ productæ in ξ; ductaque recta Εξ producatur utrinque. Quoniam vero ΔΓ eſt ad ΓΝ ut diameter tranſverſa ad Latus rectum: ac ΔΖ eſt ad ΖΕ in eadem ratione diametri tranſverſæ ad Latus rectum: erit igitur ΔΖ ad ΖΕ ut ΔΓ ad ΓΝ, hoc eſt, ut ΔΖ ad Ζξ: quare eadem eſt ratio ΔΖ ad ΖΕ ac ad Ζξ, adeoque ipſæ ΖΕ, Ζξ ſunt æquales. Ducantur etiam Axi ΑΓ parallelæ ξθ, γτ, Τδ. Jam quadratum ex ΖΕ duplum eſt trianguli ΖΕξ, ac quadratum ex ΖΗ (per primam hujus) duplum eſt quadrilateri ΓΝΖξ; quadratum itaque ex ΕΗ duplum eſt Trapezii ΓΝΕξ. Quadratum quoque ex ΘΧ (per eandem) duplum eſt quadrilateri ΓΝΧγ; & quadratum ex ΕΧ duplum eſt trianguli ΧδΕ; unde quadratum ex ΘΕ duplum eſt Trapezii ΓΝΕξ & trianguli γξδ ſimul ſumpti. Sed quadratum ex ΕΗ duplum eſt Trapezii ΓΝΕξ: excedit igitur quadratum ex ΕΘ illud ex ΕΗ duplo trianguli γξδ. Duplum autem hujus trianguli æquale eſt rectangulo ſub Τδ, δγ. Cum vero ΔΖ eſt ad Ζξ ut ξθ ad θγ; ac ΕΖ æqualis eſt ipſi Ζξ unde recta θξ æqualis eſt ipſi θδ: ξθ erit ad θγ ut ΔΓ ad ΓΝ, id eſt, θδ erit ad θγ ut ΔΓ ad ΓΝ. Sed ΔΓ eſt ad ΓΝ ut axis tranſverſus ad latus rectum: igitur θδ eſt ad θγ ut axis tranſverſus ad latus rectum, ac per converſionem rationis θδ erit ad δγ ut axis tranſverſus ad exceſſum ejuſdem ſupra latus rectum. Eſt autem θδ ipſi Τδ æqualis; quare rectangulum ſub Τδ, δγ ſimile erit rectangulo ſub axe tranſverſo & exceſſu ejuſdem ſupra latus rectum. Ac Τδ æqualis eſt ipſi ΖΧ, adeoque differentia quadratorum ex ΕΘ & ΕΗ æqualis eſt rectangulo ſuper ΖΧ facto, quod ſimile ſit rectangulo jam deſcripto, ita ut ΖΧ Axi tranſverſo reſpondeat. Pari modo demonſtrabitur, differentiam inter quadrata ex ΕΚ & ΕΗ æqualem eſſe rectangulo facto ſuper ΖΡ ſimilique prædicto: ſimiliterque quadratum ex ΕΓ excedere quadratum ex ΕΗ rectangulo ſuper ΖΓ facto, eiſdemque ſimili. Recta autem ΖΧ minor eſt quam ΖΡ, & ΖΡ quam ΖΓ; quare recta ΕΗ minor eſt quam ΕΘ, & ΕΘ quam ΕΚ, & ΕΚ quam ΕΓ.



Porro quadratum ex ΒΕ (per primam hujus) duplum eſt Trapezii ΓΝΕΣ. Oſtendimus autem quadratum ex ΕΗ duplum eſt Trapezii ΓΝΕξ; quare exceſſus, quo quadratum ex ΒΕ ſuperat quadratum ex ΕΗ, duplum eſt trianguli ΕξΣ, quod æquale eſt rectangulo facto ſuper ΕΖ ſimilique deſcripto, ut ex nuper allatis conſtabit.

Quadratum quoque ex ΔΛ (per ſecundam hujus) duplum eſt trianguli ΓΔΝ, & quadratum ex ΔΕ duplum eſt trianguli ΔΕΥ; quadratum igitur ex ΛΕ duplum eſt trianguli ΔΥξ & Trapezii ΓΝΕξ ſimul ſumpti: excedit igitur quadratum ex ΛΕ quadratum ex ΕΗ duplo trianguli ΔΥξ: hujus autem trianguli duplum rectangulum eſt factum ſuper ΔΖ deſcripto ſimile. Quinetiam quadratum ex ΜΠ (per tertiam hujus) duplum eſt quadrilateri ΞΟΠΑ, & quadratum ex ΠΕ duplum eſt trianguli ΠΕσ; quapropter quadratum ex ΜΕ duplum eſt trianguli ΞΔΑ & quadrilateri ΕΔΟσ ſimul ſumpti. Sed triangulum ΞΔΑ æquale eſt triangulo ΓΔΝ: quare quadratum ex ΜΕ duplum eſt Trapezii ΓΝΕξ & trianguli Οξσ ſimul ſumpti. Hujus igitur trianguli duplum exceſſus eſt quo quadratum ex ΜΕ excedit quadratum ex ΕΗ. Duplum autem trianguli Οξσ rectangulum eſt ſuper ΖΠ factum, ſimileque rectangulo deſcripto. Denique quadratum ex ΑΕ duplum eſt trianguli οξΞ & Trapezii ΓΝΕξ ſimul ſumpti; exceſſus itaque quadrati ex ΑΕ ſupra quadratum ex ΕΗ duplum eſt trianguli οξΞ; cujus trianguli duplum æquale eſt rectangulo ſuper ΖΑ formato ſimilique deſcripto. Jam vero ΕΖ minor eſt quam ΔΖ, ac ΔΖ minor quam ΠΖ, ac ΠΖ quam ΑΖ: quocirca ΒΕ minor eſt quam ΕΛ, ac ΕΛ quam ΕΜ, & ΕΜ quam ΕΑ. Recta igitur ΕΗ minima eſt è rectis per punctum Ε ad Sectionem ΑΒΓ ducendis. Reliquarum vero quæ eidem ab utroque latere propior eſt minor eſt remotiore, & exceſſus quadratorum earundem ſupra quadratum ex ΕΗ

æquales

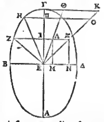
æquales ſunt rectangulis ſuper interceptas inter ordinatim applicatas factis, deſcriptoque ſimilibus. Q. E. D.

PROPOSITIO XI.

MInima *rectarum de centro Ellipſeos ad Sectionem ductarum dimidium eſt Axis minoris*; Maxima *vero dimidium eſt axis majoris*; Maximæque *propior major eſt remotiore. Exceſſus autem quadrati cujuſcunque ductæ ſupra quadratum* Minimæ *æqualis eſt rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatam & Sectionis centrum, ſimili vero contento ſub diametro tranſverſá & exceſſu ejuſdem ſupra latus rectum.*

Sit ΑΒΓ Ellipſis, cujus axis major ΑΓ, & minor ΒΔ; centrumque Ε. Dico quod *Maxima* è rectis per centrum Ε ad Sectionem ductis eſt ipſa ΕΓ, *Minima* vero eſt ΕΒ; quodque recta quæcunque ipſi ΕΓ propior major eſt remotiore ab eadem: quodque exceſſus quadrati cujuſcunque earum ſupra quadratum ex ΒΕ æqualis eſt rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatam & centrum Ε in axe ΑΓ ſumendam, quod vero ſimile ſit rectangulo contento ſub ΑΓ & exceſſu ejuſdem ſupra latus rectum ejus.

Ducantur enim ΕΖ, ΕΗ, & demittantur normales ΖΙ, ΗΠ; ac fiat ΓΘ dimidium lateris recti; erit igitur ΓΘ minor quam ΓΕ. Sit ΓΚ ipſi ΓΕ æqualis, & jungantur ΘΕ, ΕΚ, ac producantur ΗΠ, ΖΙ ad Ο, Ξ: ducantur etiam ΜΛ, ΝΞ axi ΑΓ parallelæ. Erit igitur ΕΓ ad ΓΚ ut ΕΙ ad ΙΞ. Sed ΕΓ æqualis eſt ipſi ΓΚ, quare ΕΙ & ΞΙ æquantur. Quadratum autem ex ΙΖ (per primam hujus) duplum eſt quadrilateri ΓΘΙΛ: quadratum vero ex ΙΕ duplum eſt trianguli ΕΙΞ: quadratum igitur ex ΖΕ duplum eſt triangulorum ΕΓΘ, ΕΛΞ ſimul ſumptorum. Sed quadratum ex ΕΒ (per ſecundam hujus) duplum eſt trianguli ΕΓΘ; ac duplum trianguli ΕΛΞ rectangulum eſt ΛΞΜΝ; quadratum igitur ex ΕΖ excedit quadratum ex ΕΒ rectangulo ΛΝ. Verum ratio ΚΓ ad ΓΘ eadem eſt ac tranſverſi axis ad Latus rectum, eademque eſt ratio ΞΙ ad ΙΛ; unde per converſionem rationis, ΞΙ erit ad ΞΛ ut diameter tranſverſa ad exceſſum ejuſdem ſupra latus rectum. æquales autem ſunt ΞΙ, ΞΝ; rectangulum itaque ſub ΛΞ, ΞΝ ſimile eſt rectangulo contento ſub diametro tranſversâ & exceſſu ejuſdem ſupra latus rectum. Sed ΕΙ ipſi ΛΜ æqualis eſt, quare differentia inter quadrata ex ΕΖ & ΕΒ æqualis eſt rectangulo facto ſuper ΕΙ quod prædicto ſimile eſt. Eodem modo demonſtrabitur exceſſum quadrati ex ΕΗ ſupra quadratum ex ΕΒ æquari rectangulo ſuper ΕΠ formato ac jam deſcripto ſimili.



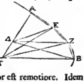
Pari argumento quadratum ex ΕΓ duplum eſt trianguli ΓΕΚ, & quadratum ex ΒΕ duplum eſt trianguli ΓΕΘ; differentia igitur quadratorum ex ΓΕ & ΕΒ duplum eſt trianguli ΘΕΚ. Hujus vero trianguli duplum æquale eſt rectangulo facto ſuper ΓΕ ſimilique deſcripto. Jam ΓΕ major eſt quam ΕΠ, & ΕΠ major quam ΕΙ, adeoque ΕΓ major eſt quam ΕΗ, & ΕΗ major quam ΕΖ, & ΕΖ quam ΕΒ. *Maxima* igitur è rectis per punctum Ε ductis eſt ΕΓ, *Minima* vero ΕΒ; è cæteris vero, inter ipſas ΕΓ, ΕΒ ductis, quæ propius diſtat ab ΕΓ major eſt remotiore: & exceſſus quadrati cujuſcunque ductæ ſupra quadratum ex ΕΒ æqualis eſt rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim ad axem ΑΓ applicatam & centrum Sectionis, ſimili vero rectangulo prædicto. Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

S*I ſumatur punctum quodlibet in rectâ aliquâ* Minimâ *ab Axe Sectionis ad Curvam ductâ, juxta jam demonſtrata; à quo ducantur rectæ ad Sectionem ab uno ejus latere: earundem* Minima *erit pars illa hujus* Minimæ *quæ adjacet Sectioni, eidemque propior minor erit remotiore.*

Sit ΑΒ Sectio quævis Cooica, cujus Axis ΒΓ; ſitque ΓΑ Minima aliqua ad Sectionem ducta: ac ſomatur in ea punctum Δ ioter ipſa Γ, Α ſitum. Dico rectam ΔΑ Minimam eſſe è rectis ad hanc Sectionis partem de puncto Δ ducendis.

Ducantur enim ΔΕ, ΔΖ, ΔΒ, ac jungaotur ΖΓ, ΓΕ, ut & rectæ ΑΕ, ΕΖ, ΖΒ. Jam ΕΓ major eſt quam ΓΑ, quare angulus ΓΑΕ major eſt aogulo ΓΕΑ. Angulus vero ΓΕΑ major eſt angulo ΔΕΑ, adeoque angulus ΕΑΔ multo major erit angulo ΑΕΔ, ac proinde ΕΔ major erit qoam ΔΑ. Pariter cum ΖΓ major eſt quam ΓΕ, erit angulus ΖΕΓ major angulo ΓΖΕ; unde angulus ΔΕΖ multo major erit quam ΕΖΔ: ΖΔ igitur major erit quam ΔΕ. Ac eodem modo demonſtrabitur ΔΒ majorem eſſe quam ΔΖ. Eſt itaque ΑΔ Mioima rectarum ad hanc partem Sectionis ductarum, eidemque propior minor eſt remotiore. Idem quoque conſtabit de rectis ad alteram Sectioois partem ductis. Q. E. D.

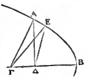


PROPOSITIO XIII.

S*I à quovis puncto in Axe Parabolæ ducatur ad Sectionem recta* Minima *quæ contineat cum Axe angulum; erit angulus ille acutus: Demiſsâque ab extremitate ejus normali ad Axem, abſcindet illa Segmentum ejus æquale dimidio Lateris recti.*

Sit ΑΒ Parabola, cujos Axis ΒΓ; ſitqoe Minima ad Parabolam ducta ΑΓ; Dico quod angnlus ad Γ eſt acntus, quodque oormalis ab Α ad ΒΓ demiſſa abſcindit ab ea rectam æqualem dimidio lateris recti.

Quoniam recta ΑΓ Minima eſt, ΒΓ major erit dimidio lateris recti. Nam ſi non major fuerit eâ, vel æqualis erit ei vel minor eâ. quod ſi æqualis fuerit dimidio lateris recti, erit ipſa ΒΓ (per 4^{am} hujus) Minima; vel etiam ſi ΒΓ minor fuerit dimidio lateris recti, erit quoque (per 7^{am} hujus) Minima: adeoque ΒΓ minor eſſet quam ΓΑ, qnod eſt contra Hypotheſin. qnare ΒΓ non eſt minor dimidio lateris recti, neqne etiam æqoalis ei, ergo major eſt eâ. Sit itaque ΓΔ æqualis dimidio lateris recti. Dico Aai oormalem è puncto Δ erectam tranſire per Α. Nam ſi aliter fuerit, ſit oormalis illa recta ΔΕ; & ΓΕ (per octavam hojus) *Minima* erit è rectis de poocto Γ ad Sectionem ducendis: hoc antem abſurdum eſt, nam ΑΓ minor eſt eâ. Igitor perpendicularis ad punctum Δ erecta tranſibit per Α, ae ΔΓ dimidiom erit lateris recti: erit quoqne angulus ΑΓΒ acutus, ob angulum ΒΔΑ rectum Q. E. D.



PROPOSITIO XIV.

S*I ducatur à puncto in Axe Hyperbolæ recta* Minima, *quæ contineat cum Axe angulos deinceps: erit angulus ille, qui reſpicit Verticem Sectionis, acutus. Ac ſi ab extremitate* Minimæ *ducatur normalis ad Axem, dividet illa interceptam inter centrum Sectionis*

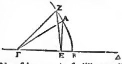
&

Digitized by Google

& punctum unde educitur Minima *in Segmenta, quorum quod adjacet centro erit ad alterum in ratione diametri tranſverſæ ad Latus rectum.*

Sit A B Hyperbola, cujus Axis B Γ; ſitque A Γ Minima de puncto Γ educta, ac ſit centrum Δ. Dico angulum A Γ B acutum eſſe, ac normalem de puncto A ad axem B Γ demiſſam dividere ipſam Γ Δ in ratione axis tranſverſi ad Latus rectum.

Eſt enim recta B Γ (ut conſtat ex quinto hujus) major dimidio lateris recti, & recta B Δ dimidium eſt lateris tranſverſi; ratio itaque Δ B ad B Γ, minor eſt ratione lateris tranſverſi ad latus rectum. Dividatur Δ Γ in puncto E, ita ut ſegmenta ſint in ratione lateris tranſverſi ad latus rectum: Dico normalem ſuper ipſam Δ Γ ad punctum E erectam tranſire per punctum A. Nam ſi hoc non ita ſit, illi normalis ſit E Z, ac jungatur Γ Z. Erit itaque Γ Z (per nonam hujus) Minima rectarum quæ duci poſſint per punctum Γ. Hoc autem abſurdum eſt: poſuimus enim A Γ Minimam eſſe. Tranſit igitur normalis è puncto E excitata per punctum Sectionis A; & angulus A Γ B acutus eſt: ac normalis de puncto A demiſſa dividit rectam Γ Δ, ita ut ſegmentum Δ E ſit ad E Γ in ratione lateris tranſverſi ad latus rectum Q. E. D.

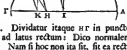


PROPOSITIO XV.

E*Ductâ de puncto dato in Axe majore Ellipſeos rectâ aliquâ* Minima, *ſi hæc* Minima *tranſeat per Centrum Sectionis, normalis erit ſuper Axem majorem. Si vero tranſeat per aliud punctum, continebit cum Axe majore angulum obtuſum verſus centrum: & normalis ab extremitate* Minimæ *cadet inter punctum unde educta eſt & Sectionis Verticem: ita ut intercepta inter normalem & centrum ſit ad interceptam inter eandem normalem & punctum illud, in ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum.*

Sit A B Γ Ellipſis, cujus Axis major A Γ & centrum I: educatur primum è puncto I ad Sectionem recta Minima I B. Dico rectam I B normalem eſſe ſuper ipſam A Γ. Nam ſi non ita ſit, ſit I Δ normalis ſuper A Γ; adeoque (per 11^{mam} hujus) I Δ foret minima recta de puncto I ducenda, contra Hypotheſin; poſuimus enim I B Minimam eſſe. Recta igitur I B normalis eſt ſuper A Γ.

Porro ſi capiatur punctum aliud in Axe ut H, ac ſit H Z Minima ab eodem H ducta: Dico angulum Z H I obtuſum eſſe; ac ſi normalis de puncto Z ad A Γ demittatur, interceptam inter ordinatim applicatam & punctum I eſſe ad interceptam inter eandem ordinatam & punctum H, in ratione lateris tranſverſi ad latus rectum.



Quoniam enim Z H Minima eſt de puncto H ducta, erit H Γ (per ſeptimam hujus) major dimidio lateris recti; ac recta Γ I dimidium eſt lateris tranſverſi: quare ratio I Γ ad H Γ minor erit ratione lateris tranſverſi ad latus rectum. Dividatur itaque H Γ in puncto K, ita ut I K ſit ad K H ut latus tranſverſum ad latus rectum: Dico normalem è puncto K occurrere Sectioni in puncto Z. Nam ſi hoc non ita ſit, ſit ea recta K Λ, ac proinde H Λ (per decimam hujus) minima erit è rectis per punctum H ducendis. Eſt autem H Z recta illa Minima: quod abſurdum. Occurrit igitur normalis è puncto K Sectioni ad punctum Z, & angulus I H Z obtuſus eſt; ac demiſsâ de puncto Z ſuper Axem A Γ normali Z K, I K erit ad K H ſicut latus tranſverſum ad latus rectum. Q. E. D.

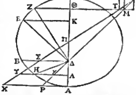
Digitized by Google

PROPOSITIO XVI.

SI capiatur in Axe minore Ellipſeos punctum, quod à Vertice ejuſdem Axis diſtet intervallo dimidio Lateris recti ejus æquali; erit omnium rectarum ab eodem puncto ad Sectionem ductarum Maxima, *ſegmentum Axis minoris æquale dimidio lateris recti:* Minima *vero reſiduum erit ejuſdem Axis. E cæteris vero, quæ propior eſt* Maximæ *major erit remotiore; & exceſſus quadrati ejus ſupra quadrata quarumcunque aliarum ductarum, æquales erunt rectangulis factis ſuper interceptas inter ordinatim applicatas & Verticem Axis minoris, ſimilibus vero contentis ſub Axe minore & exceſſu lateris recti ejus ſupra Axem illum.*

Sit ΑΒΓ Ellipſis, cujus Axis minor ΑΓ, centrumque Π: & in Axe capiatur punctum Δ, ita ut ΓΔ æqualis ſit dimidio lateris recti. Dico quod ΔΓ major eſt quâvis aliâ rectâ ad Sectionem de puncto Δ ductâ; quodque ΔΑ Minima eſt earundem: quodque propiores ipſi ΔΓ majores ſunt remotioribus: quodque quadratum ex ΓΔ excedit quadratum ex alia quacunque, rectangulo quod fit ſuper interceptam inter ordinatim applicatam ejus & punctum Γ, ſimili vero rectangulo nuper deſcripto.

Ducantur enim ΔΖ, ΔΕ, ΔΒ, ΔΗ: ſitque ΔΒ normalis ad ΑΓ; ac fiat ΓΞ dimidium lateris recti: & jungantur & producantur ipſæ ΞΠ, ΞΔ: demittantur etiam normales ΖΘ, ΕΚ, ΗΛ, quibus parallela ſit recta ΑΧ. *Occurrat producta* ΖΘ *ipſis* ΞΠ, ΞΔ *in punctis* Τ, Μ, ac Axi ΑΓ parallelæ ducantur Μξ, Τυ. Quoniam autem ΓΔ æquale eſt ipſi ΓΞ, quadratum ex ΓΔ duplum eſt trianguli ΓΔΞ: & quadratum ex ΘΔ duplum eſt trianguli ΘΔΜ; ac quadratum ex ΘΖ (per primam hujus) duplum eſt Trapezii ΓΞΘΤ: quadratum igitur ex ΓΔ excedit quadratum ex ΔΖ duplo trianguli ΤΜΞ: duplum vero hujus trianguli rectangulum eſt ΤΜυξ. Jam ΓΠ eſt ad ΠΔ ut diameter tranſverſa ad exceſſum lateris recti ſupra eandem (dimidium enim diametri tranſverſæ eſt ad dimidium lateris recti ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum) ac in eadem eſt ratione Τυ ad υξ ſive υΤ ad ΤΜ: quare υΤ eſt ad ΤΜ ut diameter tranſverſa ad exceſſum lateris recti ſupra tranſverſam. Sed Τυ æqualis eſt ipſi ΓΘ; differunt igitur quadrata ex ΓΔ, ΖΔ ſpatio æquali rectangulo facto ſuper ΓΘ, & ſimili rectangulo deſcripto. Pari argumento probabitur exceſſum quadrati ex ΓΔ ſupra quadratum ex ΔΕ æquari rectangulo facto ſuper ΓΚ, quod ſimile ſit deſcripto. Quinetiam quadratum ex ΒΔ (per tertiam hujus) duplum eſt quadrilateri ΑΔΣΧ, & quadratum ex ΔΓ duplum eſt trianguli ΔΓΞ; cumque triangulum ΑΠΧ æquale eſt triangulo ΓΠΞ, erit differentia quadratorum ex ΓΔ, ΒΔ, dupla trianguli ΔΣΞ. duplum autem hujus trianguli æquale eſt rectangulo facto ſuper ΓΔ, ſimilique rectangulo jam deſcripto. Eſt igitur ΓΔ major quam ΔΖ, & ΔΖ quam ΔΕ, & ΔΕ quam ΔΒ.



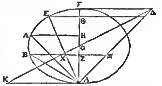
Inſuper quadratum ex ΛΗ (per eandem tertiam) duplum eſt quadrilateri ΑΛΥΧ, & quadratum ex ΛΔ duplum eſt trianguli ΔγΛ; quare quadratum ex ΔΗ æquale eſt duplo ſpatio ΑΛΥΧ, una cum duplo triangulo ΔγΛ: Quadratum autem ex ΓΔ duplum eſt trianguli ΓΞΔ, & triangulum ΓΣΠ æquale eſt triangulo ΑΧΠ. Differunt igitur quadrata ex, ΓΔ, ΔΗ duplo trianguli ΞΥγ, cujus trianguli duplum æquale eſt rectangulo facto ſuper ΓΛ ſimilique prædicto. Denique quadratum ex ΔΑ duplum eſt trianguli ΔΑΡ, & triangulum ΓΠΞ æquale eſt triangulo ΠΧΑ; differunt igitur quadrata ex ΔΓ, ΔΑ, duplo trianguli ΞΧΡ; hujus autem trianguli duplum

duplum æquale eſt rectangulo ſuper ΑΓ facto, ſimilique deſcripto. Quapropter ΔΓ Maxima eſt è rectis ad Sectionem de puncto Δ ducendis; ΑΔ vero earundem Minima eſt. E reliquis autem quæ propior eſt ipſi ΓΔ major eſt remotiore, & exceſſus quadrati ipſius ΓΔ ſupra quadratum alterius cujuſvis ductæ, æqualis eſt rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatam & Verticem Γ, quod ſimile ſit deſcripto. Q. E. D.

PROPOSITIO XVII.

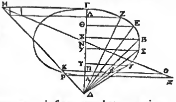
SIT jam ΑΓ Axis minor Ellipſeos, eique æquale ſit dimidium lateris recti, ac ſit centrum Ο. Dico quoque quod ΑΓ *Maxima* eſt è rectis de puncto Α ad Sectionem ductis; quodque eidem propior major eſt remotiore: quodque exceſſus quadrati ejus ſupra quadratum cujuſvis alterius ductæ, æqualis eſt rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatam & Verticem Γ, quod ſimile ſit rectangulo in præcedente Propoſitione deſcripto

Ordinetur hæc propoſitio ad modum præcedentis; eodemque omnino modo probabitur quadratum ex ΑΓ majus eſſe quadrato ex ΑΕ rectangulo facto ſuper ΓΘ deſcriptoque ſimili: pariterque quadratum ex ΑΓ majus eſſe quadrato ex ΑΛ rectangulo facto ſuper ΓΗ, ſimilique rectangulo prædicto. Quinetiam quadratum ex ΒΖ (per tertiam hujus) duplum eſt plani ΑΖΧΚ, & quadratum ex ΖΑ duplum eſt trianguli ΑΖΞ, ut quadratum ex ΑΓ duplum eſt trianguli ΑΓΔ, ob ΑΓ ipſi ΓΔ æqualem. Triangulum vero ΓΟΔ æquale eſt triangulo ΚΟΑ: differentia igitur quadratorum ex ΑΓ & ΑΒ æqualis eſt duplo triangulo ΔΧΞ; duplum autem hujus trianguli æquale eſt rectangulo facto ſuper ΓΖ ſimilique deſcripto: quod quidem eodem omnino modo demonſtratur ac præcedentia. Recta igitur ΑΓ major eſt quam ΑΕ, & ΔΕ quam ΑΛ, & ΑΛ quam ΑΒ. Proinde ΑΓ maxima eſt inter eductas de puncto Δ: quæque eidem propior eſt major eſt remotiore: & exceſſus quadrati ipſius ΑΓ ſupra quadratum alicujus alterius ductæ, æqualis eſt rectangulo facto ſuper interceptam inter ordinatim applicatam & Verticem Γ, quod ſimile ſit rectangulo *contento ſub Axe minori & exceſſu quo latus rectum ſuperat eundem Axem.* Q. E. D.



PROPOSITIO XVIII.

SI vero fuerit ΑΓ Axis minor Ellipſeos, cujus centrum Ν: ac fiat ΓΔ æqualis dimidio lateris recti. Dico ΓΔ *Maximam* eſſe è rectis de puncto Δ ad Sectionem ducendis, ΔΑ vero earundem *Minimam*: propiorem autem ipſi ΓΔ, è rectis Sectionem ſecantibus, majorem eſſe remotiore: ex iis vero quæ extrinſecus Sectioni occurrunt, propiorem ipſi ΑΔ minorem eſſe remotiore: & exceſſum quadrati ipſius ΓΔ ſupra quadratum cujuſvis alterius ductæ, æqualem eſſe rectangulo facto ſuper interceptam inter punctum Γ & ordinatim applicatam, quod ſimile ſit prædicto, nempe rectangulo ſub Axe minore & exceſſu lateris ejus recti ſupra eundem Axem.

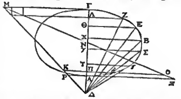


Ducantur rectæ ΔΖ, ΔΕ, ΔΒ, cæteræque ut in figura præcedente: ac pari argumento patebit quadratum ex ΓΔ, majus eſſe quadrato ex ΖΔ rectangulo facto ſuper ΓΔ ſimilique prædicto; & quadratum ex ΓΔ majus eſſe quadrato ex ΕΔ,

rectangulo priori ſimili, facto ſuper interceptam ΓΘ; quadratumque ex ΓΔ majus eſſe quadrato ex ϛΔ rectangulo ejuſdem ſpeciei ſuper ipſam ΓX formato.

Quadratum autem ex ΛΔ, duplum eſt trianguli ΛΔP, ob ΓM, ΓΔ æquales; quadratum etiam ex ΓΔ duplum eſt trianguli ΔΓM: cumque triangulum MΓN æquale eſt triangulo ΛNΞ, erit igitur exceſſus quadrati ex ΓΔ ſupra quadratum ex ΛΔ æqualis duplo triangulo ΞMP, cujus trianguli duplum æquale eſt rectangulo facto ſuper ΛΓ ejuſdem ſpeciei cum prædicto. Quare ΔΓ major eſt quam ΔZ, & ΔZ quam ΔE, & ΔE quam ΔB, & ΔB quam ΔA.

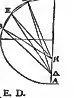
Quinetiam quadratum ex Πξ (per tertiam hujus) duplum eſt quadrilateri ΞOΠΛ, & quadratum ex ΔΠ duplum eſt trianguli ΔΠK; quare quadratum ex ξΔ duplum eſt utriuſque, Trapezii ΞOΠΛ & trianguli ΠΔK ſimul ſumpti. Quadratum autem ex ΓΔ duplum eſt trianguli ΓMΔ, & triangulum ΓMN triangulo ΛNΞ æquale eſt. quadratum igitur ex ξΔ æquale eſt duplo triangulo OMK, hoc eſt, rectangulo facto ſuper ΓΠ, ejuſdem ſpeciei cum jam deſcriptis in præcedentibus duabus propoſitionibus. Pari argumento demonſtratur quadratum ex ΓΔ, excedere quadratum ex Δϒ, rectangulo ſimili ſuper ΓT facto. Nec aliter conſtabit quadratum ex ΓΔ majus eſſe quadrato ex ΔΣ, rectangulo ejuſdem ſpeciei ſuper Γγ formato. Eſt autem exceſſus quadrati ex ΔΓ ſupra quadratum ex ΔA æqualis rectangulo deſcripto ſimili, ſuper ΓA facto; quare ΔA minor eſt quam Δξ, & Δξ quam Δϒ, & Δϒ quam ΔΣ. Eſt igitur ΔΓ Maxima è ductis per punctum Δ, earundem vero minima eſt ΔA; & inter eas quæ Sectionem interſecant, quæ propior eſt ipſi ΔΓ major eſt remotiore: ex iis vero quæ Sectioni extrinſecus occurrunt, quæ ipſi ΔA propiores ſunt minores ſunt remotioribus. Quadratum etiam ex ΓΔ excedit quadratum cujuſvis alterius ductæ, rectangulo facto ſuper interceptam inter punctum Γ & ordinatim applicatam, quod ſimile ſit deſcripto. Q. E. D.



PROPOSITIO XIX.

SI capiatur in Axe minore Ellipſeos punctum, quod à Vertice Sectionis majori intervallo diſtet quam dimidio Lateris recti: erit illa Maxima *rectarum de puncto illo ad Sectionem ducendarum, quæ ad Verticem Sectionis ducitur. Reliquarum vero quæ huic propior eſt major erit remotiore.*

Sit ABΓ Ellipſis, cujus Axis minor ſit AΓ: & in eo capiatur punctum Δ, ita ut ΓΔ major ſit ſemilatere recto. Dico ΓΔ maximam eſſe è rectis per punctum Δ ad Sectionem ductis, eidemque propiorem majorem eſſe remotiore. Sit autem ΓH dimidium lateris recti, & ducantur è puncto Δ rectæ ΔZ, ΔE, ΔB, ac jungantur HZ, HE, HB, atque etiam rectæ ΓZ, ZE, EB. Recta igitur ΓH (per tres proximas propoſitiones) major eſt quam ZH; adeoque angulus ΓZH major erit angulo ZΓH: unde angulus ΓZΔ multo major erit angulo ZΓΔ. Recta itaque ΓΔ major eſt quam ZΔ. Similiter cum HZ major eſt quam HE, angulus ZEH major erit angulo EZH, ac angulus ZEΔ multo major erit angulo EZΔ: quocirca ΔZ major eſt quam ΔE. Eodemque argumento probabitur rectam ΔE majorem eſſe quam ΔB. ΔΓ itaque maxima eſt rectarum per punctum Δ ad Sectionem ductarum, eidemque propior major eſt remotiore. Q. E. D.



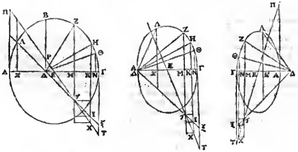
*

PROPO-

PROPOSITIO XX.

SI ſumatur punctum in Axe minore Ellipſeos, cujus diſtantia à Vertice Sectionis minor fuerit dimidio lateris recti, major vero Semiaxe minore; ac dividatur intercepta inter Verticem & centrum Sectionis, ita ut pars illa quæ eſt inter punctum diviſionis & centrum ſit ad diſtantiam ejuſdem puncti à puncto prius ſumpto, in ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum; & è puncto ſic invento erigatur normalis ad Axem occurrens Sectioni, ac jungatur punctum prius ſumptum cum puncto hujus occurſus: erit juncta hæc rectarum omnium de puncto illo ducendarum Maxima; *è reliquis vero quæ eidem propior eſt major erit remotiore; & quadratum ejus ſuperabit quadratum cujuſcumque alterius ductæ, rectangulo facto ſuper interceptam inter punctum inventum & ordinatim applicatam* ab extremitate ductæ demiſſam, *quod ſimile ſit contento ſub diametro tranſverſâ & differentiâ ejuſdem & Lateris ejus recti.*

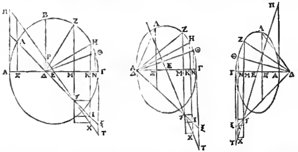
Sit ΑΒΓ Ellipſis, ejuſque Axis minor ΑΓ, & in eo capiatur punctum Δ, ita ut ΓΔ major ſit dimidio ipſius ΑΓ ſive diametri tranſverſæ, minor autem dimidio lateris recti; & ſit centrum Ε, & dividatur ΑΓ in puncto Μ, ita ut ΕΜ ſit ad ΜΔ ut diameter tranſverſa ΑΓ ad latus ejus rectum; (hoc autem fieri poteſt, quia dimidium lateris recti majus eſt quam ΔΓ) & erigatur è puncto Μ normalis ad ΑΓ ut ΖΜ, & jungatur ΖΔ. Dico quod recta ΖΔ Maxima eſt rectarum per punctum Δ ad Sectionem ductarum; quodque eidem ab utrâque parte propior major eſt remotiore; quodque exceſſus quadrati ipſius ΖΔ ſupra quadratum alterius cujuſvis ductæ æqualis eſt rectangulo facto ſuper interceptam inter punctum Μ & ordinatim applicatam, quod ſimile ſit rectangulo in præcedentibus deſcripto.



Ducantur rectæ quælibet aliæ ΔΘ, ΔΗ, ΔΖ, ΔΛ, ac ſit ΔΒ axi perpendicularis; & fiat ΓΤ æqualis dimidio lateris recti, & demittantur normales ΘΝ, ΗΚ, ΛΞ: jungatur etiam ΕΤ producaturque, & agantur ipſi ΑΓ parallelæ, ut fecimus in præcedentibus. Quoniam vero ΜΕ eſt ad ΔΜ ut latus tranſverſum ad latus rectum, & in eadem eſt ratione ΕΓ ad ΓΤ; ut autem ΕΓ ad ΓΤ ita ΜΕ ad Μτ; recta igitur ΜΔ æqualis eſt ipſi Μτ, & quadratum ex ΜΔ duplum eſt trianguli ΜΔτ; quadratum autem ex ΜΖ (per primam hujus) æquale eſt duplo Trapezio ΓΤτΜ: quadratum igitur ex ΔΖ æquale eſt duplo trianguli ΜΔτ una cum duplo plani

ΓΤϒΜ. Jam vero quadratum ex ΗΚ duplum eſt plani ΚΓΤΧ, & quadratum ex ΔΚ duplum eſt trianguli ΚΔΙ; quadratum igitur ex ΔΗ duplum eſt trianguli ΚΔΙ una cum duplo quadrilateri ΚΓΤΧ: adeoque differentia quadratorum ex ΔΖ & ΔΗ æqualis eſt duplo trianguli ΧΙϒ. Duplum autem hujus trianguli æquale eſt rectangulo facto ſuper ΚΜ, quod ſimile ſit deſcripto. Hoc autem conſtabit eodem modo quo demonſtravimus decimam ſextam hujus. Pariter probabitur quadratum ex ΖΔ excedere quadratum ex ΔΘ rectangolo facto ſuper ΜΝ, ejuſdem ſpeciei cum prædicto. Eodemque argumento, quadratum ex ΓΔ duplum eſt trianguli ΔΓξ; unde differentia inter quadrata ex ΔΖ & ΔΓ duplum erit trianguli ξΤϒ: quod quidem æquale eſt rectangulo facto ſuper ΓΜ, ſpeciei prædictæ. Recta igitur ΔΖ major eſt quam ΔΗ, & ΔΗ quam ΔΘ, & ΔΘ quam ΔΓ.

Præterea quadratum ex ΔΣ (per tertiam hujus) duplum eſt quadrilateri ΠΑΔΡ; quadratum autem ex ΖΔ duplum eſt triangulorum ΕΓΤ, ΔΕϒ; & triangulum ΕΓΤ



æquale eſt triangulo ΠΕΑ: igitur differentia inter quadrata ex ΔΖ & ΔΣ duplum eſt trianguli ΡΔϒ, quod quidem æquale eſt rectangulo facto ſuper ΔΜ ſpeciei jam deſcriptæ. Hæc autem eodem modo demonſtrantur ac propoſitio 16ma. Parique armento differentia quadratorum ex ΔΖ & ΔΑ æqualis eſt rectangulo ſimili ſuper ΜΞ facto.

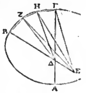
ΔΖ igitur Maxima eſt rectarum per punctum Δ ad Sectionem ducendarum; è quibus etiam quæ eidem propior eſt major erit remotiore, & exceſſus quadrati ipſius ΔΖ ſupra quadratum alterius cujuſvis ductæ æqualis eſt rectangulo ſpeciei deſcriptæ, facto ſuper interceptam inter punctum Μ & ordinatim applicatam. Hæc autem omnia ita ſe habent, ſive Axis minor æqualis fuerit dimidio lateris recti, ſive major, ſive minor eo. Nam ſive major fuerit eo, ac ducantur rectæ à puncto Δ ad modum figuræ primæ; vel à puncto Α, ut in figura ſecunda; vel etiam à puncto exteriore, ut Δ in figura tertia; Maxima erit ea quam deſcripſimus: coincidente demonſtrationis modo, in figuris ſecunda ac tertia, cum ea quam in prima jam expoſuimus. Q. E. D.

PROPOSITIO XXI.

Si capiatur in aliquâ Maximâ, *in Ellipſi juxta propoſitionem præcedentem ductâ ac ultra Axem minorem productâ, punctum aliquod: erit quoque* Maxima *omnium de puncto illo ad eandem Sectionis partem ducendarum, recta ea cujus* Maxima *eſt pars; & ab utroque ejus latere quæ eidem propior eſt major erit remotiore.*

Sit ΑΣΓ Ellipſis, cujus Axis ΑΓ; ſitque ΒΔ recta Maxima de puncto Δ ad Sectionem ducta, modo in Prop. præcedente deſcripto. In ΣΔ capiatur punctum aliquod

quod E, ita ut EB major ſit quam BΔ. Dico EB Maximam eſſe è rectis per punctum E ad Sectionem ductis, eidemque utrinque propiorem majorem eſſe remotiore.



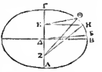
Ducantur rectæ EZ, EH, EΓ, ac jungantur ΔZ, ΔH, ΔΓ, ut & ipſæ ΓH, HZ, ZB. Quoniam vero ΔB major eſt quam ΔZ, angulus BZΔ major erit angulo ZBΔ, & multo major erit angulus BZE angulo ZBE: quocirca BE major eſt quam EZ. Pariter cum ΔZ major eſt quam ΔH, angulus ΔHZ major erit angulo ΔZH, adeoque angulus ZHE multo major erit quam EZH; ac proinde recta ZE major erit quam EH. Eodem modo patebit EH majorem eſſe quam EΓ. Recta igitur EB maxima eſt omnium de puncto E ad eandem Sectionis partem ductarum, quæque eidem EB propior eſt major erit remotiore. Idem autem eodem modo demonſtrabitur ſi Maxima ducta fuerit per punctum A, vel per aliud quodvis punctum in Axe AΓ producto capiendum.

PROPOSITIO XXII.

SI ducatur à puncto in Axe minore Ellipſeos ſumpto, recta quæ contineat cum eodem Axe angulum; ac fuerit recta hæc Maxima *quæ de puncto illo ad Sectionem duci poſſit: erit* Maxima *illa ſuper Axem minorem normaliter erecta, ſi fuerit punctum illud Sectionis Centrum. Si vero non fuerit centrum, erit angulus quem cum Axe continet acutus verſus centrum: ac ſi ab extremitate ejus demittatur normalis ad Axem, erit intercepta inter normalem illam & centrum Sectionis ad interceptam inter normalem & punctum in Axe ſumptum, in ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum.*

Sit ABΓ Ellipſis cujus Axis minor AΓ; tranſeat autem imprimis recta Maxima per centrum ut BΔ. Dico BΔ eſſe ad angulos rectos ſuper AΓ. Nam ſi non ita ſit, ſit normalis illa ΔE. erit igitur ΔE (per 11^{mam} hujus) Maxima ductarum de puncto Δ: quod eſt contra hypotheſin; poſuimus enim ΔB maximam eſſe. Quare recta ΔB eſt ad angulos rectos ſuper AΓ.

Educatur jam recta quævis maxima ZH de puncto alio Z. Dico angulum ΓZH acutum eſſe; demiſsâque normali de puncto H ad Axem AΓ, erit intercepta inter ordinatim applicatam & centrum Δ, ad interceptam inter eandem ordinatim applicatam & punctum Z, in ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum.



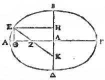
Erit enim recta ZΓ vel major dimidio lateris recti, vel minor eo, vel eidem æqualis. Non autem æqualis eſt ei, tunc enim (per 16^{tam}. 17^{am}. 18^{am}. hujus) foret maxima: neque major eſt eo, quia ſic etiam (per 19^{am} hujus) foret Maxima: Eſt igitur ZΓ minor dimidio lateris recti. Quare ſi fiat intercepta ad rectam compoſitam ex intercepta & ZΔ ſimul ſumptis, ſicut diameter tranſverſa ad Latus rectum, erit intercepta illa minor quam ΓΔ, quia ΔZ minor eſt exceſſu dimidii lateris recti ſupra dimidium lateris tranſverſi; adeoque ratio ejus ad ΓΔ minor erit ratione exceſsûs lateris recti ſupra diametrum tranſverſam ad diametrum tranſverſam: eſt igitur in ea ratione ad minorem quam ΓΔ. Sit ea ΔK, ut ſit KΔ ad ZK in ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum. Dico normalem ſuper Axem AΓ ad punctum K erectam tranſire per punctum H. Nam ſi non eo tranſeat, cadat ad modum rectæ KΘ: & erit ΘZ (per demonſtrata in 20ma hujus) Maxima. Hoc autem fieri nequit, *quia ex Hypotheſi* ZH *eſt illa Maxima.* Tranſit igitur normalis de puncto H demiſſa per punctum K, ita ut ΔK ſit ad KZ ut diameter tranſverſa ad latus rectum. *Manifeſtum autem eſt* ΓZH *angulum eſſe acutum, ob* ZKH *rectum.* Q. E. D.

PROPO-

PROPOSITIO XXIII.

SI educatur de puncto quovis in Axe minore Ellipſeos Maxima: *erit pars ejus intercepta inter Sectionem & Axem majorem,* Minima *rectarum quæ duci poſſint è puncto illo quo interſecat Axem majorem.*

Sit ABΓΔ Ellipſis, cujus Axis major AΓ, minor vero BΔ; ſitque KE Maxima de puncto K ducta, *occurrens Axi majori in puncto* Z. Dico ZE Minimam eſſe rectarum per pnnctum Z ad Sectionem ductarum.

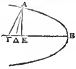


Ducatur enim per E recta EH ipſi ΔB normalis, ipſi vero AΓ recta EΘ. Jam Axis ΔB eſt ad latus rectum ejuſdem, ut latus rectum Axis AΓ eſt (per 15^{am} primi) ad ipſam AΓ; & BΔ eſt ad latus ejus rectum (per 22^{am} hujus) ut AH ad HK: latus igitur rectum Axis majoris AΓ eſt ad Axem AΓ nt AH ad HK. Sed AH eſt ad HK nt ΘZ ad ΘA, adeoqne ΘA eſt ad ΘZ ut AΓ ad latus ejus rectum: ac ΘE normalis eſt ſuper axem AΓ. Juncta igitur EZ (per 15^{am} hujus) minima eſt quæ duci poſſit ad Sectionem de puncto Z. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

IN omni Sectione Conica, duci non poteſt ab Axe ad idem in Sectione punctum, niſi una ſola Minima.

Sit imprimis AB Parabola, cujus Axis AΓ; ac capiatur in Sectione punctum quodlibet A. Dico quod non duci poteſt ab Axe ad punctum A niſi nna recta Minima.

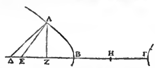


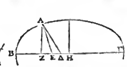
Nam ſi fieri poteſt ducantur AΓ, AΔ; ac demittatur ab A ad Axem BΓ normalis, nt AE: erit igitur EΔ (per 13^{am} hujus) dimidium lateris recti; atque etiam EΓ æqualis erit eidem ſemilateri recto. Quod abſnrdum. Igitur non duci poſſunt ab Axe ad punctum A plures quam una Minima. Q. E. D.

PROPOSITIO XXV.

SI vero Sectio AB fuerit Hyperbola vel Ellipſis Axe ΓA ac centro H deſcripta; ac capiatur in ea punctum aliquod nt A. Dico quod non dnci poſſint ab Axe ad pnnctum A plures quam una ſola *Minima.*

Nam ſi fieri poteſt ducantur plures qnam nna, ut AE, AΔ; & ab A demittatur





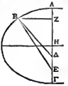
AZ normalis in Axem AΓ. Erit igitur ZH ad ZE (per demonſtrata in 14ma & 15ma hujus) ut Axis tranſverſus ad latus rectum. Oporteret autem HZ eſſe ad ZΔ in eadem ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum. Hoc autem impoſſibile eſt; ac proinde non dnci poſſunt duæ rectæ Minimæ ab Axe ad idem punctum A. Quod erat demonſtrandum.

PROPO-

PROPOSITIO XXVI.

SI capiatur punctum quodvis in Ellipſi quod non fuerit in Vertice Axis minoris: non duci poterunt ab eodem ad Axem minorem plures quam una recta Maxima.

Sit ABΓ Ellipſis cujus Axis minor AΓ, ſitque punctum in Sectione B. Dico quod de puncto B non duci poſſit ad Axem AΓ niſi una ſola Maxima.



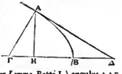
Nam ſi fieri poteſt, ducantur ad eam BΔ, BE, & demittatur normalis BZ, ac ſit centrum Sectionis H. Jam ſi BE aliqua fuerit è maximis ad Axem ducendis, erit (per 22^{am} hujus.) ZH ad ZE ut diameter tranſverſa ad latus rectum. Sed etiam oporteret ZH eſſe ad ZΔ in eadem ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum: quod abſurdum. Non igitur duci poſſunt plures quam una recta Maxima de puncto B ad Axem minorem. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

SI ducta ab extremitate Minimæ *alicujus, in præcedentibus deſcriptæ, Sectionis Tangens fuerit; ſuper eandem* Minimam *ad angulos rectos inſiſtet.*

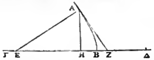
Sit imprimis Sectio AB Parabola, cujus Axis BΓ. Dico rectam ab extremitate cujuſvis Minimæ ductam, Sectionemque tangentem, normalem eſſe ſuper Minimam illam. Si fuerit minima illa pars Axis BΓ, res manifeſta eſt. Si vero fuerit Minima alia ut AΓ, ducatur à puncto A recta AΔ quæ tangat Sectionem AB. Dico angulum ΔAΓ rectum eſſe.

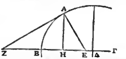
Demittatur normalis AH, ac (per 13^{am} hujus) erit HΓ æqualis dimidio lateris recti; ac ſi AΔ tangat Parabolam, normali AH de puncto A demiſſâ, erit (per 35^{am} primi) BΔ ipſi BH æqualis, adeoque ΓH erit ad latus rectum ut BH ad HΔ: quare rectangulum ſub ΓH, HΔ æquale erit facto ſub BH & latere recto. Sed factum ſub BH & latere recto (per 11^{mam} primi) æquale eſt quadrato ex AH: quadratum itaque ex AH æquale eſt rectangulo ſub ΓH, HΔ. Angulus autem AHΔ rectus eſt: rectus eſt igitur (*per Lemma Pappi* I.) angulus ΔAΓ.



PROPOSITIO XXVIII.

JAM ſi fuerit Sectio AB Hyperbola vel Ellipſis cujus Axis BΓ. Dico rectam ab extremitate Minimæ alicujus ductam, ita ut tangat Sectionem, eidem Minimæ normaliter inſiſtere. Etenim ſi Minima illa fuerit pars Axis BΓ, manifeſtum eſt rectam Sectionem tangentem in puncto B eidem Minimæ ad angulos rectos eſſe. Sit autem AE Minima alia, & ſit Tangens AZ. Dico angulum ZAE rectum eſſe.



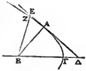


Demittatur normalis AH & ſit centrum Δ: ac ſi fuerit AE minima & AH ordinatim applicata, erit ΔH ad HE (per 14^{am} & 15^{am} hujus) ut diameter tranſverſa ad latus rectum. Eſt autem ΔH ad HE ut rectangulum ſub ΔH, HZ ad rectangulum ſub HZ, HE; adeoque erit rectangulum ſub ΔH, HZ ad rectangulum ſub HZ, HE ut diameter tranſverſa ad latus rectum. Sed diameter tranſverſa eſt ad latus rectum (per 37^{am} primi) ſicut rectangulum ſub ΔH, HZ ad quadratum ex AH: igitur

rectangulum ſub HZ, HE æquale eſt quadrato ex AH. Angulus autem AHZ rectus eſt; quocirca (*per Pappi Lemma* I.) rectus eſt angulus ZAE. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

I*Dem autem aliter demonſtrari poteſt hoc modo.*

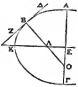


Sit AΓ aliqua è Sectionibus Conicis, cujus axis BΔ; ac ſit Minima recta AB, tangens vero AΔ. Dico angulum ΔAB rectum eſſe.

Nam ſi non ita ſit, normalis ſit ipſi AΔ recta BE, adeoque AB major erit quam BE; ac propterea AB multo major erit quam BZ: quod abſurdum eſt. Poſuimus enim AB Minimam eſſe. Quocirca ſi AB Minima ſit, erit angulus ΔAB rectus.

PROPOSITIO XXX.

S*I ab extremitate* Maximæ *alicujus ad Ellipſin ductæ recta ducatur quæ Sectionem tangat. Dico Tangentem illam ſuper* Maximam *normaliter inſiſtere.*

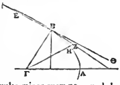


Sit ABΓ Ellipſis cujus Axis minor AΓ, & ab Axe ad Sectionem ducatur Maxima quædam ut OB; tangat autem ſectionem recta BΔ ad punctum B. Dico angulum ΔBO rectum eſſe.

Ducatur è centro ad Sectionem Axi normalis EK, *quæ occurrat Maximæ* OB *in* Λ; quæque dimidium erit Axis majoris. Quoniam vero AΓ Axis minor eſt, & Axis EK occurrit Maximæ, erit (per 23[am] hujus) pars ejus intercepta inter Sectionem & Axem majorem recta Minima; quare BΛ Minima eſt. Tangit autem Sectionem recta BΔ: BΔ igitur (per tres proximas Prop.) normaliter inſiſtit ſuper ipſam BΛ; *hoc eſt ſuper Maximam* BO. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI.

S*I in qualibet trium Coni ſectionum, ab eâ* Minimæ *alicujus extremitate quæ ad Sectionem eſt, erigatur recta eidem* Minimæ *ad angulos rectos: erit recta illa Sectionis Tangens.*



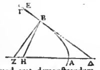
Sit enim Sectio Conica AB, & in eâ recta Minima ΓB. Dico rectam è puncto B ductam, ipſique ΓB normalem, Sectionem tangere.

Nam ſi fieri poſſit ut non tangat, interſecet eam, ut recta ΓBΘ: ac ducatur è puncto quodam Z, extra Sectionem quidem ſumpto ſed inter eam & ipſam BΘ, recta alia ut BZ: & demittatur in BZ de puncto Γ normalis ΓHZ. Erit igitur angulus ΓBZ acutus, ob angulum ΓZB rectum; adeoque ΓZ minor erit quam ΓB, ac ΓH multo minor quam ΓB: quod abſurdum eſt. Poſuimus enim ΓB Minimam eſſe. Recta igitur per punctum B ipſi BΓ normalis tanget Sectionem. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXII.

S*I recta tangat aliquam è Sectionibus Conicis, & erigatur è puncto contactus Tangenti normalis, quæ occurrat Axi: erit hæc recta* Minima *quæ per punctum illud ad Axem ducitur.*

Sit



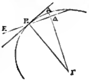
Sit enim ABΓ Sectio Conica, Tangens vero ΔE, & de puncto contactus B erigatur tangenti normalis BZ, quæ producatur ad occurſum Axis. Dico BZ Minimam eſſe.

Nam ſi non ita ſit, tranſeat Minima BH per punctum B; ac angulus ΔBH (per 27^{am} & 28^{am} hujus) rectus erit: quod quidem abſurdum eſt. Poſuimus enim angulum ΔBZ rectum eſſe. Quocirca recta BZ Minima eſt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXIII.

S*I à* Maximæ *alicujus extremitate illâ quæ ad Sectionem eſt erigatur perpendicularis; erit ea Sectionis Tangens.*

Sit enim AB Sectio Conica, ſitque BΓ Maxima aliqua. Dico rectam per punctum B ductam, ipſique BΓ normalem, ſectionem tangere.

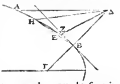


Nam ſi non ita ſit, interſecet eam ad modum rectæ BΔE; & ducatur è puncto Γ recta ΓΔA, occurrens ipſi BE in Δ, *Sectioni autem in* A. Cum autem ΓΔ ſubtendit angulum rectum, ΓB vero angulum acutum, erit ΓΔ major quam ΓB. Sed AΓ major eſt quam ΔΓ; adeoque AΓ multo major erit quam ΓB. Hoc autem abſurdum eſt: poſuimus enim ΓB Maximam eſſe. Quapropter recta per punctum B ducta, ipſique ΓB normalis, tanget ſectionem. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIV.

S*I ſumatur punctum in aliquâ vel è* Maximis *vel* Minimis, *extra Sectionem Conicam productis: erit portio ejus, quæ interjacet punctum illud & Sectionem,* Minima *rectarum de puncto illo ad utrumvis latus Sectionis egredientium, modo non produci ſed in uno tantum puncto Sectioni occurrere concipiantur: è cæteris vero quæ eidem propinquior minor erit remotiore.*

Sit AB Sectio Conica, & BΓ aliqua è Maximis vel Minimis, quæ producatur; & in producta capiatur punctum quodvis Δ, à quo ducantur ad ſectionem rectæ ΔA, ΔH, ΔE, quæ ſingulæ occurrant ſectioni in uno tantum puncto. Dico BΔ Minimam eſſe rectarum de puncto Δ ad ſectionem ducendarum, eidemque propiorem minorem eſſe remotiore.

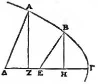


Nam ſi ducatur BZ ſectionem tangens in B, erit (per 27^{am} & 28^{am} ac 30^{am} hujus) angulus ZBΔ rectus; adeoque ΔZ *major erit quam* ΔB, *ac* ducta ΔE multo major quam ΔB. Jungantur rectæ HB, HE; atque angulus ΔEH obtuſus erit, angulus vero ΔHZ acutus: quapropter ΔH major erit quam ΔE. Ac pari argumento probabitur ΔA majorem eſſe quam ΔH. Poſſumus etiam idem demonſtrare de rectis ab alterâ parte ipſius BΔ ducendis. Conſtat ergo Propoſitio.

PROPOSITIO XXXV.

I*N omni Sectione Conicâ, ſi ducantur plures* Minimæ; *erunt anguli comprehenſi ſub Axe &* Minimis *à Vertice Sectionis remotioribus majores comprehenſis ſub Axe & eidem Vertici propinquioribus.*

Sit autem imprimis Sectio Parabola ut ΑΒΓ, cujus Axis ΓΔ: ſintque rectæ ΑΔ, ΒΕ Minimæ. Dico angulum ΑΔΓ majorem eſſe angulo ΒΕΓ.

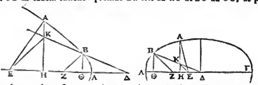


Demittantur normales ΑΖ, ΒΗ: cumque ΒΖ Minima eſt, erit (per 13^{am} hujus) ΕΗ dimidium lateris recti; ac (per eandem) erit etiam ΔΖ æqualis dimidio lateris recti, ita ut ΕΗ æqualis ſit ipſi ΔΖ. Cathetus vero ΑΖ major eſt Catheto ΒΗ: quare angulus ΑΔΖ major eſt angulo ΒΕΗ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVI.

SIT jam Sectio Hyperbola vel Ellipſis, cujus Axis ΑΕ & centrum Δ; & ſint ΑΕ, ΒΖ Minimæ. Dico angulum ΑΕΑ majorem eſſe angulo ΒΖΑ.

Demittantur normales ΒΘ, ΑΗ; & jungatur ΔΚΒ. Erit igitur ΔΗ ad ΗΕ (per 14^{am} & 15^{am} hujus) ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum; ac (per eaſdem) erit ΔΘ ad ΘΖ in eadem ratione: proinde ΔΗ erit ad ΗΕ ut ΔΘ ad ΘΖ; ac permu-

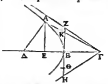


tando erit ΔΗ ad ΔΘ ſicut ΗΕ ad ΘΖ. Sed ΔΗ eſt ad ΔΘ ut ΚΗ ad ΒΘ: quapropter ΗΕ eſt ad ΘΖ ſicut ΚΗ ad ΒΘ. Anguli autem ΑΗΕ, ΒΘΖ recti ſunt, adeoque triangula ΚΕΗ, ΒΖΘ ſimilia ſunt, & *anguli* ΚΕΗ, ΒΖΘ *æquales*; angulus igitur ΑΕΗ major eſt angulo ΒΖΘ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVII.

S*I in Hyperbola ducatur recta aliqua* Minima *quæ contineat cum Axe angulum: erit angulus ille minor angulo comprehenſo ſub alterutro Aſymptotorum & rectâ quæ per Verticem Sectionis ducta Axi normalis eſt.*

Sit Hyperbolæ ΑΒ Axis ΓΔ, Aſymptoti autem ΖΓ, ΓΗ; ſitque recta quædam Minima ΑΔ: & è puncto Β erigatur Axi normalis ΖΒΗ. Dico angulum ΑΔΓ minorem eſſe angulo ΓΖΗ.



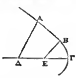
Fiat ΒΘ dimidium lateris recti, ſive cadat punctum Θ ſuper Η, vel inter Β, Η, vel extra ea; ac jungatur ΑΓ. Jam ΓΒ eſt ad ΒΘ, ſicut axis tranſverſus ad latus rectum; eſt autem ΓΕ ad ΕΔ (per 14^{am} hujus) ſicut axis tranſverſus ad latus rectum: quare ΓΒ eſt ad ΒΘ ut ΓΕ ad ΕΔ. Sed ΚΒ eſt ad ΒΓ ut ΑΕ ad ΕΓ, adeoque ex æquo erit ΚΒ ad ΒΘ ſicut ΑΕ ad ΕΔ. Ratio autem ΚΒ ad ΒΘ minor eſt ratione ΖΒ ad ΒΘ; & ΖΒ eſt ad ΒΘ (per 3^{am} II^{di}) ut ΓΒ ad ΒΖ. Quapropter ratio ΑΕ ad ΕΔ minor eſt ratione ΓΒ ad ΒΖ. Hæc vero latera continent angulos rectos: unde manifeſtum eſt angulum ΑΔΓ minorem eſſe angulo ΓΖΒ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVIII.

S*I ducantur à Sectione aliqua Conica rectæ duæ* Minimæ *ad idem Axis latus; occurrent illæ productæ ad oppoſitam Sectionis partem, ſive ultra Axem.*

Sit

Sit ſectio Conica AB ſuper Axe ΓΔ; ſintque ΑΔ, BE duæ Minimæ à ſectione ad Axem ductæ. Dico rectas ΔΑ, BE productas, ad alterum ſectionis latus invicem occurſuras.

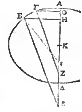


Quoniam enim (per 35^{am} & 36^{am} hujus) angulus ΑΔΓ major eſt angulo BEΓ, erunt anguli ΑΔΕ, ΔEB majores duobus rectis: erunt igitur anguli iiſdem deinceps minores duobus rectis: ſunt autem ΑΔ, BE duæ Minimæ; occurrunt igitur productæ, ad alteram ſectionis partem. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIX.

R*Ectæ* Maximæ *à Sectione ad Axem Ellipſeos minorem ductæ occurrunt invicem ad eandem Sectionis partem.*

Sit ABΓ Ellipſis, cujus Axis minor ΑΔ. Dico Maximas à Sectione ABΓ ductas occurrere inter ſe ad partes Semi-Ellipſeos ABΔ.

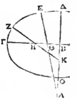


Nam ſi poſſibile ſit, ut non ſeſe interſecent; ſint eæ duæ rectæ Maximæ BE, ΓZ, & ducantur normales BH, ΓΘ, ac ſit centrum K. Erit igitur KΘ ad ΘZ ut diameter tranſverſa ad latus rectum (per 22^{am} hujus) ſimiliterque KH erit ad HE in eadem ratione: quare per converſionem rationis KH erit ad KE ut KΘ ad KZ; ac permutando KH erit ad KΘ ut KE ad KZ. Sed KZ minor eſt quam KE: igitur KΘ minor erit quam KH, quod eſt contra Hypotheſin. Minimæ igitur BE, ΓZ occurrunt invicem: *cumque* KΘ *minor eſt quam* KZ, *occurrent ad eaſdem partes Axis ad quas puncta* Γ, B. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XL.

C*Oncurſus rectarum* Minimarum *in Ellipſi fiunt intra angulum comprehenſum ſub Semiaxe ad quem ducuntur* Minimæ *& ſub Axe minore.*

Sit ΔEΓ Ellipſis, cujus Axis minor ΔBO; ſintque Minimæ duæ EΘ, ZH. Dico rectas EΘ, ZH productas concurrere intra angulum ΓBO.



Producantur enim hæ rectæ ab H & Θ ad occurſum ipſius ΔBO, in punctis K, Λ. Quoniam vero EΘ Minima eſt, erit quoque EΛ (per converſam Prop. XXIII. hujus) Maxima. Pariter cum ZH producta occurrit ipſi BO in puncto K, erit etiam ZK Maxima. Occurrunt autem inter ſe EΘ, ZH productæ (per 38^{vam} hujus) ad alteram partem Axis. Sed rectæ EΛ, ZK, cum Maximæ ſint, occurrunt invicem (per 39^{am} hujus) ad eandem Axis minoris partem. Situm eſt igitur punctum occurſus intra angulum rectis ΓB, BO comprehenſum. Q. E. D.

PROPOSITIO XLI.

R*Ectæ* Minimæ *in Parabola vel Ellipſi de Sectione ad Axem ductæ & productæ occurrent etiam Sectioni ad alterum ejus latus.*

Digitized by Google



Res quidem in Ellipſi per ſe ſatis manifeſta eſt.

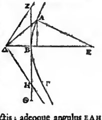
Sin autem ſectio ABΓ Parabola fuerit axe BΔ, ſit recta aliqua Minima AΔ. Dico AΔ productam occurrere alteri ſectionis parti BΓ.

Quoniam enim ſectio Parabola eſt, ac ducitur ad diametrum ejus recta AΔ; producta ea (per 27^{am} primi) conveniet cum ſectione BΓ. Q. E. D.

PROPOSITIO XLII.

IN Hyperbola, ſi diameter tranſverſa non major fuerit latere ejus recto, nulla Minima *de Sectione ad Axem duci poteſt, quæ occurrat alteri Sectionis lateri. Si vero diameter tranſverſa major fuerit latere ejus recto, pars* Minimarum *producta occurret alteri Sectionis lateri: altera vero pars non item.*

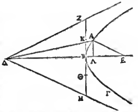
Sit Hyperbolæ ABΓ Axis ΔE, ac centrum Δ; ſitque recta aliqua Minima AE: nec ſit diameter tranſverſa major latere recto. Dico quod AE producta non occurret ſectioni.



Sint Aſymptoti duæ ΔZ, ΔH; ac ſit ZBH ipſi ΔB ad angulos rectos: ac fiat BΘ dimidium lateris recti. Quoniam vero diameter tranſverſa non major eſt latere recto, ΔB non major erit quam BΘ; ac ΔB eſt ad BΘ (per tertiam II^{di}) ſicut quadratum ex BΔ ad quadratum ex BZ; quadratum igitur ex BΔ non majus erit quadrato ex BZ, adeoque BΔ non major quam BZ: unde & angulus BZΔ non major erit angulo ZΔB. Sed (per 37^{am} hujus) angulus BZΔ major eſt angulo AEB; quare angulus ZΔB major eſt angulo AEB. Angulus autem ZΔB æqualis eſt angulo BΔH: quare angulus BΔH major eſt angulo AEB. Jam angulus qui ipſi AEB deinceps eſt una cum angulo AEB æqualis eſt duobus rectis; adeoque angulus EΔH una cum angulo ipſi AEB deinceps major eſt duobus rectis; rectæ igitur AE, ΔH productæ ad partes E & H non occurrent inter ſe. Sed & recta AE non occurret ſectionis parti BΓ (per octavam II^{di}) quia non occurrit Aſymptoto ΔH. Q. E. D.

PROPOSITIO XLIII.

QUod ſi fuerit diameter tranſverſa major latere recto. Dico *Minimarum* aliquas à Sectione ABΓ ductas & productas occurrere Sectioni ab alterâ ejus parte; aliquas vero eidem non occurrere.



Sint duæ Sectionis Aſymptoti ZΔ, ΔH: cumque diameter tranſverſa major eſt latere recto, erit ΔB major dimidio lateris recti BΘ; adeoque ratio ipſius ZB ad BΘ major erit ratione ZB ad BΔ. Fiat KB ad BΘ ſicut ZB ad BΔ; & jungatur ΔK, quæ producta (per 2^{dam} II^{di}) occurret ſectioni. Occurrat autem in puncto A; & ab A demittatur Axi ΔE normalis AΛ; ac fiat ΔΛ ad ΛE ſicut ΔB ad BΘ, ſive ut diameter tranſverſa ad latus rectum. Quoniam vero normalis eſt AΛ, erit intercepta ΛE (per nonam hujus) aliqua è Minimis. Cum autem BK eſt ad BΔ ſicut AΛ ad ΛΔ, atque etiam ΔB eſt ad BΘ ſicut ΔΛ ad ΛE; erit ex æquo AΛ ad ΛE ſicut BK ad BΘ. Sed BK eſt ad BΘ ut ZB ad BΔ; quare AΛ eſt ad ΛE ſicut ZB ad BΔ. Anguli autem ZBΔ, AΛE ſunt æquales, quia recti; atque adeo triangula ZBΔ, AΛE ſimilia, & angulus ZΔB angulo AEΛ æqualis:

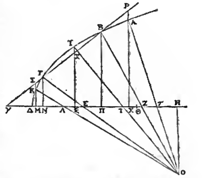
qualis: unde & angulus ΒΔΗ eidem angulo ΑΕΛ æqualis eſt. Quocirca rectæ ΔΗ ΑΕ non occurrent inter ſe, atque ΑΕ producta non occurret ſectioni niſi in puncto Α; quia (per octavam II[di]) non occurrit utrique Aſymptoto ΔΗ, ΔΖ: eſt enim ΑΕ ipſi ΔΗ parallela. Recta igitur ΑΕ non occurrit ſectioni niſi in ſolo puncto Α.

At vero Minimæ illæ, quæ occurrunt axi inter puncta Β, Ε, (per 36[tam] hujus) minores angulos cum Axe comprehendunt quam ΒΔΗ: (etenim angulus ΑΕΒ æqualis eſt angulo ΒΔΗ, & anguli Minimarum iſtarum inter Β & Ε tranſeuntium minores ſunt angulo ΑΕΒ, *hoc eſt angulo* ΒΔΗ) adeoque productæ non occurrent ipſi ΔΗ; ac proinde non interſecabunt ſectionem ΒΓ, ob cauſam jam dictam, nempe Prop. 8[vam] II[di]. Cæteras vero Minimas comprehendentes cum Axe angulos majores angulo ΑΕΒ, quia ipſi ΔΗ occurrunt, etiam interpoſitæ ſectioni ΒΓ occurrere neceſſe eſt. Q. E. D.

PROPOSITIO XLIV.

SI ad Axem alicujus Sectionis Conicæ ducantur duæ Minimæ, *quæ ad occurſum producantur; & de puncto occurſus earundem ducatur alia quævis recta, quæ Axem ſecans Sectioni conveniat: portio ejus inter Sectionem & Axem intercepta non erit* Minima. *Ac ſi hæc ducta non fuerit intermedia inter duas* Minimas, *& agatur ab ea extremitate ejus quæ eſt ad Sectionem* Minima; *abſcindet hæc* Minima *portionem Axis Vertici Sectionis adjacentem, quæ major erit portione ejuſdem ab ipſa ducta abſciſſâ. Si vero ducta intermedia fuerit inter duas* Minimas, *ea* Minima, *quæ ab extremitate ejus ad Axem ducitur, auferet portionem Axis Vertici Sectionis adjacentem minorem portione ab ipſa ducta abſciſſâ. Quod ſi Sectio fuerit Ellipſis, oportebit & duas* Minimas *& tertiam ductam occurrere eidem majori Semiaxi Sectionis.*

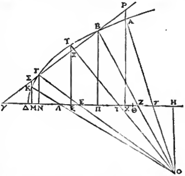
Imprimis autem ſit Sectio Parabola ut ΑΒΓ, cujus Axis ΔΗ; ac ſint duæ Minimæ ab eadem ductæ ΒΖ, ΓΕ, quæ occurrant inter ſe in puncto Ο: & educatur è puncto Ο recta ΚΛ, primum extra ipſas ΟΓ, ΟΒ. Dico ΚΛ non eſſe aliquam è Minimis, Minimamque per punctum Κ ductam abſcindere ab Axe majorem portionem, Vertici ſectionis Δ conterminam, quam eſt ΔΛ.



Demittantur normales ΟΗ, ΒΠ, ΓΝ, ΚΜ; ac ſit ΘΗ dimidium lateris recti. Quoniam vero ΒΖ Minima eſt, & ΒΠ normalis, erit (per 13[am] hujus) ΠΖ æqualis dimidio lateris recti; adeoque ΠΖ æqualis eſt ipſi ΘΗ: unde & ΠΘ ipſi ΖΗ æqualis erit, ac ΗΘ erit ad ΘΠ ſicut ΠΖ ad ΖΗ. Sed ΠΖ eſt ad ΖΗ ut ΠΒ ad ΟΗ; unde rectangulum ſub ΟΗ, ΗΘ æquale erit rectangulo ſub ΒΠ, ΠΘ. Eodemque modo demonſtratur rectangulum ſub ΓΝ, ΝΘ æquale eſſe rectangulo ſub ΟΗ, ΗΘ: æquale eſt igitur rectangulum ſub ΠΒ, ΘΠ rectangulo ΓΝ, ΝΘ; ac proinde ΠΒ eſt ad ΓΝ ut ΝΘ ad ΘΠ. Jungatur ΒΓ ac producatur ad occurſum Axis ΔΗ in puncto γ; producatur etiam normalis ΚΜ ad Σ. Erit igitur ΠΒ ad ΓΝ ſicut Πγ ad γΝ, adeoque Πγ eſt ad γΝ ſicut ΝΘ ad ΘΠ, *ac dividendo* ΠΝ

eſt

eſt ad γΝ *ſicut* ΠΝ *ad* ΘΠ: æqualis eſt igitur recta γΝ ipſi ΠΘ. Eſt igitur γΜ minor quam ΠΘ, unde ratio ΠΜ ad Μγ major eſt ratione ΠΜ ad ΠΘ; & componendo ratio Πγ ad γΜ, hoc eſt ΠΒ ad ΜΣ, major erit ratione ΜΘ ad ΘΠ: adeoque rectangulum ſub ΒΠ, ΠΘ majus erit rectangulo ſub ΣΜ, ΜΘ, ac proinde multo majus rectangulo ſub ΚΜ, ΜΘ. Demonſtravimus autem rectangulum ſub ΒΠ, ΠΘ æquale eſſe rectangulo ſub ΟΗ, ΗΘ: adeoque rectangulum ΟΗΘ majus eſt rectangulo ΚΜΘ; ac ratio ΟΗ ad ΚΜ, ſive ΗΛ ad ΛΜ, major eſt ratione ΜΘ ad ΘΗ: quocirca ΗΘ major eſt quam ΜΛ. Sed ΗΘ æqualis eſt dimidio lateris recti, ergo ΜΛ minor eſt dimidio lateris recti: Minima igitur à puncto Κ ducenda auferet ab Axe ſegmentum majus quam ΛΔ: unde patet (per 24am hujus) ΚΛ non eſſe Minimam.



Jam ſi ducatur ad alterum latus ipſarum ΒΟ, ΟΓ, etiam extra eas, alia quævis recta ut ΟΑ. Dico partem ejus Ατ non eſſe Minimam: Minimam vero è puncto Α ductā auferre ab Axe portionem majorem quam Δτ. Sit ΑΧ normalis ipſi ΔΗ, & (per jam demonſtrata) recta ΠΘ æqualis eſt ipſi γΝ; unde γΧ major erit quam ΠΘ; ac ratio ΠΧ ad Χγ minor erit ratione ΧΠ ad ΠΘ. Dividendo autem ratio ΧΠ ad Πγ minor erit ratione ejuſdem ad ΧΘ; ac componendo ratio Χγ ad γΠ, *hoc eſt* ΧΡ *ad* ΠΒ, minor erit ratione ΠΘ ad ΘΧ: quare ratio ΧΡ ad ΠΒ minor eſt ratione ΠΘ ad ΘΧ; ac rectangulum ΘΧΡ minus erit rectangulo ΒΠΘ; adeoque rectangulum ΑΧΘ multo minus erit rectangulo ΒΠΘ. Sed ΒΠΘ æquale eſt rectangulo ΟΗΘ, quocirca ΑΧΘ minus eſt rectangulo ΟΗΘ; ad proinde ratio ΑΧ ad ΟΗ, hoc eſt Χτ ad τΗ, minor erit ratione ΗΘ ad ΘΧ: erit igitur ΗΘ major quam Χτ. Sed ΘΗ dimidium eſt lateris recti, quare Χτ minor eſt dimidio lateris recti. Minima itaque de puncto Α ducenda auferet rectam majorem quam Χτ; adeoque majus erit ſegmentum Axis, à ſectionis Vertice Δ ſumptum, quam ſegmentum Δτ rectā Ατ abſciſſum: ac propterea (per 24am hujus) recta Ατ non eſt aliqua è Minimis.

Quinetiam ſi capiatur recta aliqua ut ΟΥ inter ipſas ΟΒ, ΟΓ intermedia: Dico quod ΥΤ non eſt Minima, quodque Minima de puncto Υ ducta abſcindet ſegmentum Axis, vertici Δ adjacens, minus portione ejus ΔΤ. Demittatur enim normalis Υξ. Cumque jam probatum ſit ΠΘ æqualem eſſe ipſi γΝ, erit ξγ major quam ΠΘ; adeoque ratio Πξ ad ξγ minor ratione ejuſdem ad ΠΘ: & componendo ratio Πγ ad γξ minor erit ratione ξΘ ad ΘΠ. Sed Πγ eſt ad γξ ut ΒΠ ad Ξξ; unde ratio ΒΠ ad Ξξ minor eſt ratione ξΘ ad ΘΠ: ac rectangulum ΒΠΘ minus rectangulo Ξξθ, multoque minus rectangulo Υξθ. Rectangulum autem ΟΗΘ æquale eſt rectangulo ΒΠΘ; quare rectangulum ΟΗΘ minus eſt facto ſub Υξ, ξΘ: unde & ratio ΟΗ ad Υξ minor erit ratione ξΘ ad ΘΗ. Sed ΟΗ eſt ad Υξ ſicut ΗΤ ad Τξ; quare ΗΤ eſt ad Τξ in minore ratione quam ξΘ ad ΘΗ: recta igitur ΗΘ minor eſt quam Τξ. Verum ΗΘ dimidium eſt lateris recti; quapropter recta Minima de puncto Υ ducenda auferet portionem minorem quam ξΤ: ac ſegmentum Axis Vertici Sectionis adjacens minus erit quam ΔΤ: unde ΥΤ non eſt Minima, ſed Minima de puncto Υ ducenda auferet Axis portionem minorem quam ΔΤ. Q. E. D.

PROPOSITIO XLV.

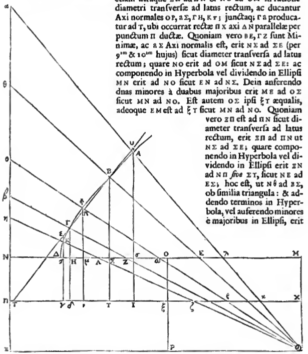
Si vero ſectio fuerit Hyperbola vel Ellipſis ut ΑΒΓΔ, Axe ΜΔ centro vero Ν; & ducantur in ſectione duæ *Minimæ*, ut ΒΕ, ΓΖ; à quarum concurſu in puncto

*

Θ agatur

Θ agatur recta ΘΛΚ. Dico portionem ejus inter ſectionem & Axem interceptam non eſſe aliquam è *Minimis*: ſed *Minimam* de puncto Κ ductam abſcindere ſegmentum Axis majus quam ΔΛ.

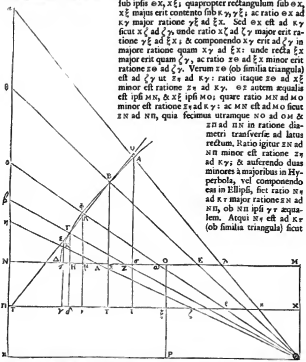
De puncto Θ demittatur ad Axem normalis recta ΘΜ, ac per centrum Ν ipſi ΜΘ parallela ducatur recta ΝΞ, ac per punctum Θ ipſi ΜΝ parallela ſit ΘΞ, & producatur ΝΞ ad occurſum ipſarum ΘΓ, Θa: iis autem occurrat in punctis β, θ. Fiat etiam utraque ΞΠ ad ΠΝ & ΝΟ ad ΟΜ in ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum, ac ducantur Axi normales ΟΡ, aΣ, ΓΗ, ΚΥ; junctaq; Γa producatur ad Τ, ubi occurrat rectæ ΠΧ axi ΔΝ parallelæ per punctum Π ductæ. Quoniam vero ΒΕ, ΓΖ ſunt Minimæ, ac aΣ Axi normalis eſt, erit ΝΣ ad ΣΕ (per 9^am & 10^am hujus) ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum; quare ΝΟ erit ad ΟΜ ſicut ΝΣ ad ΣΕ: ac componendo in Hyperbola vel dividendo in Ellipſi ΜΝ erit ad ΝΟ ſicut ΕΝ ad ΝΣ. Dein auferendo duas minores à duabus majoribus erit ΜΕ ad ΟΣ ſicut ΜΝ ad ΝΟ. Eſt autem ΟΣ ipſi ξΥ æqualis, adeoque ΕΜ eſt ad ξΥ ſicut ΜΝ ad ΝΟ. Quoniam vero ΞΠ eſt ad ΠΝ ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum, erit ΞΠ ad ΠΝ ut ΝΣ ad ΣΕ; quare componendo in Hyperbola vel dividendo in Ellipſi erit ΞΝ ad ΝΠ *ſive* ΣΥ, ſicut ΝΕ ad ΕΣ; hoc eſt, ut Νθ ad ΒΣ, ob ſimilia triangula: & addendo terminos in Hyperbola, vel auferendo minores è majoribus in Ellipſi, erit



Ξθ ad ΒΥ ſicut ΝΕ ad ΕΣ, vel ſicut ΞΝ ad ΝΠ. Jam ratio rectanguli ΞΝΜ ad rectangulum ΠΝΟ componitur ex ratione ΞΝ ad ΝΠ & ΜΝ ad ΝΟ: demonſtravimus autem ΞΝ eſſe ad ΝΠ ſicut Ξθ ad aΥ, & ΜΝ eſſe ad ΝΟ ut ΕΜ ad ξΥ, ratio igitur rectanguli ΝΜΘ ad rectangulum ΝΠξ componitur ex ratione Ξθ ad aΥ & ratione ΕΜ ad ξΥ. Sed rectangulum ΝΜΘ æquale eſt facto ſub Ξθ & ΕΜ, quia Ξθ eſt ad ΘΞ ſicut ΘΜ ad ΜΕ: rectangulum igitur ΝΠξ æquale eſt contento ſub ΒΥ, Υξ. Eodem modo demonſtrabitur rectangulum ΝΠξ æquale eſſe rectangulo Γδξ; atque adeo rectangulum ſub ΒΥ, Υξ æquale eſſe rectangulo ſub Γδ, δξ: unde aΥ eſt ad Γδ ut δξ eſt ad ξΥ. Sed aΥ eſt ad Γδ ſicut ΥΤ ad Τδ; quare ΥΤ eſt ad Τδ ſicut δξ ad ξΥ; ac dividendo Υδ eſt ad δΤ ſicut Υδ ad ξΥ: unde patet ξΥ ipſi Τδ æquari.

Hinc conſtabit Υξ majorem eſſe quam Τγ; ratio itaque γΥ ad Τγ major erit ratione ejuſdem ad Υξ, ac componendo erit ratio ΥΤ ad Τγ major ratione γξ ad ξΥ.

ξΤ. Sed ΥΤ eſt ad Τγ ſicut ΒΤ ad ιγ; ratio igitur ΒΤ ad ιγ major eſt ratione γξ ad ξΤ: atque adeo rectangulum ſub ΒΤ, Τξ majus erit rectangulo ſub ιγ, γξ, ac multo majus rectangulo Κγξ. Rectangulum antem ſub ΒΤ, Τξ æquale eſt rectangulo ΝΠξ, quare rectangulum ΝΠξ majus eſt rectangulo Κγξ. Rectangulum vero ΝΠξ æquale eſt rectangulo ΧΘΡ, quia ΝΟ eſt ad ΟΜ ſicut ΘΧ ad ΧΜ; ergo rectangulum ΧΘΡ majus eſt rectangulo Κγξ. Continetur autem rectangulum ΧΘΡ ſub ipſis ΘΧ, Χξ; quapropter rectangulum ſub ΘΧ, Χξ majus erit contento ſub Κγ, γξ; ac ratio ΘΧ ad Κγ major ratione γξ ad ξΧ. Sed ΘΧ eſt ad Κγ ſicut Χζ ad ζγ, unde ratio Χζ ad ζγ major erit ratione γξ ad ξΧ; & componendo Χγ erit ad ζγ in majore ratione quam Χγ ad ξΧ: unde recta ξΧ major erit quam ζγ, ac ratio ΞΘ ad ξΧ minor erit ratione ΞΘ ad ζγ. Verum ΞΘ (ob ſimilia triangula) eſt ad ζγ ut Ξη ad Κγ: ratio itaque ΞΘ ad Χξ minor eſt ratione Ξη ad Κγ. ΘΞ autem æqualis eſt ipſi ΜΝ, & Χξ ipſi ΜΟ; quare ratio ΜΝ ad ΜΟ minor eſt ratione Ξη ad Κγ: ac ΜΝ eſt ad ΜΟ ſicut ΞΝ ad ΝΠ, quia fecimus utramque ΝΟ ad ΟΜ & ΞΠ ad ΠΝ in ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum. Ratio igitur ΞΝ ad ΝΠ minor eſt ratione Ξη ad Κγ; & auferendo duas minores à majoribus in Hyperbola, vel componendo eas in Ellipſi, fiet ratio Νη ad ΚΥ major ratione ΞΝ ad ΝΠ, ob ΝΠ ipſi γΥ æqualem. Atqui Νη eſt ad ΚΥ (ob ſimilia triangula) ſicut

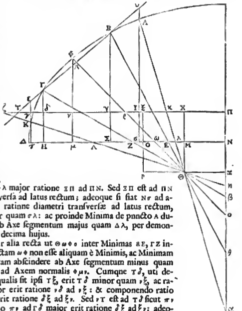


ΝΛ ad ΛΥ; adeoque ratio ΝΛ ad ΛΥ major eſt ratione ΞΝ *ad* ΝΠ: *ac dividendo in Hyperbola vel componendo in Ellipſi ratio* ΝΥ *ad* ΥΛ *major erit ratione* ΞΠ ad ΠΝ, hoc eſt ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum. Jam ſi faciamus ΝΥ ad rectam aliam ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum; erit hæc alia major quam ΛΥ, adeoque recta Minima de puncto Κ ducenda (per 9[am], 10[am] & 25[am] hujus) abſcindet ſegmentum Axis Vertici Δ adjacens, quod majus erit quam ΔΛ.

Porro ſi ducatur recta alia ad modum ipſius ΘλΑα: dico rectam Αλ non eſſe Minimam, Minimamque per punctum Α ductam abſcindere ab Axe ſegmentum majus quam Δλ. Demittatur enim ad Axem normalis Ασ, quæ producatur ad υ & Ι. Jam quoniam Τδ æqualis eſt ipſi Τξ, erit Τδ major quam ξΙ, ac ratio ipſius δΙ ad Ιξ major ratione ejuſdem ad Τδ; *ac componendo vel dividendo ratio* δξ *ad* ξΙ *major erit ratione* ΙΤ *ad* Τδ. Sed ΙΤ eſt ad Τδ ſicut Ιυ ad Γδ; adeoque ratio δξ ad ξΙ

major

major eſt ratione ΙΥ ad Γδ, ac mnlto major ratione ΙΑ ad Γδ; & rectangulnm ſub Γδ, δξ majus erit contento ſub ΑΙ, Ιξ. Rectangulum vero ſub Γδ, δξ æqnale eſt rectangulo ΠΝΟ; quare rectangulum ΠΝΟ majus eſt rectangulo ΑΙξ. Rectangulum autem ΠΝΟ æquale eſt rectangulo ΧΘΡ, quia ΝΟ eſt ad ΟΜ, hoc eſt Πξ ad ξΧ, ſicut ΞΠ ad ΠΝ ſive Ρξ ad ξΟ: rectangulum igitur ΧΘΡ majus eſt rectangulo ΑΙξ. Sed rectangulnm ΧΘΡ fit ſub ΧΘ, Χξ, quare ΘΧξ majus eſt rectangulo ΑΙξ, ac ratio ΘΧ ad ΑΙ major erit ratione Ιξ ad ξΧ. Sed ΘΧ eſt ad ΑΙ ſicut Χκ ad κΙ; ratio igitur Χκ ad κΙ major eſt ratione Ιξ ad ξΧ; ac componendo ratio ΙΧ ad Χκ minor erit ratinne ΙΧ ad Ιξ: recta igitur Χκ major eſt quam Ιξ, & applicatâ utrinque communi ξκ, erit Χξ major quam Ικ; unde ratio ΞΘ ad Χξ minor erit ratione ΞΘ ad Ικ. Sed ΞΘ eſt ad Ικ ſicut Ξα ad ΑΙ; quare ratio Ξα ad ΑΙ major eſt ratione ΞΘ ad Χξ. Verum ΞΘ æqualis eſt ipſi ΝΜ, ac Χξ ipſi ΜΟ; quare ratio Ξα ad ΑΙ major eſt ratione ΝΜ ad ΜΟ: & ΝΜ eſt ad ΜΟ ſicut ΞΝ ad ΝΠ; quare auferendo duas minores à duabus majoribus in Hyperbola, vel componendo eaſdem in Ellipſi, erit ratio αΝ ad Ασ major ratione ΞΝ ad ΝΠ. Sed αΝ eſt ad Ασ ſicut Νλ ad λσ; quare ratio Νλ ad λσ major eſt ratione ΞΝ ad ΝΠ: ac dividendo in Hyperbola vel componendo in Ellipſi,



erit ratio Νσ ad σλ major ratione ΞΠ ad ΠΝ. Sed ΞΠ eſt ad ΠΝ ut diameter tranſverſa ad latus rectum; adeoque ſi fiat Νσ ad aliam quandam in ratinne diametri tranſverſæ ad latus rectum, erit hæc alia major quam σλ: ac proinde Minima de pnncto Α ducenda abſcindet ab Axe ſegmentum majus quam Δλ, per demonſtrata in nona & decima hujus.

Quod ſi ducatur alia recta ut Θωφο inter Minimas ΑΕ, ΓΖ intermedia: dico rectam ωφ non eſſe aliquam è Minimis, ac Minimam de puncto φ ductam abſcindere ab Axe ſegmentum minus quam Δω. Demittatur ad Axem normalis φμν. Cumqne Τδ, uti demonſtravimus, æqualis ſit ipſi Τξ, erit Τδ minor quam νξ, ac ratio νδ ad δΤ major erit ratione νδ ad νξ: & componendo ratio νΤ ad Τδ major erit ratione δξ ad ξν. Sed νΤ eſt ad Τδ ſicut πν ad Γδ; quare ratio πν ad Γδ major erit ratione δξ ad ξν: adeoque rectangulum ſub πν, νξ majus erit rectangulo ſub Γδ, δξ. At φν major eſt quam πν, ac proinde rectangulum φνξ multo majns erit quam rectangulum Γδξ. Eſt autem rectangulum Γδξ (per jam demonſtrata) æqnale rectangulo ΝΠξ, quod quidem æquale eſt rectangulo ΧΘΡ: quare rectangulum ſub φν, νξ majus eſt rectangulo ΧΘΡ. Sed rectangulum ΧΘΡ fit ſub ΘΧ, Χξ: quare rectangulum φνξ majus eſt rectangulo ΘΧξ; ac ratio φν ad ΘΧ major eſt ratione Χξ ad ξν. Eſt antem φν ad ΘΧ ſicut νϱ ad ϱΧ, qnare ratio νϱ ad ϱΧ major eſt ratinne Χξ ad ξν; ac componendo ratio νΧ ad Χξ major eſt ratinne νΧ ad νϱ: unde conſtat Χξ minorem eſſe quam νϱ, ac rationem ΞΘ ad Χξ majorem eſſe ratione ΞΘ ad νϱ. Sed (ob ſimilia triangula) ΞΘ eſt ad νϱ ſicut Ξο ad φν: ratio igitur ΞΘ ad Χξ major eſt ratione Ξο ad φν. Cum autem ΞΘ ipſi ΜΝ, ac Χξ ipſi ΜΟ æqualis

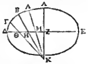
 eſt,

eſt, ratio ΜΝ ad ΜΟ major erit ratione ΞΟ ad ΦΥ: cumque ΜΝ eſt ad ΜΟ ſicut ΞΝ ad ΝΠ, erit ratio ΞΝ ad ΝΠ major ratione ΞΟ ad ΦΥ. Auferendo igitur duas minores à duabus majoribus in Hyperbola, vel componendo eaſdem in Ellipſi, erit ratio ΞΝ ad ΝΠ major ratione ΟΝ ad Φμ. Sed (ob ſimilia triangula) ΟΝ eſt ad Φμ ſicut Νω ad ωμ; quare ratio ΞΝ ad ΝΠ major eſt ratione Νω ad ωμ: ac dividendo in Hyperbola vel componendo in Ellipſi, erit ratio ΞΠ ad ΠΝ major ratione Νμ ad μω. Verum ΞΠ eſt ad ΠΝ ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum, adeoque ratio illa major erit ratione Νμ ad μω. Propterea ſi faciamus Νμ ad rectam aliam in ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum, minor erit illa quam μω; atque adeo Minima de puncto Φ ducenda (per 9^am & 10^am hujus) auferet ab Axe ſegmentum minus quam Δω: unde (per 25^am hujus) manifeſtum eſt Φω non eſſe aliquam è Minimis. Q. E. D.

PROPOSITIO XLVI.

SI duæ Minimæ *in alterutro Ellipſeos quadrante ducantur ad Axem majorem, quarum altera tranſeat per centrum; ac producantur ad occurſum: non duci poterit à puncto occurſûs ad eundem Sectionis quadrantem alia recta, è quâ abſcindat Axis* Minimam. *Ac ſi rectæ quælibet egrediantur ex illo puncto ad Sectionem inter* Minimam *& Verticem Axis majoris*: Minimæ *ab earundem extremitatibus ad Axem ductæ abſcindent Axis ſegmenta Vertici contermina, majora quidem quam ſegmenta ejuſdem ab ipſis egreſſis abſciſſa*; minora vero ſi ductæ fuerint ad alteras partes ſive verſus Axem minorem.

Sit Ellipſeos ΑΒΓ Axis major ΔΕ centrumque Ζ; & è centro erigatur normalis ad Axem ΖΑ, quæ producatur ad occurſum Minimæ alicujus ΒΗ etiam productæ in puncto Κ: ac ducatur alia recta ut ΚΘΓ. Dico quod ΘΓ non eſt Minima, quodque Minima è puncto Γ ad ΔΕ ducenda abſcindet ab Axe portionem majorem quam ΔΘ.



Si enim recta ΓΘ foret Minima, producta occurreret Minimæ ΒΗ intra angulum ΔΖΚ, juxta 40^mam hujus: ſed occurrit ei recta ΓΘ non niſi in puncto Κ; adeoque ΘΓ non eſt Minima. Quod vero Minima è puncto Γ ad Axem ΔΕ educta abſcindat ex eodem ſegmentum majus quam ΔΘ, hinc patet; quia (per 40^mam hujus) recta Minima per punctum Γ ducta occurrit ipſi ΒΗ, quæ etiam Minima eſt, intra angulum ΗΖΚ: unde manifeſtum eſt illam abſcindere majorem Axis portionem quam ΔΘ.

At ſi ducatur alia ut ΛΜΚ *ad alteram partem Minimæ* ΒΗ; *conſimili argumento patebit* ΛΜ *non eſſe Minimam, Minimamque de puncto* Λ *ad Axem ducendam (per eandem* 40^mam*) abſcindere minorem Axis portionem quam* ΔΜ: *quia occurret Minimæ* ΒΗ *intra angulum* ΗΖΚ. Q. E. D.

PROPOSITIO XLVII.

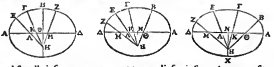
QUatuor rectæ Minimæ *in eadem Semi-ellipſi ductæ, & ab Axe majore abſciſſæ, non conveniunt in eodem puncto.*

Sit ΑΒΓΔ Ellipſis cujus Axis major ΑΔ. Dico quod ſi ducantur ab Axe ΑΔ ad Sectionem ΑΒΓΔ quatuor Minimæ, non convenient inter ſe in eodem puncto. Nam, ſi fieri poſſit, ducantur rectæ ΚΓ, ΛΕ, ΜΖ, ΘΒ quæ conveniant inter ſe in puncto Η. Jam vel aliqua ex his rectis normalis erit ſuper Axem ΑΔ, vel nulla earum normalis erit. Sit autem imprimis una earum ΒΘ Axi normalis.

Quoniam vero recta ΒΘ Minima eſt, atque etiam Axi ΑΔ normalis, erit (per 15^am hujus) punctum Θ centrum Sectionis: occurrat autem eidem recta Minima

ΚΓ

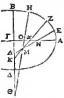
ΚΓ in puncto Η, & ducatur recta alia ΕΗ; ac (per 46um hujus) pars ejus ΕΑ non erit Minima. Poſuimus autem Minimam eſſe; quod abſurdum.



Quod ſi nulla ipſarum ΒΘ, ΚΓ, ΛΕ, ΜΖ normalis fuerit ſuper Axem ΑΔ, ſit centrum Ν inter rectas ΒΘ, ΓΚ poſitum; ac oportebit ducere tres Minimas ad eundem Sectionis Semiaxem, quæ concurrant in eodem puncto. Hoc autem fieri nequit, ut (ex 45ta hujus) manifeſtum eſt. Si vero Centrum Ν intermedium fuerit inter ΚΓ, ΛΕ; axi ΑΔ normaliter erigatur recta ΝΧ, & (per 40um hujus) concurſus ipſarum ΕΛ, ΖΜ erit intra angulum ΔΝΧ. Pariterque conſtabit Minimas ΒΘ, ΓΚ concurſuras intra angulum ΑΝΧ. Debent autem omnes concurrere in puncto Η: hoc antem abſurdum. Quatuor igitur Minimæ ad Sectionem ductæ non conveniunt in eodem puncto. Q. E. D.

PROPOSITIO XLVIII.

T*Res* Maximæ *ad eundem Ellipſeos quadrantem ductæ non concurrunt in eodem puncto.*



Sit Ellipſeos ΑΒΓ Axis major ΑΓ, minor ΒΔ. Dico tres Maximas, ad eundem Ellipſeos quadrantem ΑΒΓ ductas, non occurrere inter ſe in eodem puncto. Nam ſi fieri poſſit ducantur rectæ ΕΛ, ΖΚ, ΗΘ concurrentes in eodem puncto Μ. Quoniam vero ΕΛ, ΖΚ, ΗΘ Maximæ ſunt, erunt etiam ΕΝ, ΖΞ, ΟΗ (per 23^{am} hujus) tres Minimæ. Tres igitur Minimæ ad eundem Sectionis quadrantem ductæ concurrere debent in eodem puncto: id quod (per 45^{am} & 46^{am} hujus) abſurdum eſt. Quapropter tres Maximæ ad eundem quadrantem Sectionis ΑΒΓ ductæ non concurrere poſſunt in eodem puncto Μ. Q. E. D.

PROPOSITIO XLIX.

I*N omni Sectione Conicâ: ſi erigatur ſuper Axem normalis, ad punctum ejus quodlibet, modo non longius diſtet à Vertice Sectionis quam dimidio Lateris recti; ac capiatur punctum aliquod in eadem normali, unde egrediatur recta quævis ad alterum Sectionis latus, inter normalem & Verticem Sectionis: Recta* Minima *ab extremitate ejuſdem ducta non erit pars ejus; ſed abſcindet ex Axe portionem Vertici Sectionis adjacentem, majorem eâ quæ à rectâ de ſumpto puncto eductâ abſcinditur.*

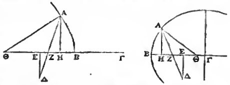


Imprimis Parabolæ ΑΒ ſit Axis ΒΓ; normalis vero ſit ΕΔ; ita ut ΕΒ, ſegmentum Axis à normali illâ abſciſſum, non majus ſit dimidio lateris recti; & in ipſa ΔΕ capiatur punctum quoddam Δ extra Axem; & agatur recta ΔΘΑ. Dico rectam ΑΘ non eſſe Minimam.

Demittatur enim normalis ΑΗ. Cumque ΕΒ non eſt major ſemilatere recto, erit ΕΗ minor ſemilatere recto. Fiat ΗΓ æqualis ſemilateri recto, ac ducatur ΑΓ: erit itaque ΑΓ (per 8^{vam} hujus) Minima, adeoque ΑΘ (per 24^{am} hujus) non erit Minima. Abſciudit enim recta Minima à puncto Α ducta ſegmentum Axis majus quam ΒΕ: cadit igitur remotius à Sectionis Vertice quam ΑΘ.

PROPOSITIO L.

SIT jam AB Hyperbola vel Ellipſis, cujus axis BΓ centrumque Γ; & Axi normalis erigatur ΔE, ita ut BE non major ſit ſemilatere recto: & è capto in recta ΔE puncto quovis Δ educatur recta aliqua, ut ΔZA. Dico rectam AZ non eſſe Minimam, Minimamque de puncto A egreſſam abſcindere portionem Axis majorem quam BZ. Oportet autem in Ellipſi normalem cadere in Axem majorem; eductamque occurrere eidem dimidio Axis in quem cadit normalis.



Demittatur enim normalis AH. Cumque BE non eſt major ſemilatere recto, ac ΓB ſemidiameter eſt tranſverſa, erit ratio diametri tranſverſæ ad latus rectum non major ratione ΓB ad BE. Sed ratio ΓH ad HE major eſt ratione ΓB ad BE: ratio igitur ΓH ad HE major eſt ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum. Fiat ideo HΓ ad HΘ ut diameter tranſverſa ad latus rectum; ac recta AΘ (per 9^{am} & 10^{mam} hujus) erit Minima. Recta itaque AZ (per 25^{am} hujus) non eſt Minima, *ſed Minima de puncto* A *ducta abſcindit portionem axis majorem quam* BZ. Q. E. D.

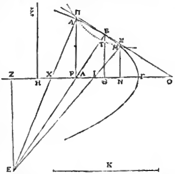
PROPOSITIO LI.

QUod ſi normalis dicta abſcindat Axis ſegmentum majus ſemilatere recto: Dico rectam aſſignari poſſe, cum quâ comparatione factâ, ſi puncti ſumpti ab Axe diſtantia, ſive longitudo normalis, major fuerit aſſignatâ, nulla omnino recta ab extremitate normalis ad Sectionem duci poteſt, è qua abſcindat Axis* Minimam: *ſed* Minima, *ab extremitate cujuſcunque rectæ ad Sectionem ex eo puncto egreſſæ, abſcindet ex Axe Segmentum Vertici ſectionis conterminum, majus quam ipſa egreſſa. Quod ſi normalis æqualis fuerit aſſignatæ, duci poteſt ab extremitate ejus una ſola recta è qua abſcindatur* Minima: Minimæ *vero, ab extremitatibus cæterarum omnium ab eodem puncto egredientium ductæ, abſcindent ſegmenta Axis vertici adjacentia, majora quam ab ipſis egreſſis abſciſſa. Si vero normalis minor fuerit aſſignatâ, duæ tantum rectæ duci poſſunt è quibus abſcindat Axis* Minimas: Minimæque *ab extremitatibus egredientium ductæ, dictaſque duas* Minimas *interjacentes, abſcindent ab Axe portiones Vertici Sectionis conterminas, minores quam quæ ab ipſis egreſſis abſcinduntur: Quæ vero ducuntur ab extremitatibus cæterarum egredientium, inter duas illas* Minimas *non intermediarum, abſcindent portiones Axis majores quam ab ipſis egreſſis abſciſſæ. Oportet autem in Ellipſi normalem in Axem majorem demitti.*

Imprimis autem ſit ABΓ Parabola, cujus Axis ΓZ; ſuper quem erigatur EZ normaliter: & ſit ſegmentum Axis ΓZ majus dimidio lateris recti. Dico quod ſi capiantur puncta in ipſa EZ, à quibus egrediantur ad Sectionem rectæ, ea omnia neceſſariò eventura, prout declaravimus in hac Propoſitione.

Quoniam

Quoniam ΓΞ major eſt dimidio lateris recti, ſit ZH dimidium lateris recti, ac dividatur ΓH in puncto Θ, ita ut ſegmentum ΘH duplum ſit ipſius ΘΓ; & erigatur normalis ΘB, ac fiat recta quædam K ad ΘB ſicut ΘH ad HZ: ſumptoque in recta ΞZ puncto E, ſit primum ZE major quam K. Dico quod non duci poſſit è puncto E recta aliqua è qua abſcindat Axis Minimam: exempli gratia, ductâ rectâ EΛB, dico BΛ non eſſe Minimam. Etenim K eſt ad ΘB ut ΘH ad HZ, & K minor eſt quam ZE; quare ratio ZE ad BΘ, hoc eſt ZΛ ad ΛΘ major eſt ratione ΘH ad HZ, ac componendo ratio ZΘ ad ΘΛ major erit ratione ΘZ ad ZH: adeoque ZH, quæ æqualis eſt dimidio lateris recti, major eſt quam ΘΛ, & ΘΛ minor eſt dimidio lateris recti. Igitur Minima de puncto B ducta (per 8^{vam} hujus) cadet propius puncto Z, ac proinde recta BΛ (per 24^{am} hujus) non erit Minima. Ac ſi ducatur alia recta ut EIM: Dico quoque IM non eſſe aliquam è Minimis. Ducatur enim per punctum B Tangens Sectionis BO; demiſſaque normalis MN producatur ad Ξ. Ob Parabolam vero erit (per 35^{am} primi) ΓO ipſi ΓΘ æqualis; adeoque ΘO dupla erit ipſius ΘΓ. ΘH autem dupla eſt ipſius ΘΓ, quare ΘO æqualis eſt ipſi ΘH. Hinc conſequitur ΘH majorem eſſe quam ON, ac rationem ΘN ad NO majorem eſſe ratione NΘ ad ΘH: ac componendo ratio ΘO ad ON, hoc eſt BΘ ad NΞ major erit ratione NH ad HΘ, adeoque rectangulum ſub BΘ, ΘH majus erit contento ſub ΞN, NH, ac multo majus contento ſub MN, NH. Rectangulum vero ſub EZ, ZH majus eſt contento ſub BΘ, ΘH; quoniam (per nuper demonſtrata) ratio EZ ad BΘ major eſt ratione ΘH ad ZH; adeoque rectangulum ſub EZ, ZH majus eſt contento ſub MN, NH; unde ratio ZE ad MN, ſive ZI ad IN, major eſt ratione NH ad HZ: ac componendo ratio ZN ad NI major ratione NZ ad ZH. Quocirca HZ major erit quam NI. Sed HZ æqualis eſt dimidio lateris recti; quare NI minor eſt dimidio lateris recti, ac proinde MI non eſt aliqua è Minimis; ſed Minima de puncto M ad Axem ducta (per 8^{vam} & 24^{am} hujus) propior erit puncto Z.



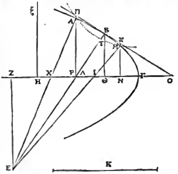
Jam ſi ducatur alia ut AXE; dico quod AX non eſt Minima. Demittatur enim normalis AP quæ producatur ad Π. Quoniam vero ΘO æqualis eſt ipſi ΘH, ut nuper diximus, conſequitur rectam ΘO majorem eſſe quam PH; adeoque ratio PΘ ad ΘO minor erit ratione PΘ ad PH; ac componendo ratio PO ad OΘ minor erit ratione ΘH ad PH. Sed PO eſt ad OΘ ut PΠ ad BΘ; quare ratio PΠ ad BΘ minor eſt ratione ΘH ad PH: unde rectangulum ſub PΠ, PH minus erit rectangulo ſub BΘ, ΘH, ac rectangulum ſub AP, PH multo minus erit contento ſub BΘ, ΘH. Demonſtravimus autem rectangulum ſub EZ, ZH majus eſſe contento ſub BΘ, ΘH; quapropter rectangulum ſub AP, PH minus erit rectangulo ſub EZ, ZH. Ratio igitur AP ad EZ minor eſt ratione ZH ad HP. Sed AP eſt ad EZ ut PX ad XZ, adeoque ratio PX ad XZ minor eſt ratione ZH ad HP; ac invertendo ratio ZX ad XP major erit ratione PH ad HZ: dein componendo ratio ZP ad PX major erit ratione PZ ad ZH. Hinc liquet ZH majorem eſſe quam PX. Sed ZH æqualis eſt dimidio lateris recti, ergo PX minor eſt dimidio lateris recti. Recta igitur AX non eſt aliqua è Minimis, ſed Minima de puncto A ducta (per 8^{vam} & 24^{am} hujus) propius puncto Z cadet. Igitur ſi normalis EZ major fuerit quam recta K, nulla duci poteſt ad Sectionem recta per punctum E è qua abſcindat Axis Minimam.

Quod ſi ZE æqualis fuerit ipſi K. Dico quod non niſi una ſola recta, è qua abſcindatur Minima, de puncto E ad ſectionem duci poterit: quodque Minimæ ab

 extre-

extremitatibus reliquarum ex eodem E egredientium ductæ remotiores ſunt à Vertice Γ.

Quoniam enim ΘH eſt ad HZ ſicut K, vel eidem æqualis EZ, ad BΘ, & ZA eſt ad AΘ in eadem ratione, erit ΘH ad HZ ut ZA ad AΘ; *ac componendo* ΘZ *erit ad* HZ *ut* ΘZ *ad* AΘ: quare ZH æqualis eſt ipſi AΘ. Sed ZH æqualis eſt dimidio lateris recti, adeoque & AΘ dimidium eſt lateris recti; ac proinde AB (per 8^{vam} hujus) Minima eſt. Dico quoque quod non duci poterit per punctum E alia recta è qua abſcindat Axis Minimam. Ducatur enim recta aliqua alia ut ME, & normalis ſit MN ad Ξ producenda; ſitque BO Tangens Sectionis: & juxta modum præmonſtratum conſtabit, rectangulum ſub BΘ, ΘH quod æquale eſt rectangulo ſub EZ, ZH majus eſſe rectangulo ſub MN, NH. Hinc iiſdem argumentis, quibus præcedentia, probabitur ZH æqualem dimidio lateris recti majorem eſſe quam IN: adeoque IM non eſſe Minimam, ſed Minimam de puncto M ductam cadere verſus Z. Pariter ſi ducatur alia ut AXE, AX non erit Minima; ſed Minima de puncto A ducta cadet quoque verſus Z. Demiſſâ enim normali AP & ad Π productâ, eodem modo demonſtrabitur rectangulum ſub AP, PH minus eſſe rectangulo ſub BΘ, ΘH; quod æquale eſt rectangulo ſub EZ, ZH: unde conſtabit, juxta nuper oſtenſa, rectam XP minorem eſſe quam HZ, hoc eſt dimidio lateris recti. Proinde AX non erit aliqua è Minimis, ſed Minima per A ducta cadet verſus Z.



Sit jam EZ minor quam K. Dico duci poſſe de puncto E ad ſectionem ABΓ duas rectas è quibus abſcindat Axis Minimas: ac, ſi ab extremitatibus rectarum inter has duas intermediarum ducantur Minimæ, abſcindere illas ſegmenta Axis minora quam quæ abſcindunt ipſæ rectæ ex E eductæ. Cæteræ vero rectæ exteriores auferent ſegmenta Axis majora ſegmentis quæ à Minimis ab earundem extremitatibus ad axem eductis abſcinduntur.

Nam cum ZE minor eſt quam K, erit ratio EZ ad ΘB minor ratione ipſius K ad ΘB, hoc eſt ratione ΘH ad HZ; adeoque rectangulum ſub EZ, HZ minus erit rectangulo ſub BΘ, ΘH. Fiat igitur rectangulum ſub TΘ, ΘH æquale rectangulo ſub EZ, ZH; & ſit ξH normalis ipſi ZH: & per datum punctum T, Aſymptotis ξH, HΓ (per quartam ſecundi) deſcribatur Hyperbola, quæ quidem ſectio occurrat Parabolæ in punctis A, M. Jungantur rectæ EA, EM, ac demittantur normales AP, MN. Quoniam vero ſectio ATM Hyperbola eſt, cujus Aſymptoti ξH, HΓ; ac ducuntur à ſectione illa ad angulos rectos AP, MN, TΘ: propterea (per 12^{am} II^{di}) rectangulum ſub MN, NH æquale erit contento ſub TΘ, ΘH, quod quidem æquale eſt rectangulo ſub EZ, ZH. Hinc MN erit ad EZ ſicut ZH ad HN. Sed MN eſt ad EZ ſicut NI ad IZ, quare ZH eſt ad HN ſicut NI ad IZ; ac componendo ZN eſt ad HZ ſicut NZ ad NI: unde NI ipſi ZH ſive dimidio lateris recti æqualis eſt. Recta igitur MI (per 8^{vam} hujus) Minima eſt. Pari modo conſtabit ipſam AX Minimam eſſe. Sunt itaque MI, AX duæ Minimæ concurrentes inter ſe in puncto E. Ac ſi educatur ex E ad Sectionem recta quævis alia inter AE & EM, & ab ejuſdem extremitate ducatur Minima, cadet ea propius Vertici Sectionis. Quod ſi educatur recta aliqua extra ipſas AE, EM, cadet Minima ejus verſus partes à Vertice Sectionis remotiores. Hæc autem omnia demonſtrantur ex 44ta hujus libri. Q. E. D.

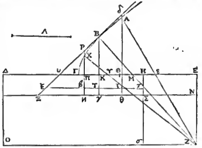
PROPO-

PROPOSITIO LII.

SI vero Sectio propoſita ABΓ fuerit Hyperbola vel Ellipſis, Axe EΓΔ centroque Δ deſcripta; ac ſit ZE Axi normalis, ita ut EΓ major ſit dimidio lateris recti. Dico eadem omnia in his conſequi, quæ in Parabola.

Quoniam ΔΓ ſemidiameter tranſverſa eſt, ac ΓE major eſt ſemiſſe lateris recti, erit ratio ΔΓ ad ΓE minor ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum: atque adeo, ſi faciamus ΔH ad HE ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum, cadet punctum H inter Γ & E. Inter ipſas ΔH, ΔΓ inveniantur duæ mediæ proportionales ut ΔΘ, ΔK; & Axi normalis ſit KB: ac fiat recta quædam Λ ad ipſam KB in ratione compoſita ex ratione ΔE ad EH & ratione HK ad KΔ.

Primum autem ſit EZ major quam Λ. Dico impoſſibile eſſe ducere, de puncto Z ad Sectionem, rectam aliquam è qua abſcindat Axis Minimam; ſed Minimas, ab extremitatibus quarumcunque rectarum de Z ad ſectionem egredientium, abſcindere Axis ſegmenta, ſectionis Vertici contermina, majora abſciſſis ab ipſis rectis de Z eductis. Jungatur enim ZMB: Dico BM non eſſe Minimam. Fiat ZN ad NE ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum, ac ducantur duæ Zσ O, NΣΞ Axi EΓΔ parallelæ, aliæque duæ HΣσ, ΔO ipſi EZ parallelæ. Quoniam vero EZ major eſt quam Λ, erit ratio EZ ad KB major ratione ipſius Λ ad KB: componitur autem ratio EZ ad KB ex ratione ZB ad EN & ratione Kγ ad KB, ob Kγ ipſi EN æqualem. Ratio vero ipſius

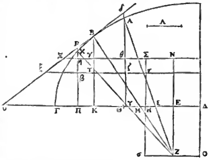


Λ ad BK, ex hypotheſi, componitur ex ratione ΔE ad EH & ratione HK ad KΔ: adeoque ratio compoſita ex rationibus ZE ad EN & Kγ ad KB major eſt compoſita ex rationibus ΔE ad EH & HK ad KΔ. Sed ZE eſt ad EN ſicut ΔE ad EH, quia utraque ZN ad NE & ΔH ad HE eſt in ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum. Reliqua igitur ratio Kγ ad KB major eſt ratione HK ad KΔ: unde rectangulum ſub Kγ, KΔ majus erit contento ſub KB, HK. Rectangulum autem ſub Kγ, KΔ eſt rectangulum ΔKγ, adeoque rectangulum ſub KB, HK minus eſt rectangulo ΔKγ. Fiat rectangulum γKH, nempe quod continetur ſub Kγ, γΣ, commune: ac rectangulum ſub Bγ, γΣ minus erit rectangulo ΔHΣ. Eſt vero rectangulum ΔΣ æquale rectangulo σN, quia ZN eſt ad NE ſicut ΔH ad HE; quare rectangulum ſub Bγ, γΣ minus eſt rectangulo σN. Probavimus autem, in demonſtrandâ 45ta hujus, quod eidem æquale eſſe debuit, adeoque BM non eſt aliqua è Minimis; ſed Minima de puncto a educta abſcindet portionem Axis Vertici ſectionis adjacentem majorem quam ΓM.

Jam vero ſi ducatur recta alia ut ZΥX, extra punctum B: dico ipſam quoque XΥ non eſſe Minimam, ſed Minimam de puncto X ductam abſcindere Axis ſegmentum Vertici ſectionis conterminum, majus quam ΓΥ. Ducatur ſectionis Tangens ad punctum B ut BΞ, & Axi normalis XΠ, quæ producatur ad P. Quoniam vero ratio Kγ ad KB major eſt ratione HK ad KΔ, fiat TK ad KB ſicut HK ad KΔ, ac per T axi EΓΔ parallela ducatur ξTτ. Cum autem recta BυξΞ tangit ſectionem, ac BK Axi ΔυK normalis eſt; erit rectangulum ſub KΔ, Δυ (per 37mam primi) æquale quadrato ex ΔΓ. Eſt igitur KΔ ad ΔΓ ſicut ΔΓ ad Δυ, ac tertia proportionalis ipſis KΔ, ΔΓ eſt Δυ, uti tertia proportionalis ipſis HΔ, ΔΘ eſt recta KΔ: ac KΔ eſt ad ΔΓ ſicut ΔH ad ΔΘ, *quia ΔK, ΔΘ ſunt duæ mediæ proportionales inter ipſas ΔH, ΔΓ*; quapropter HΔ eſt ad ΔK ſicut ΔK ad Δυ: & auferendo duas minores à duabus ma-

 joribus

joribus, reliqua HK ad reliquam Kυ erit ut HΔ ad ΔK. Sed HΔ eſt ad ΔK ſicut TB ad BK, quia fecimus TK ad KB ſicut HK ad KΔ; adeoque HK erit ad Kυ ſicut TB ad BK. Verum TB eſt ad BK ſicut Tξ ad Kυ; quare HK eſt ad Kυ ut Tξ ad Kυ; unde HK ipſi Tξ æqualis eſt. Sed HK æqualis eſt ipſi Tτ; adeoque Tτ æqualis eſt ipſi Tξ. Hinc fiet recta ξβ minor quam Tτ, ac ratio Tβ ad βξ major erit ratione ipſius Tβ ad Tτ; & componendo ratio Tξ ad ξβ major erit ratione βτ ad Tτ. Sed Tξ eſt ad ξβ ut BT ad Pβ, ac proinde ratio TB ad Pβ major eſt ratione βτ ad Tτ. Rectangulum igitur ſub BT, Tτ majus eſt rectangulo ſub Pβ, βτ; adeoque multo majus rectangulo ſub Xβτ. Quinetiam cum HK eſt ad KΔ ſicut TK ad KB, erit contentum ſub HK, KB æquale rectangulo ſub KΔ, TK; & facto rectangulo ſub TK, KH communi, erit rectangulum ſub BT, Tτ æquale rectangulo ΔHτ. Eſt autem rectangulum ſub BT, Tτ majus contento ſub Xβ,



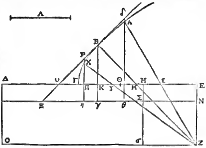
βτ; adeoque rectangulum ΔHτ majus eſt rectangulo ſub Xβ, βτ: ac facto rectangulo ſub βη, ηΣ communi, erit in Hyperbola rectangulum ſub Xη, ηΣ minus utroque rectangulo ΔHτ, βηΣ ſimul ſumpto: vel in Ellipſi, ſublato rectangulo BηΣ, erit differentia rectangulorum ΔHτ, βηΣ major contento ſub XηΣ, unde rectangulum XηΣ multo minus erit rectangulo ΔHΣ. Sed rectangulum ΔHΣ æquale eſt rectangulo ΣNZ, quia ZN eſt ad NE ſicut ΔH ad HE; rectangulum itaque ſub Xη, ηΣ minus eſt rectangulo ΣNZ. Oſtendimus autem in demonſtratione propoſitionis 45ª hujus, quod eidem æquale eſſe debuit; adeoque recta XT non eſt Minima: ac Minima de puncto X ducta abſcindet ab Axe portionem Vertici conterminam, majorem quam ΓY.

Præterea ſi ducatur alia recta ut ZεA: Dico quod Aε non eſt Minima, quodque Minima de puncto A ducta abſcindit Axis portionem majorem quam Γε. Demittatur enim normalis Aθ, quæ producatur ad δ. Demonſtravimus autem rectam Tτ æqualem eſſe ipſi Tξ, adeoque τζ minorem eſſe quam Tξ; unde ratio Tζ ad ζτ major erit ratione ζT ad Tξ; ac componendo ratio Tτ ad τζ major ratione ζξ ad Tξ. Sed ζξ eſt ad Tξ ſicut δζ ad BT; adeoque ratio Tτ ad τζ major eſt ratione δζ ad BT: ac rectangulum ſub BT, Tτ majus erit rectangulo ſub δζ, ζτ. Unde argumento nuper uſurpato ſimili, demonſtrabitur rectangulum ſub Aθ, θΣ minus eſſe rectangulo ΣNZ; ac propterea (per 45ᵃᵐ hujus) conſtabit Aε non eſſe Minimam; ſed Minimam de puncto A eductam abſcindere portionem Axis majorem quam Γε.

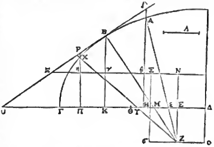
Ponamus jam normalem ZE æqualem eſſe ipſi A. Dico quod una ſola recta duci poſſit de puncto Z, è quâ abſcindatur Minima: quodque Minimæ ab extremitatibus reliquarum omnium ab eodem puncto eductarum abſcindunt ex Axe portiones majores quam quæ auferuntur ab ipſis eductis.

Ad modum ſuperius dictum ducatur recta BK, & jungatur ZB: & erit ZE ad BK ſicut A ad BK. Ratio autem ZE ad BK componitur ex ratione ZE ad EN & ratione Kγ, ipſi EN æqualis, ad BK: ratio vero ipſius A ad BK componitur ex ratione ΔE ad EH & ratione HK ad KΔ, per conſtructionem ſuperius traditam. Ratio igitur compoſita ex rationibus ZE ad EN & Kγ ad KB æqualis eſt compoſitæ ex rationibus ΔE ad EH & HK ad KΔ. Sed ratio ZE ad EN æqualis eſt rationi ΔE ad EH; adeoque ratio Kγ ad KB eadem eſt ac ratio HK ad KΔ; ac proinde rectangulum ſub Kγ, KΔ æquale erit contento ſub KB, HK: & rectangulo ſub Kγ, KH communi

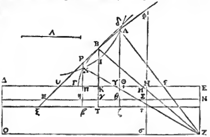
mnni facto, erit in Hyperbola ſumma vel in Ellipſi differentia, hoc eſt rectangulum ſub Β γ, γ Σ, æqualis rectangulo Δ Η Σ, quod rectangulo Ζ Ν Σ etiam æquale eſt; quare rectangulum Ζ Ν Σ æquale eſt rectangulo ſub Β γ, γ Σ. Probavimus autem (in demonſtratione Prop 45ᵃ hujus) hoc ita ſe habere in Minimis: recta igitur Β Μ Minima eſt. Dico quoque quod non duci poſſit de puncto Ζ recta alia è qua abſcindat Axis Minimam. Ductâ enim aliâ ut Ζ Υ Χ, ac demiſſa normali Χ Π, modo ſuperius monſtrato patebit rectam γ Σ æqualem eſſe ipſi γ Ξ. Sed Ξ η minor eſt quam γ Σ; adeoque ratio η γ ad Ξ η major eſt ratione ejuſdem ad γ Σ; ac componendo γ Ξ ad Ξ η major erit ratione η Σ ad Σ γ. Verum γ Ξ eſt ad Ξ η ſicut δ γ ad Ρ η;



quare ratio δ γ ad Ρ η major eſt ratione η Σ ad Σ γ: proinde rectangulum ſub δ γ, γ Σ majus erit rectangulo ſub Ρ η, η Σ, ac multo majus rectangulo ſub Χ η, η Σ. Demonſtratum autem eſt rectangulum ſub Β γ, γ Σ æquale eſſe rectangulo Σ Ν Ζ; propterea rectangulum ſub Χ η, η Σ minus erit rectangulo Σ Ν Ζ. At (per 45ᵗᵃᵐ hujus) eidem æquale eſſe debuit, adeoque recta Χ Υ non eſt Minima. Minima vero de puncto Χ educta abſcindet ex Axe ſegmentum Sectionis Vertici adjacens ipſâ Γ Υ majus. Ac pari argumento demonſtrabitur Α ε non eſſe Minimam; ſed Minimam de puncto Α ductam abſcindere Axis portionem majorem quam Γ ε.

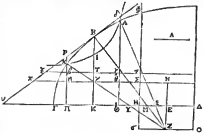


Denique ſit Ζ Ε ipſâ Λ minor: Dico duci poſſe de puncto Ζ duas tantum rectas è quibus abſcindat Axis Minimas; Minimas autem de punctis in Sectione, inter illas duas eductas intermedias, abſcindere portiones Axis minores abſciſſis à rectis è puncto Ζ egredientibus: Minimas vero, ab extremitatibus cæterarum extra iſtas duas è puncto Ζ egreſſarum, abſcindere ſegmenta Axis Vertici adjacentia, majora quam quæ ex eodem abſcindunt ipſæ egreſſæ.



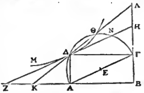
 Quoniam

Quoniam enim ratio ZE ad BK minor eſt ratione A ad BK; per ſuperius demonſtrata, conſtabit rationem Kγ ad KB minorem eſſe ratione HK ad KΔ, ac rectangulum ΣNZ minus eſſe rectangulo ſub Bγ, γΣ. Fiat igitur rectangulum ſub γι, γΣ æquale rectangulo ΣNZ, & per punctum ι deſcribatur Hyperbola Aſymptotis ΞΣ, ΣHΦ; quod quidem fiet juxta 4^am^ ſecundi. Sit Hyperbola illa AιX, demiſſiſque normalibus Aθ, Xη, erit utrumque rectangulum ſub Aθ, θΣ ac ſub Xη, ηΣ æquale rectangulo ΣNZ; ac proinde (juxta præmiſſa in hac propoſitione) conſtabit rectas Aι, XΥ eſſe duas Minimas, quæ productæ occurrent in puncto Z. Demonſtravimus autem (in 45ta hujus) quod, ſi hoc ita ſe habeat, ac ſi ducatur recta aliqua alia è puncto Z, non abſcindi poſſit ex eadem Minima. Nam ſi è puncto Z egrediatur recta inter ipſas Aι, XΥ, & ab extremitate ejus ducatur ad Axem Minima; abſcindet illa Axis portionem Vertici conterminam, minorem ſegmento à rectâ per Z ductâ abſciſſo. Contrarium autem fiet in Minimis ab extremitatibus reliquarum eductarum, quæ abſcindent Axis portiones majores. Quæ vero dicta ſunt de Axe Ellipſeos intelligi debent de Axe majori. Q. E. D.



Interpretis Arabis Scholion.

In ſequentibus hujus libri requiritur inventio duarum mediarum proportionalium inter duas rectas datas, idemque poſtulat Apollonius *in hac propoſitione. Modus autem effectionis hic eſt. Sint duæ rectæ* AB, BΓ; *ac ſi æquales fuerint, manifeſtum eſt terminos interpoſitos etiam iiſdem æquales eſſe. Quod ſi inæquales fuerint, ſit* AB *major; & conveniant ad angulos rectos in* B, *ac producantur indefinitè. Completo autem parallelogrammo* ABΓΔ, *jungatur* AΓ *quæ biſecetur in puncto* E; *ac centro* E *deſcribatur Circulus* ABΓΔ *parallelogrammo circumſcriptus; & per* Δ *agatur recta* ZΔH *ipſi* AΓ *parallela, quæ diviſa erit bifariam in puncto* Δ, *ob æquales* AE, EΓ: *interſecabit vero arcum* ΔΓ, *quia* ΓΔ *major eſt quam* ΔA: *occurrat autem ei in puncto* N. *Deſcribatur (juxta quartam* II^di^) *per punctum* Δ *Aſymptotis* BZ, BH *Hyperbola* ΘΔM; *& erit* ZH *(per nonam* II^di^) *Tangens ejuſdem, ob æquales* ZΔ, ΔH. *Ac manifeſtum eſt Sectionem illam Circulo occurrere inter puncta* Δ, N; *aliter enim caderet ſegmentum arcus* ΔN *& ſubtenſa ejuſdem inter ſectionem Tangentemque ejus, quod (per* 32^dam^ *primi) fieri non poteſt. Neque erunt interſectiones cum circulo* ABΓΔ *(per* 33^am^ II^di^) *plures quam duæ. Occurrat igitur in punctis* Δ, Θ; *ac juncta* ΔΘ *producatur utrinque ad* K, Λ; *ipſæque* ΔK, ΘΛ *(per* 8^vam^ II^di^) *æquales erunt. Dico quod inter rectas* AB, BΓ *duæ mediæ proportionales ſunt* AΓ, KA.



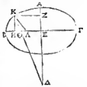
Quoniam ΔK *ipſi* ΘΛ *æqualis eſt, erit rectangulum ſub* ΔΛ, ΛΘ, *hoc eſt (ob Circulum) rectangulum ſub* BΛ, ΛΓ, *æquale rectangulo ſub* ΘK, KΔ, *ſive ſub* BK, KA; *adeoque* ΛΓ *erit ad* KA *ſicut* BK *ad* BΛ. *Sed* BK *eſt ad* BΛ *ſicut* ΔΓ, *hoc eſt* AB *ad* ΛΓ; *atque etiam in eâdem eſt ratione* KA *ad* AΔ, hoc eſt BΓ. *Hoc autem fit ob ſimilitudinem triangulorum* ΛBK, ΛΓΔ, ΔAK. *Proinde* AB *erit ad* ΛΓ *ſicut* ΛΓ *ad* KA *ac* KA *ad* BΓ; quare ΛΓ, KA ſunt duæ mediæ proportionales inter AB, BΓ. Q. E. D.

PROPO-

PROPOSITIO LIII.

SI capiatur, extra dimidium Ellipſis ab Axe majore diviſæ, punctum quoddam, à quo normalis ad Axem demiſſa cadat ſuper centrum Sectionis; ac fuerit ratio hujus normalis ſemiaxe minore auctæ ad ſemiaxem minorem, non minor ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum: Ex hoc puncto egredi nequit recta aliqua ad Sectionem, cujus portio intercepta inter Axem & Sectionem ſit Minima; *ſed* Minima *ab extremitate alicujus ductæ cadet ad eas partes ejus quæ à Vertice Axis majoris remotiores ſunt.*

Sit ΒΑΓ ſemi-ellipſis, Axe majore ΒΓ; & detur extra illam punctum quodvis Δ, unde demiſſa uormalis cadat ſuper Sectionis centrum; hoc eſt, ducta ΔΕ ad angulos rectos ipſi ΓΒ, ſit punctum Ε, ſuper quod cadit, centrum Sectionis: & ſit ratio ΔΑ ad ad ΑΕ uon minor ratioue diametri tranſverſæ ad latus rectum. Dico nou duci poſſe de puncto Δ rectam aliqnam, cujus portio intercepta inter Sectiouem & Axem ΒΓ Minima ſit; ac ſi educatur ex eo recta quælibet ΔΚ, Minima è puncto Κ ducta cadet verſus Ε, *reſpectu ipſius* ΔΚ.

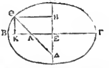


Ducantur normales ΚΗ, ΚΖ, ac ſit ratio ΔΑ ad ΑΕ non minor ratione diametri trauſverſæ ad latus rectum; erit autem ratio ΔΑ ad ΑΕ minor ratione ΔΖ ad ΖΕ; adeoque ratio ΔΖ ad ΖΕ ſive ΕΗ ad ΗΘ major erit ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum. Fiat itaque ΕΗ ad ΗΛ ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum; ac recta ΚΛ (per decimam hnjus) Minima erit, adeoque recta ΚΘ (per 25[am] hujus) non eſt Minima: ſed recta Minima per Κ ducta cadet propius centro Ε quam recta ΚΛ. Q. E. D.

PROPOSITIO LIV.

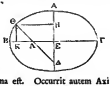
SI capiatur punctum quodvis extra dimidium Ellipſeos ab Axe majore diviſæ, à quo demiſſa normalis ſuper centrum cadat; ac ſit ratio hujus normalis una cum ſemiaxe minore ſimul ſumptæ ad ſemiaxem minorem, minor ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum: non poteſt exire ab hoc puncto, ad alterutrum Quadrantem Ellipſeos, niſi una ſola recta, cujus portio intercepta inter Axem majorem & ſectionem ſit Minima: *è nullâ vero reliquarum ad idem latus eductarum abſcindi poteſt* Minima. *Sed ſi propior fuerit Vertici ſectionis quam* Minima *illa,* Minima *ab ejuſdem extremitate ducta remotior erit à Vertice; è contra vero, ſi remotior à Vertice fuerit,* Minima *ab extremitate ejus educta cadet Vertici propius.*

Sit ΒΑΓ ſemi-ellipſis, Axe majore ΒΓ; & detur extra illam punctum aliquod Δ, à quo normalis cadat ſuper ceutrum; ut ΔΕ cadens ſuper centrum Sectionis Ε, ad augulos rectos Axi ΓΒ: ſitque ratio ΔΑ ad ΑΕ minor ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum. Dico quod ad eundem ſectionis quadrantem non niſi una recta duci poſſit de puncto Δ, cujus portio inter Curvam ΒΑΓ & Axem ΒΓ intercepta ſit aliqua è Minimis. In reliquis vero de puncto Δ eductis; ſi ab extremitatibus earum quæ Vertici Β propiores ſunt, agautur Mi-



nimæ,

nimæ, cadent eæ remotiores à puncto Β: Minimæ vero, ab extremitatibus rectarum ex Δ exeuntium punctoque Β remotiorum, propiores erunt Vertici quam ipſæ eductæ.

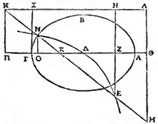


Quoniam euim ratio ΔΛ ad ΛΕ minor eſt ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum; fiat ΔΗ ad ΗΕ ut diameter tranſverſa ad latus rectum, & ducantur ΗΘ, ΘΚ ipſis ΒΓ, ΑΕ parallelæ; & jungatur ΘΛΔ. Dico ΘΛ, partem interceptam ipſius ΘΔ, eſſe Minimam. Nam ΔΗ eſt ad ΗΕ ſicut ΕΚ ad ΚΛ, quare ΕΚ eſt ad ΚΛ ut diameter tranſverſa ad latus rectum; punctum autem Ε eſt centrum ſectionis: quare (per 55^{am} hujus) ΘΛ Minima eſt. Occurrit autem Axi minori in puncto Δ; adeoque ſi exeat de puncto Δ recta alia præter ΔΘ, quæ remotior fuerit eâ à Vertice Β, Minima ab extremitate ejus ducenda propior erit puucto Β quam recta ipſa. Quod ſi minus diſtet à Vertice Β quam ΔΘ, Minima ab ejus extremitate ducta (per 46^{am} hujus) occurret Axi majori in puncto à Vertice Β remotiori.

PROPOSITIO LV.

SI ſumatur punctum aliquod extra dimidium Ellipſis ab Axe majore biſectæ, à quo demiſſa normalis non cadat ſuper centrum: Duci poterit ab eodem recta occurrens alteri ſemiſſi Axis majoris in quem non cadit normalis, cujus portio intercepta inter ſectionem & Axem majorem ſit Minima; *nec ab eodem puncto duci poteſt alia recta occurrens eidem reliquo ſemiaxi, è qua abſcindatur* Minima.

Sit ΑΒΓ Ellipſis, Axe majore ΑΓ ac centro Δ; & ſit datum punctum Ε, è quo demittatur Axi ΑΓ uormalis ΕΖ; uec ſit centrum iu puncto Ζ. Dico quod duci poſſit ex Ε recta occurrens ipſi ΔΓ, ita ut iuter ſectionem ΑΒΓ & ſemiaxem ΔΓ intercipiatur Minima. Fiat ΕΗ ad ΗΖ ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum; atque etiam in eadem ratione fiat ΔΘ ad ΘΖ: ac per Η ipſi ΑΓ parallela ducatur ΚΛ, uti per Θ ipſi ΕΖ parallela recta ΜΘΛ: deiu per datum punctum Ε, Aſymptotis ΜΛ, ΛΚ (per 4^{am} ſecundi) deſcribatur Hyperbola. Sit Hyperbola illa ΕΝ, occurrens Ellipſi in puncto Ν, jungaturque ΝΞΕ. Dico ΝΞ Minimam eſſe.



Producatur ΕΝ ad occurſum utriuſque Aſymptoti ΜΛ, ΛΚ; conveniat autem iis in puuctis Μ, Κ, ac demittantur ad ΑΓ normales ΝΟ, ΚΠ: & erit (per 8^{vam} ſecundi) ΜΕ ipſi ΚΝ æqualis; adeoque ΖΘ ipſi ΠΟ æqualis eſt. Eſt autem ΕΗ ad ΗΖ ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum, & ut ΕΗ eſt ad ΗΖ ita ΖΠ ad ΠΞ; adeoque ΖΠ eſt ad ΠΞ ut diameter tranſverſa ad latus rectum. Sed ΔΘ eſt ad ΘΖ in eadem ratioue diametri tranſverſæ ad latus rectum; quare ΖΠ eſt ad ΠΞ ut ΔΘ ad ΘΖ. Recta vero ΘΖ ipſi ΠΟ æqualis eſt, uti ΔΘ ntriſque ΠΟ, ΔΖ ſimul ſumptis. Auferendo igitur ab ipſa ΖΠ utraſque ΖΔ, ΠΟ, & ab ipſa ΠΞ rectam ΠΟ, erit reſiduum ΔΟ ad reſiduum ΟΞ ut totum ΠΖ ad totum ΠΞ; hoc eſt ut diameter tranſverſa ad latus rectum. Verum ΝΟ uormalis eſt, & Δ eſt ſectionis centrum; ergo (per 10^{am} hujus) recta ΝΞ Minima eſt. Q. E. D.

PROPO-

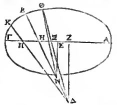
PROPOSITIO LVI.

DIximus autem in præcedeute propoſitioue Hyperbolam Ellipſi concurſuram: quod hoc modo demouſtratur. Ducatur ΓΣ tangens Ellipſin in Vertice Γ. Quoniam vero ΔΘ eſt ad ΘZ ſicut diameter trauſverſa ad latus rectum, ac ratio ΔΘ ad ΘZ minor eſt ratione ΓΘ ad ΘZ; erit ratio ΓΘ ad ΘZ major ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum, nempe ratione HE ad HZ. Cum autem ratio ΓΘ ad ΘZ *major eſt ratione* HE *ad* HZ, *rectangulum igitur ſub* ΓΘ, HZ majus erit rectangulo ſub ΘZ, HE. Sed HZ æqualis eſt ipſi ΓΣ, nti ZΘ ipſi HA: quapropter rectangulum ſub ΘΓ, ΓΣ majus erit contento ſub EH, HA. Sectio igitur Hyperbolica per punctum E tranſiens, ac Aſymptotis MA, AΣ deſcripta (per converſam duodecimi ſecundi) occurret rectæ ΓΣ. Eſt autem ΓΣ Tangens Sectiouis ABΓ, ac proinde Hyperbola illa occurret ſemi-ellipſi ABΓ. Q. E. D.

PROPOSITIO LVII.

HOC demonſtrato, jam reſtat probandum nullam aliam rectam eidem Sectionis quadranti occurrentem, ab eodem puncto duci poſſe, è qua abſcindat Axis Minimam.

Sit ABΓ Ellipſis, Axe majore ΓA & centro E; & à dato infra Axem puncto Δ demittatur normalis ΔZ, ac ex eodem Δ ducatur recta ΔHB, è qua abſciſſa ſit Minima HB. Ducantur etiam ΔK, ΔΘ, *occurrentes Axi in punctis* Π, Ξ. *Dico neque* ΘΞ, *nec* KΠ *Minimas eſſe.*

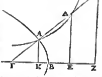


E centro Sectionis E ducatur EN ipſi ΔZ parallela, occurrens rectæ BHΔ in puncto N; ac jungatur NΘ. Quoniam vero BH Minima eſt, occurrens Minimæ per ceutrum Sectionis ductæ in puncto N, intra angulum HZΔ; portio rectæ NΘ inter Axem & Sectionem intercepta nou erit Minima: ſed Minima de puncto Θ ducta (per 46^{am} hujus) propior erit Vertici Γ; ac proinde recta ΘΞ *à Vertice adhuc remotior* (per 25^{am} hujus) non erit Minima. Pari modo demonſtrabitur rectam KΠ non eſſe Minimam, Minimamque per puuctum K ductam longius à Vertice Γ cum Axe concurrere quam KΠ. Q. E. D.

PROPOSITIO LVIII.

DAto quovis puncto extra ambitum Sectionis poſito, quod nec ſit in Axe ejus, neque in eodem producto: poſſumus educere ex eo rectam, cujus intercepta inter Sectionem & Axem ſit Minima.

Sit autem ſectio imprimis Parabola, ut AB; & ſit Axis productus ΓZ: detur vero extra ſectionem & ad latus Axis punctum Δ. Dico quod è puncto Δ egredi poteſt recta, cujus portio intercepta inter ſectionem & Axem ejus Minima ſit.



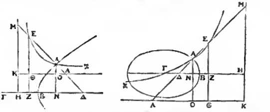
Demittatur normalis ΔE ad Axem ΓZ, & fiat EZ dimidium lateris recti; ſitque ZH uormalis in ipſam ZΓ. Deiu per punctum Δ, Aſymptotis HZ, ZΓ deſcribatur Hyperbola AΔΘ, quæ occurrat Parabolæ iu puncto A. Jungatur ΔA, ac producatur ad H, Γ: *Dico* AΓ *Minimam eſſe.*

Ex A demittatur ad ΓZ cathetus AK; cumque ΔH (per 8^{vam} ſecuudi) ipſi AΓ æqualis eſt; erit quoque recta ZE ipſi KΓ æqualis. Sed ZE dimidium eſt lateris recti; adeoque & KΓ æqnalis eſt dimidio lateris recti. Eſt autem KA normalis, ac proiude (per 8^{vam} hujus) recta AΓ Minima eſt. Q. E. D.

PROPOSITIO LIX.

SI vero ſectio fuerit Hyperbola vel Ellipſis ut AB, Axe BΔ & centro Γ; ac detur punctum quoddam E extra ſectionem, nec in Axe, neque in Axe producto; à quo demittatur ad Axem BΔ normalis EZ. Imprimis autem non cadat ſuper Centrum. Dico quod poſſumus ducere per punctum E rectam, è quâ portio abſciſſa inter Curvam AB & Axem BΔ ſit Minima.

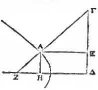
Fiat ΓH ad HZ ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum, & ducatur ad angulos rectos normalis HM. Fiat etiam EΘ ad ΘZ in eadem ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum, & agatur recta KΛ per punctum Θ ipſi ZΔ parallela; & per punctum datum E deſcribatur (per 4^{tam} ſecundi) Hyperbola Aſymptotis MK, KΛ; quæ quidem occurret ſectioni AB. Sit autem Hyperbola illa EAΞ conveniens ſectioni AB in puncto A; & jungatur EA producaturque utrinque ad M, Λ; *occurrat autem Axi ad* Δ. *Dico rectam* AΔ *Minimam eſſe.* Demittatur normalis AN.



Quoniam vero recta ME (per 8^{vam} ſecundi) æqualis eſt ipſi AΛ; erit quoque KΘ ipſi OΛ, ac proinde OK ipſi ΘΛ æqualis, cui etiam æqualis eſt NH. Eſt autem ZΔ ad ΘΛ ſive NH, ut ZE ad EΘ; hoc eſt ut ZΓ ad ΓH: *quare alternando* ZΔ *eſt ad* ZΓ *ſicut* NH *ad* HΓ. Ac componendo in Hyperbola, vel dividendo in Ellipſi erit ΔΓ ad ΓN ſicut ZΓ ad ΓH; quare per converſionem rationis in Ellipſi, vel dividendo in Hyperbola, ΓN erit ad NΔ, ſicut ΓH ad HZ, hoc eſt, ut diameter tranſverſa ad latus rectum. Verum AN normalis eſt in Axem BΔ, adeoque (per 9^{am} & 10^{am} hujus) AΔ Minima eſt. Pari modo demonſtrabitur, ſi cadat normalis ZE ad alteram partem verticis B.

PROPOSITIO LX.

QUod ſi in Hyperbola normalis, à puncto Γ extra ſectionem dato demiſſa, cadat ſuper centrum, ut ΓΔ. Fiat ΓE ad EΔ ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum, & ducatur AE Axi ΔZ parallela, & producatur ad occurſum ſectionis in A. Jungatur ΓA conveniens Axi in Z. Dico AZ Minimam eſſe.



De puncto A ducatur ad Axem normalis AH. Quoniam vero ΓE eſt ad EΔ ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum; ΓA ad AZ erit in eadem ratione. Sed ut ΓA ad AZ ita ΔH ad HZ: quare ΔH eſt ad HZ ut diameter tranſverſa ad latus rectum. Eſt autem AH normalis in Axem; adeoque (per nonam hujus) AZ Minima eſt. Q. E. D.

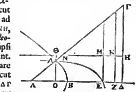
PROPOSITIO LXI.

AT vero ſi normalis de puncto dato demiſſa cadat ab altera parte, ſive ultra centrum Hyperbolæ ad modum rectæ ΓΔ. Sit E centrum Hyperbolæ, ac fiat EZ ad ZΔ ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum, ac in eadem ratione fiat ΓH ad HΔ; & ducatur HΘ Axi ΔE parallela, ut & ZK, EM ipſi ΓΔ parallelæ. Per punctum E Aſymptotis ΘK, KZ deſcribatur Hyperbola quæ occurret ſectioni AB.

Occurrat

Occurrat autem in puncto A, ac ſit Hyperbola illa AE. Jungatur ΓA quæ producatur ad Λ. Dico ΛA Minimam eſſe.

Demittatur recta ΘAO normalis ſuper Axem ΔO. Jam fecimus ΓH ad HΔ ſicut EZ ad ZΔ; adeoque rectangulum ſub ΓH & HK (hoc eſt ZΔ) æquale eſt rectangulo ſub KM (ſive EZ) & ME, hoc eſt HΔ. Sed rectangulum ſub KM, ME (per 12^{am} ſecundi) æquale eſt rectangulo ſub KΘ, ΘA, quia ſunt inter Aſymptotos; quare rectangulum ſub ΓH, HK æquale eſt rectangulo ſub KΘ, ΘA; unde AΘ eſt ad ΓH ſicut HK ad KΘ. Verum AΘ eſt ad ΓH ſicut ΘN ad NH; ac propterea HK eſt ad KΘ ſicut ΘN ad NH, *ac componendo* HΘ *eſt ad* ΘK *ſicut* ΘH *ad* HN, *adeoque* ΘK *æqualis eſt ipſi* HN. Eſt autem ΘK ipſi ZO æqualis, ac proinde ZO, NH æquales ſunt. Hinc ΛΔ eſt ad NH ſicut eadem ΛΔ ad ZO, quare ΛΔ eſt ad ZO ſicut ΛΓ ad ΓN; ac ΛΓ eſt ad ΓN ſicut ΔΓ ad ΓH; quapropter ΛΔ eſt ad ZO ſicut ΔΓ ad ΓH. Sed ΔΓ eſt ad ΓH ſicut ΔE ad EZ; *adeoque permutando* ΛΔ *eſt ad* ΔE *ſicut* OZ *ad* ZE. Reſiduum itaque ΛE ad reſiduum EO eſt ut ΔE ad EZ: ac dividendo, EO ad OΛ erit ut EZ ad ZΔ, hoc eſt ut diameter tranſverſa ad latus rectum. Cum autem EO eſt ad OΛ ut diameter tranſverſa ad latus rectum, erit (per nonam hujus) ΛA Minima. Q. E. D.

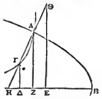


PROPOSITIO LXII.

D*Ato quovis puncto intra ambitum Sectionis Conicæ quod non ſit in Axe: poſſumus* Minimam *ducere per idem punctum.*

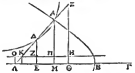
Sit autem imprimis Sectio Parabola, ut AB, Axe AH: ac detur punctum Γ intra ambitum Sectionis. Dico poſſibile eſſe ducere per punctum Γ rectam Minimam.

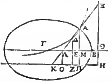
De puncto Γ demittatur ad Axem normalis ΓΔ, & ſit ΔE dimidium lateris recti: ipſi autem AH per E erigatur ad angulos rectos recta EΘ; & per punctum Γ Aſymptotis ΘE, EH deſcribatur Hyperbola AΓ, quæ quidem occurret Parabolæ: occurrat autem in puncto A, ac juncta recta AΓ producatur ad H, Θ. Dico rectam AH eſſe Minimam. Demittatur normalis AZ: cumque ΓH (per 8^{vam} ſecundi) ipſi ΘA æqualis eſt, erit ΔH ipſi EZ æqualis; *ac proinde* EΔ *ipſi* ZH *æqualis.* Sed EΔ eſt dimidium lateris recti, adeoque & ZH dimidium eſt lateris recti. Quocirca AH (per 8^{vam} hujus) Minima eſt. Q. E. D.



PROPOSITIO LXIII.

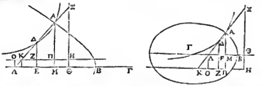
SI vero Sectio ΛA fuerit Hyperbola vel Ellipſis, Axe BΛ ac centro Γ: ac detur punctum aliquod Δ, in ſitu ſuperius deſcripto. Dico quod poſſumus ducere per punctum Δ Minimam.





Demittatur enim normalis ΔE; ac fiat ΓΘ ad ΘE, ut & ΔZ ad ZE, ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum; & per punctum Z ducatur HK Axi ΛΓ parallela,

ipſi vero ΔE parallela ſit recta HΘΞ: Deſcribatur per punctum Δ Aſymptotis HΞ, HK, Hyperbola ΛΔ, quæ quidem occurret datæ Hyperbolæ vel Ellipſi. Sit autem punctum occurſus Λ, ac juncta ΛΔ producatur ad Λ, Ξ. Dico rectam ΛΛ Minimam eſſe.



Quoniam enim ΞΛ, ΔK (per 8^vam ſecundi) æquales ſunt, erunt etiam HΠ ſive ΘM & KZ æquales: eſt autem ZK ad KO differentiam inter ZK & EΛ, ſicut ΔZ ad ZE; ac ΔZ eſt ad ZE ſicut ΓΘ ad ΘE; quare ΘM eſt ad differentiam inter ΘM & EΛ ut ΓΘ ad ΘE; *adeoque per converſionem rationis ac permutando* MΘ *eſt ad* ΘΓ *ſicut* ΛE *ad* EΓ; unde dividendo in Ellipſi vel componendo in Hyperbola erit ΓM ad MΛ ſicut ΓΘ ad ΘE. Sed ΓΘ eſt ad ΘE ut diameter tranſverſa ad latus rectum, ac MΛ Axi ΘΓ normalis eſt. Quapropter recta ΛΛ (per 9^am & 10^am hujus) Minima eſt. Q. E. D.

PROPOSITIO LXIV.

SI detur punctum infra Axem Parabolæ vel Hyperbolæ, à quo recta ad Sectionis Verticem ducta contineat cum Axe angulum acutum; impoſſibile autem ſit ut ducatur è puncto illo recta aliqua cujus portio inter Axem & Sectionem intercepta ſit Minima; *vel* in Ellipſi, *ſi una tantum fuerit recta, ex dato puncto exeuns ad partes Sectionis contrarias illis ad quas jacet datum punctum, è qua abſcindat Axis* Minimam: *erit recta, quæ de puncto illo ad Verticem Sectionis ducitur*, Minima *omnium ad illam Sectionis partem ab eodem ducendarum, atque huic propior minor erit remotiore.*

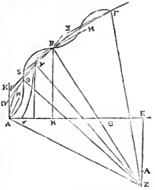
Sit autem imprimis ſectio Parabola ut ABΓ, Axe AE; ſitque datum punctum Z infra Axem, ita ut angulus ZAE, qui continetur à rectâ per punctum illud ad Verticem ſectionis ductâ & Axe AE, acutus fuerit. Primum autem non ſit poſſibile, ut ducatur ad ſectionem recta aliqua cujus portio inter Curvam & Axem intercepta ſit Minima. Dico quod Minima omnium, quæ duci poſſint ad ſectionem AΓ de puncto Z, eſt ipſa AZ; quodque eidem propiores ductæ minores ſunt remotioribus. Hoc autem manifeſtum erit ex eo quod, rectis quibuſlibet è puncto Z eductis & ad ſectionem continuatis, ab earundem extremitatibus non duci poſſint rectæ Minimæ, quæ non occurrant Axi remotius à Vertice A quam ipſæ rectæ è puncto Z eductæ.

Demonſtrabitur autem hoc modo. Demittatur normalis ZE; ac recta AE vel erit æqualis ſemilateri recto, vel major eo vel minor. Sit autem imprimis æqualis ei vel minor eo; ac e cunctis rectis per Z ad ſectionem ductis, non erit ulla cujus portio inter Sectionem & Axem intercepta Minima eſt; ſed Minimæ, ab earundem in Sectione extremitatibus ad Axem ductæ, cadent verſus partes ab A remotiores quam rectæ quæ ex Z prodeunt, juxta 49^am hujus.

Si vero AE major fuerit ſemilatere recto, ſit EΘ dimidium lateris recti; ac ſit ΘH duplum ipſius AH; & ad punctum H ipſi AE normalis ſit HΛ: ac fiat EΛ ad HΛ ſicut ΘH ad ΘE. Erit autem ZE vel æqualis ipſi EΛ, vel minor eâ, vel major. At non erit æqualis ipſi EΛ, quia (per 51^am hujus) ſi ZE fuerit ipſi EΛ æqualis, duci poſſit una recta de puncto Z è quâ abſcinderetur Minima: ZE igitur non erit ipſi EΛ æqualis. Pari modi conſtabit EZ minorem eſſe non poſſe quam recta EΛ. Nam

(per

(per eandem 51^{am} hujus) ſi ΞZ minor fuerit quam EA, duci poſſint duæ rectæ, quarum utrinſque portio inter Sectionem & Axem intercepta ſit Minima; contra Hypotheſin. Poſuimus enim non duci poſſe de puncto Z aliquam rectam è quâ interciperetur Minima: adeoque ZE non eſt minor quam EA, neque etiam eidem æqualis eſt, ac propterea major erit eâ. Per eandem autem 51^{am} conſtat, quod ſi ZE major fuerit quam EA, non duci poſſit de puncto Z recta ulla cujus portio intercepta inter ſectionem & Axem fuerit Minima: quodque rectis quibuſvis de puncto Z ad ſectionem eductis, ſi ab extremitatibus earum agantur Minimæ ad Axem, convenirent illæ Axi ultra occursûs rectarum è Z egredientium, ſive remotius à Vertice A. Quapropter, ſive AE æqualis fuerit dimidio lateris recti, ſive minor eo; vel etiam ſi AE major fuerit dimidio lateris recti, ſimulq; ZE major quam EA; rectæ omnes de puncto Z ad ſectionem prodeuntes occurrent Axi propius puncto Verticis A quam Minimæ ab extremitatibus earundem ductæ. Hoc poſito: Dico rectam ZA Minimam eſſe rectarum de puncto Z ad ſectionem prodeuntium, eidemque propiorem minorem eſſe remotiore.



Ducantur rectæ ZB, ZΓ; ac primum ſi fieri poſſit, ſit AZ ipſi BZ æqualis, & ad A tangat ſectionem recta AK; & erit (per 17^{am} primi) AK Axi AE normalis, quia ordinatim ad Axem applicatis parallela eſt; unde angulus ZAK obtuſus eſt. Ductâ autem ipſi AZ normali ut AN, cadet ea intra ſectionem, quia (per 32^{dam} primi) impoſſibile eſt ducere inter Tangentem & Sectionem rectam aliquam. Ducatur etiam per punctum B Tangens Sectionis BΞ, ac Minima de puncto B ad Axem ducta remotior erit à puncto A quam BZ, per nuper demonſtrata; comprehendit autem Minima (per 27^{mam} hujus) cum Tangente BΞ angulum rectum, adeoque angulus ZBΞ acutus erit. Ac ſi centro Z radio BZ deſcribatur arcus circuli, occurret ille Tangenti BΞ; recta vero NA erit tota extra illum, quia angulus ZBΞ acutus eſt, angulus vero ZAN rectus. Quare ſi ſit circulus ille curva BΞOA, neceſſe eſt ut occurrat ſectioni; ſitque punctum occurſus O. Jungatur OZ, ac tangat ſectionem recta OΠ cadens neceſſariò extra circulum. Cum autem Minima de puncto O ad Axem ducta remotior eſt à Vertice A quam recta OZ, ac Minima illa cum Tangente OΠ (per 27^{am} hujus) comprehendit angulum rectum: angulus igitur ZOΠ acutus erit; ac proinde recta OΠ circulo occurrere debet. Eadem autem cadit extra illum. Hoc autem abſurdum eſt, adeoque AZ non eſt ipſi BZ æqualis.

Si vero fieri poſſit, ſit AZ major quam ZB; ac centro Z radio ZB deſcribatur circulus, qui quidem occurret ipſi AZ: portio autem aliqua Tangentis BΞ erit intra circulum, per nuper demonſtrata: occurret igitur circulus ſectioni neceſſariò, quia rectæ AZ occurrit. Sit circulus ille Bγσ, ac jungatur Zγ; ducaturque per punctum γ ſectionis Tangens γρ, quæ quidem cadet intra circulum; quia Minima inter punctum γ & Axem intercepta cadit verſus partes remotiores à puncto A quam recta γZ: unde angulus Zγρ acutus eſt. Recta itaque γρ occurrere debet circulo. Manifeſtum autem eſt debere eandem totam extra reperiri: quod abſurdum. Recta igitur AZ non eſt major quam BZ, neque eidem æqualis; eſt ergo minor eâ.

Dico quoque rectas ipſi AZ propiores remotioribus minores eſſe. Producatur enim Tangens ΞB ad Σ; cumque recta BΞ tangit ſectionem in puncto B, & angulus ZBΞ acutus eſt, erit angulus deinceps, nempe ZBΣ, obtuſus; & per B ipſi BZ normalis ſit BM; quæ proinde cadet intra ſectionem. De puncto Γ ducatur ſectionis

Tangens ΓΣ; & ponatur imprimis, ſi fieri poſſit, recta BE ipſi ΓZ æqualis. Centro Z radio ZΓ deſcribatur circulus, qui quidem cadet extra rectam ΓΣ; quia angulus ZΓΣ acutus eſt; idem vero cadet intra rectam BM, quia BM ipſi BZ normalis eſt, atque adeo occurret circulus ille Sectioni. Jam ſi ducatur recta per punctum hujus interſectionis ad punctum Z, patebit abſurditas eodem modo quo demonſtravimus abſurdam eſſe æqualitatem ipſarum AZ, ZB.

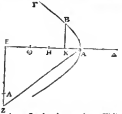
Pari argumento, ſi ponamus ZB majorem eſſe quam ZΓ, demonſtrabitur abſurditas, ac in rectis AZ, ZB; ubi ſuppoſuimus AZ majorem eſſe quam BZ. Eſt igitur AZ recta Minima quæ duci poſſit de puncto Z ad ſectionem ABΓ, eidemque propior minor eſt remotiore.

Manifeſtum eſt igitur, quod ſi talis fuerit ſitus puncti Z, ut non duci poſſit ab eo ad ſectionem recta aliqua è quæ abſcindat Axis Minimam, & ſit angulus ZAE acutus: foret recta AZ Minima omnium ad ſectionem de puncto Z ductarum, ipſique AZ propior minor eſſet remotiore. Quinetiam ſi non fuerit niſi una ſola recta de puncto Z educta, è quâ abſcindatur Minima, ac fuerit angulus ZAE acutus; in ſequente 67ma hujus demonſtrabitur AZ minorem eſſe quâvis aliâ de puncto Z ad ſectionem ductâ, eidemque propiorem minorem eſſe remotiore.

PROPOSITIO LXV.

Quod ſi ſectio fuerit Hyperbola, ut ABΓ, Axe ΔE & centro Δ deſcripta; & ſumatur infra Axem punctum Z, ita ut juncta recta AZ contineat cum Axe angulum ZAE acutum; *ac nulla recta ab eadem Z duci poſſit cujus intercepta ſit Minima.* Dico rectam AZ minorem eſſe quâvis aliâ ad ſectionem de puncto Z ducendâ; ductiſque rectis quibuſvis ex eodem Z ad ſectionem, propiorem ipſi AZ minorem eſſe remotiore ab eadem.

Hoc autem manifeſtum erit, ſi recta quælibet Minima, à quovis in ſectione ABΓ puncto ad Axem AE ducta, cadat verſus partes remotiores à Vertice A quam quæ jungit punctum illud & Z. Demittatur ad Axem de puncto Z normalis ZE, & AE vel æqualis erit dimidio lateris recti, vel erit major eo, vel minor. Si vero eidem vel æqualis fuerit vel minor eo, ac rectæ de puncto Z ad ſectionem ABΓ egrediantur; quæ ab earundem extremitatibus ducuntur ad Axem Minimæ (per 45^{tam} hujus) remotiores erunt ipſis à Vertice A. Si vero AE major fuerit dimidio lateris recti, fiat ΔΘ ad ΘE ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum: ac inter ipſas ΘΔ, ΔA capiantur duæ mediæ proportionales ΔH, ΔK; & de puncto K ipſi AE normalis erigatur KB; & fiat EΛ ad KB in ratione rectanguli ſub ΔE, ΘK ad rectangulum ſub ΔK, ΘE. Dico quod ZE major eſſe debet quam recta EΛ. Nam ſi poſſibile ſit ut non ſit major eâ, ponamus imprimis eas æquales eſſe: ac (per 52^{dam} hujus) demonſtratum eſt rectam unam duci poſſe de puncto Z è qua abſcindat Axis Minimam. Cum autem hoc non ita ſe habeat, recta EZ non æqualis erit ipſi EΛ. Per eandem etiam probatur



rectam ZE non minorem eſſe quam EΛ, quia ſi minor fuerit eâ, non impoſſibile eſſet ducere de puncto Z duas rectas, quarum portiones inter Sectionem & Axem interceptæ forent Minimæ: recta igitur ZE major erit quam EΛ. Verum (per 52^{dam} hujus) demonſtratum eſt quod, ſi ZE major fuerit quam EΛ, non duci poſſit è puncto Z recta aliqua è qua abſcindat Axis Minimam; quodque Minimæ, à terminis rectarum de puncto Z prodeuntium ductæ, longius diſtent à Vertice A quam ipſæ prodeuntes. Quapropter rectis quibuſcunque de puncto Z ad ſectionem ductis, Minimæ ab earundem extremitatibus ad Axem emiſſæ remotiores erunt ipſis à puncto A: adeoque iiſdem argumentis, quibus in præcedente propoſitione rem demonſtravimus in Parabolâ, manifeſtum erit rectam AZ minorem eſſe quavis aliâ per punctum Z ad ſectionem ABΓ ductâ, eidemque propiorem minorem eſſe remotiore.

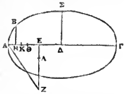
PROPO-

PROPOSITIO LXVI.

QUinetiam ſi ſectio fuerit Ellipſis, nt ABΓ, cujus Axis major AΓ & centrum Δ; ac ſumatur infra Axem majorem punctum Z, ita nt angulus ZAΓ ſit acutus: & è centro Δ erigatur Axi normalis ΔΣ: ſit antem punctum Z tale, nt ab eo non duci poterit ad quadrantem ſectionis AΣ recta aliqua, cujus portio inter Sectionem & Axem intercepta ſit Minima. Dico AZ minorem eſſe rectâ quâvis aliâ de Z ad ſectionis partem AΣ dncendâ, eidemque viciniorem minorem eſſe remotiore.

Oportet autem normalem de Z ad axem demiſſam cadere inter puncta A, Δ: non poteſt enim cadere inter Δ, Γ, quin poſſibile eſſet dncere ad ſectionem de Z (per 55^{mam} hujus) rectam, cujus pars intercepta inter Axem & Sectionem foret aliqua è Minimis. Poſuimus vero hoc non fieri poſſe, adeoque normalis non cadet inter puncta Δ, Γ. Neque cadet ſnper centrum Δ; qnia ſi cadat ſuper Δ, ac producatur ad ſectionem, portio ejus inter Sectionem & Axem intercepta (per 11^{mam} hujus) foret Minima. Occurret igitur ipſi AΔ ad modum normalis ZE: ac AE vel æqualis erit dimidio lateris recti, vel minor erit eo, vel major.

Jam ſi minor fuerit eo vel eidem æqualis, patet quod è rectis quibuſvis de Z ad ſectionem AΣ prodeuntibus non fieri poſſit ut abſcindantur Minimæ: ſed Minimæ à prodeuntium extremitatibus ad Axem ductæ (per 52^{dam} hujus) longius aberunt à Vertice A quam ipſæ prodeuntes. Quod ſi AE major fuerit dimidio lateris recti; fiat ΔΘ ad ΘE ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum, ac capiantur inter ipſas AΔ, ΔΘ duæ mediæ proportionales HΔ, ΔK; & per H ducatur Axi ad angulos rectos ordinatim applicata HB: dein fiat EΛ ad HB in ratione rectanguli ſub ΔE, ΘH ad rectangulum ſub ΔH, ΘE; ac ZE vel æqualis erit ipſi EΛ, vel major erit eâ, vel minor. Si vero EZ ipſi EΛ æqualis fuerit, una quidem recta duci poteſt (per 52^{dam} hujus) de Z ad ſectionem AΣ, è qua abſcindat Axis Minimam. Sed aliter fieri oportet; *adeoque* EZ *non eſt rectæ* EΛ *æqualis*. Neque EZ minor eſſe poteſt quam EΛ, tum enim duci poterunt duæ rectæ è quibus (*per eandem*) abſcinderentur Minimæ. Quapropter EZ major eſſe debet quam EΛ; quo in caſu nulla recta duci poteſt de puncto Z ad ſectionem AΣ, cujus portio intercepta ſit Minima: ac ſi ducatur à tali puncto Z ad ſectionem recta quælibet, Minima inter ejuſdem extremitatem & Axem interjecta (per 52^{dam} hujus) longius aberit à Vertice A quam ipſa recta de Z educta.



Jam ſi quovis modo Minimæ, à quolibet ſectionis AΣ puncto ad Axem eductæ, remntiores fuerint à Vertice A quam rectæ de ſumpto puncto Z prodeuntes; pari qno in Parabola argumento, probabitur AZ minorem eſſe quavis aliâ de Z ad ſectionem AΣ dncendâ, eidemque propiorem minorem eſſe remotiore. Demonſtratin enim una eademqne eſt in omnibus tribus ſectionibus, quoties in data ſectione rectæ Minimæ, de punctis ejns ad Axem dnctæ, occurrunt eidem Axi remotius à Vertice quam rectæ jungentes hæc puncta & ſumptum Z.

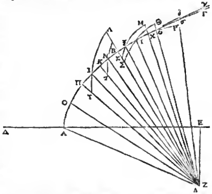
PROPOSITIO LXVII.

SIT jam ſectio ABΓ Parabola vel Hyperbola, cujns Axis ΔE; & detur punctum infra Axem nt Z; ſitque angulus ZAE acutus: poſſibile autem ſit ut prodeat de puncto Z nna ſola recta cujns portio intercepta ſit Minima. Dico quod, etiam hoc in caſu, AZ minor eſt quavis alia recta de puncto Z ad ſectionem ABΓ ednctâ, quodqne eidem propior minor eſt remotiore.

De Z ad Axem demittatur normalis ZE; ac dico quod, rectâ quavis de puncto Z ad ſectionem ABΓ egrediente, Minima ab ejuſdem extremitate ad Axem ducta longius aberit à Vertice A quam ipſa egreſſa, ſi unam ſolam excipias: adeoque AE in Parabola vel Hyperbola major erit dimidio lateris recti. Nam ſi non major fuerit eo, impoſſibile eſſet ducere de puncto Z rectam aliqnam e qua interciperetur Minima, uti conſtat ex 49na & 52da hujus. Eſt itaque AE major ſemilatere recto.

recto. Jam ſi Parabola fuerit, auferatur ab A E, à parte puncti E, recta dimidio lateris recti æqualis: ac fiat, modo (in Prop. 64[ta] hujus) monſtrato, uſque dum inveniatur recta E Λ, cum qua comparanda eſt recta E Z; & E Z eidem æqualis erit. Non enim poteſt eſſe minor eâ, quia tum duci poterint de puncto Z ad ſectionem duæ rectæ è quibus abſcindat Axis Minimas (per 51[am] hujus) contra Hypotheſin: neque erit Z E major illa, quia hac conditione (per eandem 51[mam]) non duci poterit ulla recta de puncto Z cujus portio intercepta ſit aliqua è Minimis. Hoc autem aliter ſe habet: quare recta E Z ipſi æqualis erit. Quo poſito, ex eadem 51[am], manifeſtum eſt unam ſingularem rectam duci poſſe de puncto Z, cujus portio inter Sectionem & Axem intercepta Minima ſit; cæteraſque omnes Minimas à terminis rectarum de puncto Z prodeuntium ductas remotiores eſſe à Vertice A quam ipſæ prodeuntes.

Idem etiam demonſtrabitur ſi ſectio fuerit Hyperbola, cujus centrum Δ. Dividatur Δ E ita ut ſegmenta ſint inter ſe in ratione diametri tranſverſæ ad latus rectum; ac fiant reliqua ad modum Prop. 65[tæ] hujus, uſque dum inveniatur recta E Λ cum normali Z E comparanda. Et, ſi recta Z E æqualis fuerit inventæ E Λ, pari ac in Parabola argumento conſtabit punctum Z tale eſſe, ut una tantum recta ab eodem duci poſſit è qua abſcindatur Minima: ductiſque ad ſectionem de Z rectis quibuſcunque, Minimas ab earundem extremitatibus ad Axem emiſſas longius abeſſe à Vertice A quam ipſæ ductæ, per 52[dam] hujus manifeſtum eſt. Hinc conſequuntur eadem omnia quæ in Parabola.



Sit jam Z B unica illa recta per Z ad ſectionem A B Γ ducta, è qua abſcindit Axis Minimam; ac ducantur ad ſectionem inter A & B duæ aliæ, ut Z O, Z Π; &, eodem modo quo demonſtravimus Propoſitionem LXIV[um] hujus, conſtabit A Z Minimam eſſe è rectis de puncto Z ad ſectionem ductis. Prodeuntibuſq; ad ſectionem rectis quibuſvis Z O, Z Π, inter puncta A & B; quæ eidem A Z vicinior eſt minor erit remotiore.

Dico quoque quod Z Π minor eſt quam Z B. Nam ſi non ſit minor eâ, primum ſit æqualis ei, ac ducatur inter eas recta Z K; erit igitur Z K major quam Z Π, per nuper demonſtrata: quare in Z K capiatur recta major quam Z B, minor vero quam Z K, ut Z T; & centro Z, radio Z T deſcribatur circulus occurrens rectæ Z K in T, ſectioni autem ad N inter K & B, ad modum circuli N T; & jungatur Z N. Eſt autem recta K Z ipſi A Z propior quam Z N; recta igitur Z K minor eſt quam Z N, *hoc eſt quam* Z T, quod abſurdum eſt: quare abſurda eſt poſitio Z K majorem eſſe quam Z B; adeoque Z Π, Z B non ſunt æquales.

Ponamus jam, ſi fieri poſſit, Z Π majorem eſſe quam Z B; ac capiatur recta aliqua in Z Π quæ major ſit quam Z B, minor vero quam Z Π, ut Z T; & centro Z, radio Z T deſcribatur circulus occurrens rectæ Z Π, ſectioni vero neceſſariò inter Π & B. Occurrat autem iis ad modum arcus T I Λ, & jungatur Z I; ideoque recta Z Π minor erit quam Z I, quia propior eſt ipſi A Z quam Z I. Sed Z I ipſi Z T æqualis eſt, adeoque Z Π minor eſt quam Z T, quod abſurdum. Recta igitur Z Π non eſt major quam Z B; neque eidem æqualis, per nuper demonſtrata: ac proinde minor eſt ea. Conſtat itaque rectas omnes de puncto Z ad ſectionem inter A, B ductas minores eſſe quam Z B.

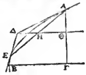
Ducantur

Ducantur jam ad reliquam ſectionem ΒΓ, ab altera parte ipſius ΖΒ, rectæ Ζθ, Ζσ. Dico ΖΒ minorem eſſe quam Ζθ, ac Ζθ quam Ζσ. Agantur ſectionis Tangentes θδ, σγ: & erunt anguli Ζθδ, Ζσγ obtuſi, quia rectæ Minimæ de punctis θ, σ ad Axem ductæ remotiores ſunt à Vertice Α quam rectæ ad utrumque punctum ab ipſo Ζ eductæ. Ipſi Ζθ ad punctum θ normalis ſit θΡ, quæ quidem cadet intra ſectionem, unde patebit, eodem quo Prop. 64[tam] demonſtravimus modo, rectam Ζθ minorem eſſe quam Ζσ; adeoque etiam ab altera parte ipſius ΒΖ, rectæ per Ζ ductæ, quæ propiores ſunt Vertici Α, minores erunt remotioribus. Dico quoque quod ΖΒ minor eſt illis omnibus. Quoniam enim Axis abſcindit è recta ΖΒ Minimam; erit angulus comprehenſus à Tangente per punctum Β ductâ & ipſâ ΖΒ rectus. Jam ſi fieri poſſit, fiat imprimis ΖΒ ipſi Ζθ æqualis, & ducatur inter eas recta ΖΧ; & ΖΧ minor erit quam Ζθ, quia propior eſt ipſi ΑΖ, hoc eſt quam ΖΒ. Capiatur igitur recta ΖΞ minor quam ΖΒ, ſed major quam ΖΧ; ac centro Ζ, radio ΖΞ circinetur circulus, quæ propterea occurret ſectioni inter puncta Β, Χ. Sit autem circulus ille ΜξΞ occurrens ſectioni in ξ, & jungatur Ζξ; ideo Ζξ minor erit quam ΖΧ, quia propior eſt ipſi ΑΖ: adeoque ΖΜ ipſi Ζξ æqualis minor erit quam ΖΧ. abſurdum eſt igitur ΖΞ majorem eſſe quam ΖΧ: quare recta Ζθ non eſt ipſi ΖΒ æqualis. Si vero fieri poſſit, ſit minor ea; ac fiat ΖΣ major quam Ζθ, minor vero quam ΖΒ; & centro Ζ, radio ΖΣ deſcribatur circulus occurrens ſectioni inter puncta Β, θ. Occurrat autem in Τ, & ſit circulus ille ΣΤΘ; & jungatur ΤΖ: adeoque erit ΤΖ minor quam Ζθ, quia propior eſt ipſi ΑΖ. Sed ΤΖ æqualis eſt ipſi ΖΘ, ideoque ΖΘ minor eſt quam Ζθ. Eadem vero ex hypotheſi major eſt ea; quod abſurdum: recta igitur Ζθ non minor eſt quam ΖΒ. Probavimus autem eas non eſſe æquales: adeoque ΖΒ minor eſt quam Ζθ. Quapropter recta ΒΖ minor eſt quavis recta de puncto Ζ ad ſectionis partem ΒΓ ducibilem. Unde & ex præmiſſis patet, ΑΖ minorem eſſe omnibus rectis ad ſectionem ΑΒΓ ducendis, eidemque propiorem minorem eſſe remotiore. Q. E. D.

PROPOSITIO LXVIII.

SI duæ rectæ Sectionem Conicam contingant; erit intercepta inter punctum concurſûs earundem, & punctum contactûs in Tangente Vertici Sectionis propiore, minor interceptâ in Tangente à Vertice remotiore.

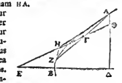
Sit Sectio ΑΒ imprimis Parabola, cujus Axis ΒΓ: & Sectionem tangant duæ rectæ ΑΔ, ΔΕ. Dico ΔΕ minorem eſſe quam ΔΑ.



Junge rectam ΑΒ; & per Δ, ipſi ΒΓ parallela, ducatur ΔΗ: ideoque (per 30[mam] ſecundi) ΑΗ æqualis erit ipſi ΕΗ. De puncto Α demittatur normalis ad Axem ut ΑΓ, & erit angulus ΑΘΔ rectus; ac proinde angulus ΑΗΔ obtuſus. Eſt verò ΔΗ utrique triangulo ΑΔΗ, ΕΔΗ communis; ac duo latera ΑΗ, ΗΔ æqualia ſunt duobus lateribus ΕΗ, ΗΔ: angulus autem ΕΗΔ minor eſt angulo ΑΗΔ: Baſis igitur ΔΕ minor eſt baſi ΑΔ. Q. E. D.

PROPOSITIO LXIX.

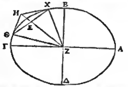
SIT jam Sectio Hyperbola ut ΑΒ, cujus Axis ΔΕ, centrum Ε: ſintque duæ Tangentes ΖΗ, ΗΑ. Dico quod ΖΗ minor eſt quam ΗΑ.



Junge ΗΕ, quæ producatur in directum; jungatur etiam ΑΓΖ, occurrens ipſi ΗΕ in Γ: ideoque ΑΓ (per 30[mam] ſecundi) æqualis erit ipſi ΓΖ. Demittatur normalis ΑΔ, & producatur ΕΓ ad Θ; &, ob angulum ΑΔΕ rectum, angulus ΑΘΕ major eo obtuſus erit; unde & angulus ΑΓΗ obtuſus: ac propterea ΗΓΖ eidem deinceps minor erit eo, utpote acutus. Sed recta ΑΓ ipſi ΓΖ æqualis eſt, & ΗΓ utrique triangulo ΑΓΗ, ΗΓΖ communis: Baſis igitur ΖΗ minor eſt Baſi ΗΑ. Q. E. D.

PROPOSITIO LXX.

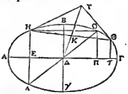
SIT autem Sectio ΑΒΓΔ Ellipſis, cujus Axis major ΑΓ, minor ΒΔ, & *centrum* Ζ; & ducantur inter puncta Β, Γ, ſive ad eundem ſectionis quadrantem Tangentes duæ ΧΗ, ΗΘ. Dico Axi propiorem minorem eſſe remotiore.



Jungantur rectæ ΘΧ, ΗΕΖ; & erit ΧΕ (per 30^{mum} ſecundi) ipſi ΕΘ æqualis. Cumque recta ΖΧ propior eſt Semi-axi minori ΖΒ quam ΖΘ, & recta ΖΘ propior eſt Semi-axi majori quam ΖΧ; erit (per 11um hujus) ΖΘ major quam ΖΧ. Latera autem ΖΕ, ΕΘ æqualia ſunt lateribus ΖΕ, ΕΧ; angulus igitur ΘΕΖ major eſt angulo ΧΕΖ, ac propterea angulus ΧΕΗ major angulo ΗΕΘ. Sed latera ΧΕ, ΕΗ æqualia ſunt lateribus ΘΕ, ΕΗ: adeoque Baſis ΧΗ major eſt Baſi ΘΗ. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXI.

SIT ΑΒΓ Ellipſis, cujus Axis major ΑΓ, minor Βγ, ac centrum Δ; ſintque ΗΕ, Θτ normales ſuper Axem majorem, ita ut ΗΕ major ſit quam Θτ: tangant autem ſectionem rectæ duæ ΗΤ, ΤΘ, quæ proinde (per 27^{mam} ſecundi) convenient inter ſe ad eaſdem partes centri. Dico ΗΤ majorem eſſe quam ΘΤ.



Jungantur ΗΚΘ, ΔΚΤ, & producatur ΗΕ ad Λ, ac juncta ΛΔ producatur ad Ο: ideoque erit ΛΔ (per 30^{mam} primi) ipſi ΔΟ æqualis. Cumque ΛΕ ipſi ΕΗ æqualis eſt, ac ΔΕ ſuper ΛΗ normalis, erit ΛΔ ipſi ΔΗ æqualis. Sed ΛΔ ipſi ΔΟ eſt æqualis: quare etiam ΗΔ, ΔΟ ſunt æquales; junctaque ΗΟ ipſi Ετ parallela erit. Demittatur normalis ΟΠ, quæ proinde ipſi ΗΕ parallela & æqualis erit. Sed ΗΕ major eſt quam Θτ; unde & ΟΠ major eſt quam Θτ, ac recta ΔΘ propior eſt Axi majori ΔΓ quam ΔΟ: quocirca ΔΘ (per 11^{mam} hujus) major eſt quam ΔΟ, hoc eſt quam ΔΗ. Eſt autem ΘΚ (per 30^{mam} ſecundi) ipſi ΚΗ æqualis. Unde, ob ΔΚ communem, angulus ΔΚΘ major eſt angulo ΗΚΔ; ac proinde angulus ΤΚΗ major erit angulo ΤΚΘ. Latera vero duo ΗΚ, ΚΤ æqualia ſunt duobus ΤΚ, ΚΘ: Baſis igitur ΗΤ major erit Baſi ΤΘ. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXII.

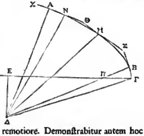
S*I ſumatur punctum infra Axem Parabolæ vel Hyperbolæ, à quo poßibile ſit educere duas rectas, ita ut in utrâque portio intercepta inter Sectionem & Axem ſit* Minima: *erit ea, quæ ex his duabus Vertici Sectionis propius adjacet, omnium rectarum, de ſumpto puncto ad eam Sectionis partem quæ interjacet Verticem & rectam alteram ductarum,* Maxima: *è cæteris vero ad eandem partem ductis, quæ* Maximæ *utrinque propior eſt major erit remotiore: altera vero recta minor erit cæteris omnibus ab eodem puncto ad reliquam iſtius partis Sectionem, ſive ad ejuſdem lateris complementum: quæque eidem propior eſt, è rectis ad reliquam Sectionem ductis, minor erit remotiore.*

Sit Sectio ΑΒΓ, cujus Axis ΓΕ; ſub quo ſumptum eſt punctum Δ: ac ſint ΔΑ, ΔΒ, rectæ duæ ad ſectionem ductæ, è quibus abſcindit Axis Minimas. Dico quod ΔΒ major eſt omnibus rectis è puncto Δ ad ſectionis partem ΑΒΓ ducendis; quodque

Digitized by Google

rectæ utrinque eidem ΒΔ propiores majores ſunt remotioribus: quodque ΔΑ minor eſt quavis recta de puncto Δ ad reliquam ſectionem ΑΧ ducibili: quodque eidem propior minor eſt remotiore.

De puncto Δ Axi ΓΕ demittatur normalis ΔΕ; & inquiratur, modo in 64ta & 65ta hujus uſurpato, recta ΕΑ cum recta ΔΕ comparanda, qua minor eſſe debet ΔΕ. Non enim poteſt eſſe major eâ, quia ſic impoſſibile eſſet aliquam rectam ducere per punctum Δ, è qua abſcinderetur Minima. Neque eidem æqualis eſt, quia hâc conditione (per 51^{mam} & 52^{dam} hujus) non niſi una ſola Minima daretur. Erit igitur ΔΕ minor rectâ quæſitâ ΕΑ. quo in caſu duci poterunt duæ rectæ, quarum portiones interceptæ Minimæ ſint; ac Minimæ à terminis rectarum inter ipſas ΔΑ, ΔΒ intermediarum propiores erunt Vertici Γ quam ipſæ intermediæ: Minimæ vero de cæterarum ductarum extremitatibus emiſſæ (per caſdem 51^{am} & 52^{dam} hujus) remotiores erunt ab eodem. Unde, eodem modo quo demonſtravimus 64^{tam} hujus, patebit, rectam ΔΒ majorem eſſe quâvis rectâ per Δ ad ſectionis partem ΒΓ ductâ; eidemque ΔΒ propiores à parte Verticis Γ majores eſſe remotioribus: ſimulq; rectam ΔΒ majorem eſſe quacunque alia ad ſectionis partem ΑΒ ductâ; eidemque propius adjacentem majorem eſſe remotiore. Demonſtrabitur autem hoc modo. Ducantur rectæ ΔΜ, ΔΝ, & ad puncta Β, Μ tangant ſectionem rectæ ΒΞ, ΞΜΘ; & ob ΒΠ Minimam, & ΒΞ ſectionis Tangentem, erit (per 27^{mam} & 28^{vam} hujus) angulus ΞΒΠ rectus: angulus autem ΞΜΔ obtuſus eſt, quia Minima de puncto Μ ad Axem ΓΕ ducta (per 51^{mam} & 52^{dam} hujus) propinquior eſt Vertici Γ quam recta ΜΔ. Cum autem angulus ΞΒΔ rectus eſt, ac angulus ΞΜΔ obtuſus, erunt quadrata ex ΞΒ & ΒΔ ſimul ſumpta majora quadratis ex ΞΜ, ΜΔ. Sed (per 68^{vam} & 69^{nam} hujus) ΒΞ minor eſt quam ΞΜ, quare ΒΔ major eſt quam ΔΜ. Pari modo demonſtrabitur rectam ΜΔ majorem eſſe quam ΔΝ, quia angulus ΘΜΔ acutus eſt; ac ductâ ΝΘ ſectionis Tangente, erit angulus ΘΝΔ obtuſus. Similiter probabitur rectam ΝΔ majorem eſſe quam ΔΑ. Recta igitur ΒΔ Maxima eſt è rectis de puncto Δ ad partem ſectionis ΑΓ ductis, eidemque propior major eſt remotiore. Quod vero ΔΑ minor eſt quavis rectâ de puncto Δ ad reliquam ſectionem ΑΧ ductâ, eodem argumento conſtabit quo uſi ſumus in demonſtrandâ 64ta hujus. Pariterque patebit rectam ipſi ΑΔ propiorem, inter eas quæ prodeunt è puncto Δ ad ſectionem ΑΧ, majorem eſſe remotiore ab eadem.



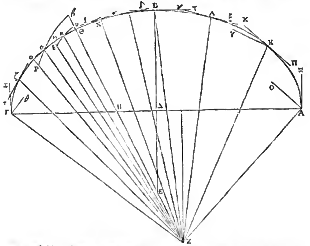
PROPOSITIO LXXIII.

SI capiatur punctum infra majorem Ellipſeos Axem, quod non ſit in Axe minore producto; ac inter rectas è puncto illo ad Sectionem ducendas non ſit niſi una ſola è qua abſcindat Axis Minimam: *erit hæc recta major quâvis aliâ; eidemque propior major erit remotiore*: Minima *vero quæ duci poſſit de puncto illo ad eandem ſemi-ellipſin, ad quam ducitur* Maxima, *erit recta jungens punctum datum & Sectionis Verticem puncto illi viciniorem.*

Sit ΑΒΓ Ellipſis, cujus Axis ΑΓ & centrum Δ; & ad Δ erigatur Axi normalis ΒΔΞΙ ſumatur etiam ſub Axe punctum Ζ, è quo non niſi una ſola recta ad ſectionem ΑΒΓ duci poteſt, cujus portio intercepta ſit Minima. Hæc igitur recta, è qua abſcinditur Minima, talis eſſe debet, ut præter eam non alia duci poſſit ad ſectionem de puncto ſumpto. Semper autem poſſibile eſt unam rectam ducere de puncto Ζ, cujus intercepta ſit Minima, quæque occurrat alteri ſemi-axi, ſive ſemiſſi illi

Axis in quam non cadit normalis de puncto Z, per demonſtrata in 55ta hujus. Recta igitur illa de Z ad ſectionem ABΓ ducta, è qua abſcinditur Minima, occurret reliquo ſemi-axi ΓΔ. Sit autem ea recta ZHΘ, & jungatur ZA. Dico ZΘ Maximam eſſe è rectis de puncto Z ad ſectionem ABΓ ducendis, eidemque ab utraque parte propiorem majorem eſſe remotiore; AZ vero Minimam eſſe omnium.

Quoniam enim ſectio ABΓ Ellipſis eſt; ac ſumitur ſub Axe majore punctum, à quo non duci poteſt ad ſectionem niſi una ſola recta, cujus portio intercepta ſit Minima: demonſtratum eſt (per 52dam hujus) cæteras Minimas, à quibuſlibet ſectionis punctis ad Axem ductas, longius abeſſe à Verticibus A vel Γ, quam rectæ jungentes puncta illa & Z. Educantur de puncto Z ad ſectionem rectæ ZK, ZΛ, ZM; tangat autem AΞ ſectionem in puncto A: erit igitur angulus ZAΞ obtuſus. Ipſi vero AZ ad punctum A perpendicularis ſit AO, quæ (per 32dam primi) cadet intra ſectionem. Ducatur etiam per K ſectionis Tangens ΠKX. Quoniam vero Minima de puncto K ad Axem ducta remotior eſt ab A quam recta KZ, erit (per 57am hujus) angulus ΠKZ acutus. Sed angulus OAZ rectus eſt; adeoque demiſsâ de puncto Z normali, eodem argumento, quo in demonſtrandâ 64ta hujus uſi ſu-



mus, conſtabit rectam AZ non majorem eſſe quam ZK, neque eidem æqualem: adeoque AZ minor eſt quam ZK. Similiter cum ΠKX tangit ſectionem, angulus XKZ obtuſus erit; ac KT, ipſi KZ ad angulos rectos, cadet intra ſectionem; quia (per 32dam primi) nulla recta duci poteſt quæ cadat inter ſectionem & Tangentem. Agatur jam per punctum Λ ſectionis Tangens ξΛT, & Minima per Λ ducta remotior erit à Vertice A quam ΛZ; unde, juxta demonſtrata in 64ta hujus, recta ZK minor erit quam ZΛ. Ac ſi jungatur ZB & per B ducatur Tangens ſectionis γBδ, ob angulum γBΔ rectum erit angulus γBZ acutus; adeoque ΛZ (juxta eandem 64tam) minor erit quam ZB.

Dico quoque ZB minorem eſſe quam ZM. Sectionem tangat recta δMσ ad punctum M. Quoniam vero ABΓ Ellipſis eſt, atque tranſit normalis BΔE per centrum ſectionis Δ, ac Bδ, δM ſunt duæ Tangentes; erit Bδ major quam δM (per 70mam hujus). Quadrata autem ex δB, BZ ſimul minora erunt quadratis ex δM, MZ

ſimul,

ſimul, quia angulus δBZ obtuſus eſt, angulus vero δMZ acutus; adeoque recta ZB minor erit quam ZM. Similiter demonſtrabitur ZM minorem eſſe quam ZN, ductâ ſcilicet Tangente σNI. Hinc manifeſtum eſt rectas ipſi ΘZ propiores majores eſſe remotioribus.

Dico quoque ΘZ majorem eſſe quam ZN. Ducatur per Θ ſectionis Tangens ΘI, & erit angulus IΘZ rectus (per 28[vam] hujus) & angulus INZ obtuſus eſt, Tangens autem NI (per 70[im] hujus) major eſt quam IΘ. Quapropter ΘZ major erit quam ZN; ac proinde major quavis recta de puncto Z ad ſectionis partem AΘ ducenda, eidemque propior major erit remotiore.

Porro recta ΓZ Minima eſt è rectis ad ſectionis partem ΘΓ ducendis; puta Zζ, Zε, Zη. Tangat ſectionem recta ΓΣ in puncto Γ, ipſique ΓZ normalis ſit Γθ, quæ (per 32[dam] primi) cadet intra ſectionem; & ad punctum ζ ſectionem tangat ζτ. Minima autem de puncto ζ ad Axem ducta remotior erit à Vertice Γ quam ipſa Zζ, adeoque angulus τζZ acutus erit; propterea que recta ZΓ minor erit quam Zζ, juxta demonſtrata in 64[ta] hujus. Eodemque modo probabitur quod è rectis ad ſectionis partem ΘΓ de puncto Z ducendis, quæ propior eſt ipſi ZΓ minor erit remotiore. Recta igitur Zζ minor eſt quam Zε. Dico quoque quod Zε minor eſt quam ZΘ. Vel enim minor erit eâ, vel æqualis ei, vel major. Ac ſi fieri poſſit, ſit major eâ, & capiatur ZP major quam ZΘ, minor vero quam Zε; ac centro Z, radio ZP deſcribatur circulus Pαβ, qui proinde occurret ſectioni inter Θ & ε, puta ad α. Jungatur Zα: cumque Zα remotior eſt à ZΓ quam Zε, major erit Zα quam Zε. Verum Zα æqualis eſt ipſi ZP *ex Hypotheſi*: recta igitur ZP major erit quam Zε. Sed manifeſto minor eſt eâ; quod abſurdum: quare Zε non major eſt quam ZΘ. Si vero fieri poſſit, ſit æqualis ei, & ducatur inter eas intermedia aliqua ut Zη: recta igitur Zη major erit quam Zε, ac proinde major quam ZΘ. Fiat igitur Zι major quam ZΘ, minor vero quam Zη; ac centro Z, radio Zι deſcribatur circulus ικυ occurrens ſectioni inter Θ & ε. Occurrat autem ad κ: adeoque juncta Zκ major erit quam Zη, utpote remotior à ZΓ. Eadem autem æqualis eſt ipſi Zι: quare Zι major eſt quam Zη. Poſuimus autem eam minorem eſſe: quod abſurdum. Recta igitur Zε minor eſt quam ZΘ. Quapropter ZΘ major eſt quavis aliâ de puncto Z ad ſectionem ABΓ ducendâ, eidemque propior major eſt remotiore. Recta vero ZΓ Minima eſt rectarum de puncto Z ad ſectionis partem ΓΘ ductarum, *uti* ZA *Minima eſt ductarum ad alteram ejus partem* AΘ; atque ZΓ major eſt quam ZA: igitur ZA minor eſt quavis recta quæ de puncto Z ad totam ſectionem ABΓ duci poteſt, quemadmodum ZΘ earundem Maxima eſt. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXIV.

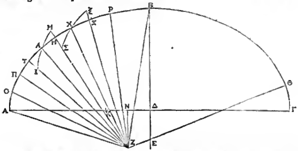
SI detur punctum ſub Axe majore Ellipſeos, de quo poſſibile ſit duas tantum rectas, è quibus abſcindat Axis Minimas, *ad oppoſitam ſectionem ducere: erit* Maxima *rectarum, de puncto illo ad latus iſtud Sectionis ducendarum, altera ex duabus illis quæ occurrit Axi minori; eidemque ab utroque latere propior major erit remotiore: earundem vero* Minima *erit ea quæ à dato puncto ad Verticem Sectionis propiorem ducitur.*

Sit ABΓ Ellipſis, cujus Axis major AΓ, & ſit punctum datum Z ſub Axe majore; de centro vero ſectionis Δ erigatur Axi normalis BΔE: ac poſſibile ſit de puncto Z duas tantum rectas ducere, quarum portiones inter ſectionem ABΓ & Axem interceptæ ſint Minimæ. Ponamus autem has rectas de Z ductas eſſe ZH, ZΘ; neque duci poſſe aliam præter has duas à qua abſcindatur Minima. Dico rectam ZΘ, quæ occurrit Axi minori, majorem eſſe qualibet aliâ de Z ad ſectionem ABΓ ducendâ; eidemque ZΘ ab utroque latere propiorem majorem eſſe remotiore: rectam vero ZA minorem eſſe quavis aliâ.

De puncto Z demittatur normalis ZN, ac manifeſtum eſt ZN non cadere poſſe

 ſuper

ſuper centrum Sectionis. Nam ſi caderet ſuper centrum; vel impoſſibile eſſet ducere de Z rectam aliam è qua abſcinderetur Minima, præter ipſam ZN ad ſectionem productam; vel poſſibile eſſet ducere duas alias rectas æquales (per 53am & 54am hujus) è quarum utrâque abſcinderetur Minima. Hoc autem eſt contra hypotheſin. Cadat igitur normalis ZN inter puncta A, Δ; ac recta AN major erit ſemilatere recto; quia ſi non major fuerit eo, impoſſibile foret (per 50mam hujus) ducere de Z inter A & B rectam aliquam cujus portio intercepta ſit Minima. Itaque AN, uti diximus, major eſſe debet dimidio lateris recti. Fiat ΔK ad KN ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum, & inveniantur inter AΔ, ΔK duæ mediæ proportionales; & erigatur normalis, quemadmodum fecimus in Prop. 64ta hujus; cæteraque peragantur, uſque dum inveniatur recta illa quæ cum recta ZN conferenda eſt. Huic autem ſic inventæ æqualis eſſe debet recta ZN: nam ſi major fuerit eâ, nulla duci poteſt recta de Z ad ſectionis partem AB, è qua abſcindatur Minima. Neque minor erit ea: tunc enim poterimus ducere duas rectas ad ſectionem AB, è quarum utraque (per 52dam hujus) intercipiatur Minima; poſſumus etiam (per 55am hujus) rectam tertiam educere de Z ad ſectionis partem BΓ. Recta igitur ZN æqualis erit rectæ inventæ.



Jam ſi duci poſſit, de Z ad ſectionem AB, una tantum recta è qua abſcindatur Minima; erunt Minimæ, à terminis cæterarum ad ſectionem AB ductarum emiſſæ, remotiores à Vertice A quam ipſæ rectæ de Z ductæ. Ducantur igitur per Z rectæ ZA, ZO, ZΠ; ac, modo in demonſtrandis Propoſitionibus 72di & 73tii uſitato, manifeſtum erit rectam ZA minorem eſſe quam ZO, ac ZO quam ZΠ. Dico quoque quod ZΠ minor eſt quam ZH. Nam ſi non ſit minor ea, ſit major ea, vel æqualis ei. Imprimis autem ſit æqualis ei, & ducatur inter eas alia recta ZT quæ major erit quam ZΠ, *utpote remotior ab* AZ: cumque ZΠ ipſi ZH æqualis eſt, erit ZT major quam ZH. Capiatur in ZT recta aliqua minor quam ZT, major vero quam ZH, ut ZI; ac centro Z, radio ZI deſcribatur circulus IΛM; qui neceſſario occurret ſectioni TH. Occurrat autem in Λ, & jungatur ZΛ, quæ, cum remotior ſit ab AZ, major erit quam ZT. Verum ZΛ ipſi ZI æqualis eſt, quare ZI major erit quam ZT. ſed eadem minor eſt, quod abſurdum: *adeoque* ZΠ *ipſi* ZH *non eſt æqualis*. Parique argumento conſtabit ZH non eſſe minorem quam ZΠ; ac proinde major erit ea. Quapropter ZH major eſt quavis recta de Z ad ſectionis partem AH ducibili; eidemque propior major eſt remotiore: earundem vero Minima eſt ZA.

Simili autem methodo, qua rem demonſtravimus in rectis inter A & H ductis, probabitur ipſam ZB majorem eſſe quavis recta inter H & B ab eodem puncto Z ducendâ; eidemque propiorem majorem eſſe remotiore. Dico quoque quod ZH minor eſt quavis recta inter H, B ducta. Ducatur enim alia ut ZP; ac, ſi fieri poſſit ut non ſit major quam ZH, ſit æqualis ei, vel minor eâ. Sit autem primo æqualis ei, & inter ipſas ZH, ZP ducatur intermedia ut ZΞ; quæ proinde minor erit quam ZP: adeoque minor quam ZH. Fiat ZΣ major quam ZΞ, minor vero quam ZH;

ac

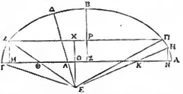
ac centro Z radio ZΣ circinetur circulus ΣXξ, occurrens ſectioni inter Z & H, puta ad X: & juncta recta ZX minor erit quam ZΞ, quia longius abeſt ab ipſa ZB. Hæc autem æqualis eſt ipſi Zξ; adeoque Zξ minor erit ipſa ZΞ: eandem autem ſuppoſuimus majorem eâ: quod abſurdum. Quare recta ZP non eſt æqualis ipſi ZH. Pariterque demonſtrari poteſt ZP non eſſe minorem eâ. Recta igitur ZB Maxima eſt rectarum de puncto Z ad ſectionis partem AB ductarum, eidemque propior major eſt remotiore, ZH *vero minor eſt quavis recta ad ſectionis partem* HB *ductâ.*

Quoniam vero ABΓ Ellipſis eſt, cujus Axis major AΓ, ac minor BΔE; punctum autem Z ſitum eſt intra angulum AΔE, ſi ab eodem ad ſectionis partem BΓ ducatur recta altera ZΘ, *cujus intercepta* ΘΛ *ſit Minima*: conſtabit, modo in proximâ Propoſitione uſurpato, rectam ZΘ Maximam eſſe omnium de puncto Z ad ſectionis partem BΓ ductarum, eidemque propiorem majorem eſſe remotiore. Demonſtratum autem eſt ZB majorem eſſe quavis recta ad ſectionis partem AB ducta, eidemque propiorem majorem eſſe remotiore. Quocirca ZΘ major eſt quavis ductâ de puncto Z ad totam ſectionem ABΓ, eidemque utrinque propiores majores ſunt remotioribus: Omnium vero Minima eſt recta ZA. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXV.

SI detur punctum infra Axem majorem Ellipſeos, tale ut ab eodem duci poſſint ad Sectionem tres rectæ, è quibus abſcindat Axis Minimas; *quarum duæ quidem ad eaſdem partes Axis minoris ad quas ſitum eſt punctum, tertia vero ad contrarias: erit tertia illa, quæ ad partes contrarias ducitur, major quavis alia ductâ quæ mediam trium & Sectionis Verticem à puncto dato remotiorem interjacet, eidemque propior major erit remotiore; è cæteris vero, inter mediam trium & Sectionis Verticem puncto dato viciniorem interjectis,* Maxima *erit illa quæ Vertici puncto dato adjacenti adjacet, eidemque utrinque propior* major erit remotiore; ex his autem duabus Maximis, major *erit ea, quæ ducitur ad partes contrarias iis ad quas ſitum eſt punctum datum.*

Sit ABΓ Ellipſis, cujus Axis major AΓ & centrum Ξ; & ſit BΞ normalis ſuper Axem ad centrum ſectionis, ſub quo ſit punctum datum E: ducantur autem ex eodem tres rectæ è quibus abſcindat Axis Minimas, ut EH, EZ, EΔ; quarum duæ, ut EZ, EΔ, erunt ad eaſdem partes ad quas ſitum eſt E; tertia vero EH ad contrarias. Dico EH Maximam eſſe rectarum de puncto E ad totam ſectionem ABΓ ductarum; eidemque utrinque propiorem, è rectis ad ſectionis partem inter Δ & A ductis, majorem eſſe remotiore.



Quoniam enim rectæ ΔΛ, ZΘ ſunt Minimæ, conſtabit, eo quo in Parabola demonſtravimus modo (Prop. 72[da] hujus) quod recta EZ Maxima eſt ex iis quæ de puncto E ad ſectionis partem ΓΔ duci poſſint; quodque eidem propior major eſt remotiore. Pariter cum ΔΛ & HK ſunt Minimæ, eodem modo ac in Propoſitione præcedente, probabitur rectam EH majorem eſſe quavis rectâ de puncto E ad partem AΔ ductâ.

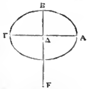
Dico quoque quod EH major eſt quam EZ. De punctis Z, H, E demittantur normales ZM, HN, EO; & MΞ erit ad MΘ (per 15[am] hujus) ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum: ac (per eandem) NΞ erit ad NK ſicut diameter tranſverſa ad latus rectum: quare ΞM erit ad MΘ ſicut ΞN ad NK. Ratio autem OM ad MΘ minor eſt ratione ΞM ad MΘ, ac proinde ratio OM ad MΘ minor eſt ratione ΞN ad NK;

ac multo minor ratione ON ad NK: dividendo autem ratio OΘ ad ΘM minor erit ratione OK ad KN. Sed OΘ eſt ad ΘM ſicut EO ad ZM: & OK eſt ad KN ſicut EO ad HN: ratio igitur EO ad ZM minor eſt ratione ejuſdem ad HN. unde patet ZM majorem eſſe quam HN; adeoque recta per punctum Z Axi AΓ parallela remotior erit à puncto A quam punctum H. Sit hæc parallela recta ZPΠ, & producatur normalis EO ad X; & ob ZP ipſi PΠ æqualem, recta ΠX major erit quam XZ. Recta vero EX, utrique triangulo EXZ, EXΠ communis, normalis eſt ſuper ZΠ: quapropter EΠ major eſt quam EZ, & EH major eſt quam EΠ; atque adeo major eſt quam EZ. Igitur EH Maxima eſt è rectis ad ſectionem ABΓ de puncto E ducendis, ac quæ propiores vel remotiores ſunt ab eadem ita ſe habebunt quemadmodum in Propoſitione deſcriptum eſt. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXVI.

S*I normalis de puncto dato ad Ellipſeos Axem majorem demiſſa cadat ſuper centrum Sectionis; ac ſi nulla alia recta, è quâ abſcindat Axis* Minimam, *duci poſſit de puncto illo ad oppoſitos Ellipſeos quadrantes: erit* Maxima *rectarum de puncto dato ad Sectionem ducendarum ipſa normalis producta; eidemque propior major erit remotiore.*

Sit ABΓ Ellipſis, cujus Axis major AΓ & centrum Δ; & ſit datum punctum E; normalis autem ab E ad centrum demiſſa ſit EΔ, quæ producatur ad B: nec poſſibile ſit de puncto E ad ſectionem BΓ rectam aliquam ducere, cujus portio intercepta ſit Minima, præter ipſam BΔ. Dico EB Maximam eſſe rectarum quæ de puncto E ad ſectionem duci poſſunt.

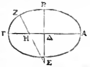


Nam ſi non duci poſſit de puncto E ad ſectionem BΓ recta aliqua è qua abſcindatur Minima; rectæ Minimæ, ab extremitatibus rectarum de puncto E eductarum (per 53am hujus) remotiores erunt à Vertice Γ quam ipſæ eductæ. Ductis autem Tangentibus, eo quo demonſtrata eſt Prop. 72da modo, conſtabit EB majorem eſſe quâvis aliâ rectâ de puncto E ad ſectionem ductâ; eidemque propiorem majorem eſſe remotiore. Q. E. D.

PROPOSITIO LXXVII.

S*I normalis ad Axem majorem Ellipſeos demiſſa cadat ſuper centrum Sectionis; poſſibile autem ſit ad quadrantem alterutrum Sectionis ducere rectam aliquam è qua abſcindat Axis* Minimam: *erit recta hæc* Maxima *omnium de puncto dato ad eundem quadrantem ductarum, eidemque propior major erit remotiore.*

Sit ABΓ Ellipſis, cujus Axis major AΓ, ac centrum Δ; ſit autem E punctum infra Axem AΓ datum, unde demiſſa normalis EΔ: ac poſſibile ſit ab E ad ſectionis quadrantem ΓB educere rectam aliam è qua abſcindatur Minima, puta EHZ. Dico EZ majorem eſſe quavis alia de puncto E ad ΓB ducenda, eidemque ab utraque parte propiorem majorem eſſe remotiore.



Quoniam enim BΔ, ZH ſunt duæ Minimæ, quæ productæ conveniunt in E; rectæ Minimæ prodeuntes e punctis quibuſvis ſectionis inter Γ & Z (per 46am hujus) occurrent Axi remotius à Vertice Γ quam rectæ connectentes eadem puncta & E, Minimæ vero de punctis ſectionis inter A & Z ductæ (per eandem 46am) propiores erunt Vertici Γ quam rectæ de puncto dato E ad eadem in ſectione puncta prodeuntes. Quibus poſitis, ad modum demonſtrationis Prop. 72dæ, ope Tangentium, probabitur rectam EZ majorem eſſe quâvis alia de puncto E ad ſectionem BΓ ducta, eidemque propiorem majorem eſſe remotiore. Q. E. D.

ΠΑΠΠΟΥ

Digitized by Google

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΛΗΜΜΑΤΑ
ΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟ ΕΚΤΟΝ
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA
IN SEXTUM LIBRUM CONICORUM
APOLLONII PERGÆI.

ΛΗΜΜΑ α΄.

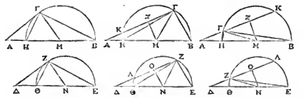
Ἔστω δύο τρίγωνα ἀμβλυγώνια τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἀμβλείας ἔχοντα τὰς Γ, Ζ γωνίας, καὶ ἴσας τὰς Α, Δ ὀξείας. ὀρθαὶ τῆς ΒΓ, ΕΖ ἤχθωσαν αἱ ΓΗ, ΖΘ· ἔστω δὲ ὡς τὸ ὑπὸ τῆς ΒΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΕΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Γεγράφθω γὰρ διὰ τῶν ΗΒ, ΕΘ ἡμικύκλια, ἐλεύσεται δὴ καὶ διὰ τῶν Γ, Ζ. ἐρχέσθω καὶ ἔστω τὰ ΗΓΒ, ΒΖΘ· ἤτοι δὴ ἐφάπτονται αἱ ΑΓ, ΔΖ τῶν ἡμικυκλίων, ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν ἐφάπτονται, φανερὸν ὅτι γίνεται ὅμοια τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τρίγωνα. ἐὰν γὰρ λάβω τὰ κέντρα τὰ Μ, Ν, καὶ ἐπιζεύξω τὰς ΜΓ, ΝΖ, ἔσονται ὀρθαὶ αἱ

LEMMA I.

Sint duo triangula obtuſangula ΑΒΓ, ΔΕΖ, angulos habentia obtuſos Γ, Ζ; acutos vero & æquales angulos Α, Δ. ipſis ΒΓ, ΕΖ ad angulos rectos ſint ΓΗ, ΖΘ: rectangulum autem ΒΑΗ ſit ad quadratum ex ΑΓ in eadem ratione quam habet rectangulum ΕΔΘ ad quadratum ex ΔΖ. Dico triangulum ΑΒΓ ſimile eſſe triangulo ΔΕΖ.

Diametris ΗΒ, ΕΘ deſcribantur ſemicirculi, quæ proinde tranſibunt per puncta Γ, Ζ; atque ſint ſemicirculi ΒΓΗ, ΕΖΘ, quos vel tangunt rectæ ΑΓ, ΔΖ, vel non. Si vero tangant, manifeſtum eſt ſimilia eſſe triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ. Nam ſi capiantur centra Μ, Ν ac jungantur ΜΓ, ΝΖ, erunt anguli ΜΓΑ, ΝΖΔ recti.



ὑπὸ ΜΓΑ, ΝΖΔ γωνίαι, καὶ εἰσὶν αἱ Α, Δ γωνίαι ἴσαι· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΓ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΝΖ γωνίᾳ, καὶ τὰ ἡμίση· ἡ Β ἄρα γωνία τῇ Ε ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ καὶ ἡ Α τῇ Δ· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἐφαπτέσθωσαν, ἀλλὰ τεμνέτωσαν τὰ ἡμικύκλια κατά τινα σημεῖα τὰ Κ, Λ, καὶ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΜΞ, ΝΟ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΚΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ ΛΟ τῇ ΟΖ. ὅμοιον δὲ τὸ ΑΜΞ τῷ ΔΝΟ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΜ οὕτως ἡ ΟΔ πρὸς ΔΝ. ἐπειδὴ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΑ

& anguli Α, Δ ſunt æquales: angulus igitur ΑΜΓ angulo ΔΝΖ æqualis eſt, unde & eorundem ſemiſſes, nempe anguli ΑΒΓ, ΔΕΖ ſunt æquales. Sed anguli ad Α & Δ ſunt æquales: quocirca triangula ſunt ſimilia.

Sed non tangant, ſed occurrant ſemicirculis in punctis Κ, Λ, ac ducantur normales ΜΞ, ΝΟ: eſt igitur ΚΞ ipſi ΞΓ æqualis, ut & ΛΟ ipſi ΟΖ. Simile autem eſt triangulum ΑΜΞ triangulo ΔΝΟ, adeoque ΞΑ eſt ad ΑΜ ſicut ΟΔ ad ΔΝ. Cum vero rectangulum ΒΑΗ eſt ad quadratum ex ΑΓ ſicut rectangulum ΕΔΘ ad quadratum ex ΔΖ, erit etiam rectangulum ΚΑΓ ad quadratum ex ΑΓ, ſive ΚΑ

ad ΑΓ, ſicut rectangulum ΑΔΖ ad quadratum ex ΔΖ, hoc eſt ΑΔ ad ΔΖ; unde fit ΒΑ ad ΑΓ ſicut ΟΔ ad ΔΖ. Sed ΒΑ eſt ad ΑΜ ſicut ΟΔ ad ΔΝ, ob ſimilia triangula: ex æquo igitur ΓΑ eſt ad ΑΜ ſicut ΖΔ ad ΔΝ: ac circa æquales angulos latera ſunt proportionalia, quare anguli ΑΜΓ, ΔΝΖ, eorumque ſemiſſes, nempe anguli Β, Ε ſunt æquales. Sed & anguli Α, Δ ex hypotheſi ſunt æquales: quapropter triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΕΖ ſimile eſt.

Hujus autem converſa manifeſta eſt: nempe quod, ſi fuerint triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ ſimilia, anguli vero ΒΓΗ, ΒΖΘ recti, fiet rectangulum ΒΑΗ ad quadratum ex ΑΓ ſicut rectangulum ΕΔΘ ad quadratum ex ΔΖ. Etenim ob ſimilia triangula, ΒΑ eſt ad ΑΓ ſicut ΕΔ ad ΔΖ; ac ΗΑ eſt ad ΑΓ ſicut ΘΔ ad ΔΖ: componendo igitur rationes *conſtat propoſitum.*

πρὸς ΑΓ οὕτω τὸ ὑπὸ ΑΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΑΔ πρὸς ΔΖ· ὥστε καὶ ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΟΔ πρὸς ΔΖ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΜ οὕτως ἐστὶν ἡ ΟΔ πρὸς ΔΝ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΜ οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς ΔΝ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς Α, Δ ἀνάλογόν εἰσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΑΜΓ τῇ ὑπὸ τῶν ΔΝΖ γωνίᾳ, καὶ τὰ ἡμίση. ἡ Β ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ Ε. ἀλλὰ καὶ ἡ Α τῇ Δ καθ᾽ ὑπόθεσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Συμφανὲς δὲ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ, τοῦ ΑΒΓ ὄντος ὁμοίου τῷ ΔΒΖ, καὶ ὀρθῶν τῶν ὑπὸ ΒΓΗ, ΒΖΘ, δεῖξαι ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΒΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ· ἔστι γὰρ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων, ὡς μὲν ΒΑ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, ὡς δὲ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΘΔ πρὸς ΔΖ· καὶ ὁ συνημμένος.

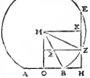
LEMMA II.

Super chordas ΑΒ, ΓΔ, ſint duo ſimilia ſegmenta majora ſemicirculo, ac ducantur catheti ΕΖΗ, ΘΚΛ: ſit autem ut ΕΗ ad ΗΖ ita ΘΛ ad ΛΚ, oportet demonſtrare circumferentiam ΒΖ ſimilem eſſe circumferentiæ ΔΚ.

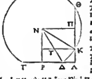
ΛΗΜΜΑ β′.

Ἔστω δύο ὅμοια τμήματα μείζονα ἡμικυκλίου τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἤχθωσαν κάθετοι ΕΖΗ, ΘΚΛ· ἔστω δὲ ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ. δεικτέον ὅτι ὁμοία ἐστὶν ἡ ΒΖ περιφέρεια τῇ ΔΚ περιφερείᾳ.

Capiantur centra Μ, Ν, ac ducantur normales ΜΞ, ΜΟ; ΝΠ, ΝΡ: ac jungantur ΜΒ, ΝΔ. Anguli autem ΟΜΒ, ΡΝΔ æquales ſunt, quia angulis in utroque ſegmento ſunt æquales; ac anguli Ο, Ρ recti ſunt: quare & anguli ΜΒΟ, ΝΔΡ ſunt æquales. Ipſis ΑΒ, ΓΔ parallelæ ducantur ΖΣ, ΚΤ ac jungantur ΜΖ, ΝΚ: angulus igitur ΜΣΖ angulo ΝΤΚ æquatur. Quoniam vero ΕΗ eſt ad ΗΖ ſicut ΘΛ ad ΛΚ, erit ΞΗ ad ΗΖ ſicut ΠΛ ad ΛΚ; erit quoque ΗΞ ad ΞΖ, hoc eſt ΜΒ ſive ΖΜ ad ΜΣ, ſicut ΛΠ ad ΠΚ, hoc eſt ΔΝ ſive ΝΚ ad ΝΤ. Anguli autem ΜΣΖ, ΝΤΚ ſunt æquales, anguli vero ΜΖΣ, ΝΚΤ acuti: proinde angulus ΣΜΖ angulo ΤΝΚ æqualis eſt; adeoque circumferentia ΒΖ circumferentiæ ΔΚ ſimilis. *Q. E. D.*



Εἰλήφθω τὰ κέντρα τὰ Μ, Ν, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΜΞ, ΜΟ, ΝΠ, ΝΡ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΒ, ΝΔ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΟΜΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΡΝΔ γωνίᾳ, ἴσαι γάρ εἰσι αἱ ἐν τοῖς τμήμασι κατὰ μίαν, καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ Ο, Ρ· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΜΒΟ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΔΡ γωνίᾳ. Ἤχθωσαν τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΖΣ, ΚΤ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΖ, ΝΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ ΜΣΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΝΤΚ γωνίᾳ. ἐπεὶ δέ ἐστιν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, οὕτως ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΞΗ πρὸς ΗΖ οὕτως ἐστὶν ἡ ΠΛ πρὸς ΛΚ· ὥστε καὶ ἡ ΗΞ πρὸς ΞΖ, τουτέστιν ἡ ΜΒ ἤτοι ΖΜ πρὸς ΜΣ, οὕτως ἡ ΛΠ πρὸς ΠΚ, τουτέστιν ἡ ΔΝ ἤτοι ΝΚ πρὸς ΝΤ, καί εἰσιν αἱ μὲν ὑπὸ ΜΣΖ, ΝΤΚ ἴσαι, αἱ δὲ ὑπὸ ΜΖΣ, ΝΚΤ ὀξεῖαι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΣΜΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΤΝΚ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΖ περιφέρεια τῇ ΔΚ περιφερείᾳ.



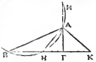
LEMMA III.

Sint duo triangula rectangula ΑΒΓ, ΔΕΖ rectos angulos habentia Γ, Ζ; ac ducantur ſub æqualibus angulis ΒΑΗ, ΕΔΘ rectæ ΑΗ, ΔΘ: ſit autem ut rectangulum ſub ΒΓΗ ad quadratum ex ΑΓ, ita rectangulum ΕΖΘ ad quadratum ex ΖΔ. Dico triangulum ΑΒΓ ſimile eſſe triangulo ΔΕΖ.

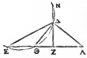
ΛΗΜΜΑ γ′.

Ἔστω δύο ὀρθογώνια τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ὀρθὰς ἔχοντα τὰς Γ, Ζ γωνίας· καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΒΑΗ, ΕΔΘ· ἔστω δὲ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΔ. λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστι καὶ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Circa triangula ΑΒΗ, ΔΕΘ deſcribantur ſegmenta circulorum ΒΗΑ, ΔΘΕ, quæ proinde ſimilia ſunt. Tangent autem ſegmenta rectæ ΑΓ, ΔΖ, vel non: primum vero tangant; ac proinde rectangulum ΒΓΗ æquale erit quadrato ex ΑΓ; hoc eſt, ſi ipſi ΑΗ ducatur normalis ΑΚ, rectangulo ΗΓΚ: rectangulum autem ΕΖΘ æquale erit quadrato ex ΔΖ, hoc eſt rectangulo ΘΖΛ,



Γεγράφθω γὰρ περὶ τὰ ΑΒΗ, ΔΕΘ τρίγωνα τμήματα κύκλων τὰ ΒΗΑ, ΔΘΕ· ὅμοια ἄρα ἐστίν. ἤτοι ἐφάπτονται αἱ ΑΓ, ΔΖ τῶν τμημάτων, ἢ οὔ. ἐφαπτέσθωσαν πρότερον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΒΓΗ τῷ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστιν, ἐὰν πρὸς ὀρθὰς ἀγάγω τῇ ΑΗ τὴν ΑΚ, τῷ ὑπὸ τῶν ΗΓΚ· τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΖΘ τῷ ἀπὸ ΔΖ, τουτέστιν, ἐὰν ὀρθὴν ἀγάγω ΔΛ τῇ ΔΘ, τῷ ὑπὸ



Digitized by Google

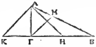
ὑπὸ ΘΖΑ· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΚ, ἡ δὲ ΕΖ τῇ ΖΑ. καὶ ὀρθαὶ αἱ Γ, Ζ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΚ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΔΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΔΖ. καί εἰσιν ἴσαι αἱ ὑπὸ ΒΑΚ, ΕΔΛ. ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΒΔΘ, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΗΑΚ, ὀρθή τε ἡ ὑπὸ ΘΔΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ ὀρθαὶ αἱ Γ, Ζ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἐφαπτέσθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ἀλλὰ τεμνέτωσαν κατὰ τὰ Μ, Ν σημεῖα. ἔστιν δὲ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΜΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΑ, τουτέστιν ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΑ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΔΖΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, τουτέστιν ἡ ΝΖ πρὸς ΖΔ. καὶ ἔστιν ὅμοια μείζονα τμήματα τὰ ΒΑΗ, ΒΔΘ· ὁμοία ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ περιφέρεια τῇ ΔΘ περιφερείᾳ· ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ Β γωνία τῇ Ε. ὅμοιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΖ τριγώνῳ.

Ἄλλως τὸ αὐτό.

Ἔστω δύο τρίγωνα ὀρθὰς ἔχοντα τὰς Γ, Ζ γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΒΑΗ, ΕΔΘ· ἔστω τε ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ. ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΖ τριγώνῳ.

Ἤχθωσαν τῇ ΑΗ, ΔΘ ὀρθαὶ αἱ ΑΚ, ΔΛ· ἴσον ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ ΑΓ τῷ ὑπὸ ΗΓΚ, τὸ δὲ ἀπὸ ΔΖ τῷ ὑπὸ ΘΖΛ. ἔστιν δὲ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΓΚ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΚ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΛ, τουτέστιν ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ.

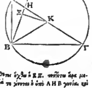


ἔχθωσαν τῇ ΑΒ, ΔΛ παράλληλοι αἱ ΓΜ, ΖΝ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΜ πρὸς ΜΑ οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΔ. καί εἰσιν ὀρθαὶ μὲν αἱ πρὸς τοῖς Γ, Ζ σημείοις, ἴσαι δὲ αἱ πρὸς τοῖς Μ, Ν γωνίαι ταῖς ὑπὸ ΒΑΚ, ΒΔΛ. διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΖ τριγώνῳ.

ΛΗΜΜΑ δʹ.

Ἔστω δύο τρίγωνα ὀρθὰς ἔχοντα τὰς πρὸς τοῖς Β, Ε σημείοις γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ ΒΗ, ΕΘ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΑΗΒ, ΔΘΕ· ἔστω τε ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΔΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ. δεικτέον ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Περιγεγράφθωσαν κύκλοι, καὶ εἰλήφθω αὐτῶν τὰ κέντρα τὰ Κ, Λ. φανερὸν δὴ ὅτι ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῶν Η, Θ σημείων εἰσίν. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω τὸ μὲν Κ μεταξὺ τῶν Γ, Η σημείων, τὸ δὲ Λ μεταξὺ τῶν Δ, Θ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΒΗ, ΕΘ ἐπὶ τὰ Μ, Ν σημεῖα, καὶ ἀπὸ



τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΜΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΚΞ. πιπτέτω ἄρα μεταξὺ τῶν Η, Β, ἀμβλεῖα τε γίνεται ἡ ὑπὸ ΑΗΒ γωνία, καὶ ἔστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΔΘΕ· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ὑπὸ ΔΘΕ γωνία· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΘΝ. ὥστε ἡ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΕΝ κάθετος ἀγομένη πίπτει μεταξὺ τῶν Θ, Ν. πιπτέτω καὶ ἔστω ἡ ΛΟ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΟ τῇ ΟΕ, ὥστε μείζων ἐστὶν ἡ ΝΟ τῆς ΘΕ, πολλῷ ἄρα ἡ ΝΘ τῆς ΘΕ ἐστὶ μείζων· καὶ τὸ ὑπὸ ΝΘΕ, τουτέστι τὸ ΔΘΖ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ

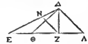
ductâ ſcilicet ipſi ΔΘ normali ΔΛ: quare recta ΒΓ ipſi ΓΚ æqualis eſt, ut & ΕΖ ipſi ΖΛ. & anguli ad Γ, Ζ ſunt recti; duplus eſt igitur angulus ΒΑΚ anguli ΒΑΓ, anguli etiam ΕΔΖ duplus eſt angulus ΒΔΛ angulus autem ΒΑΚ æqualis eſt angulo ΒΔΛ. quia anguli ΒΑΗ, ΒΔΘ ſunt æquales, uti & anguli ΗΑΚ, ΘΔΛ, quia recti; quare anguli ΒΑΓ ΒΔΖ æquales ſunt. ſed anguli ad Γ, Ζ ſunt recti: triangulum igitur ΑΒΓ triangulo ΔΕΒ ſimile eſt. *Q. E. D.*

Jam ſi non tangant circulos rectæ ΑΓ, ΔΖ, conveniant iiſdem in punctis Μ, Ν erit igitur ut rectangulum ΜΓΑ ad quadratum ex ΓΑ, hoc eſt ΜΓ ad ΓΑ, ita rectangulum ΔΖΝ ad quadratum ex ΔΖ, ſive ut ΝΖ ad ΖΔ ſunt autem ſegmenta ΒΑΗ, ΒΔΘ ſimilia & majora ſemicirculo: quare (*per præcedens Lemma*) circumferentia ΑΗ circumferentiæ ΔΘ ſimilis eſt; adeoque anguli Β, Ε æquales. Simile eſt igitur triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΒΖ. *Q. E. D.*

Idem Aliter.

Sint duo triangula rectos habentia angulos Γ, Ζ; ac ducantur ΑΗ, ΔΘ ſub æqualibus angulis ΒΑΗ, ΕΔΘ: ſit autem rectangulum ΒΓΗ ad quadratum ex ΑΓ ſicut rectangulum ΒΖΘ ad quadratum ex ΔΖ. dico triangulum ΑΒΓ ſimile eſſe triangulo ΔΒΖ.

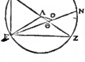
Ducantur ad angulos rectos ipſis ΑΗ, ΔΘ rectæ ΑΚ, ΔΛ: æquale eſt igitur quadratum ab ΑΓ rectangulo ΗΓΚ; ac quadratum ex ΔΖ rectangulo ΘΖΛ. unde rectangulum ΒΓΗ erit ad rectangulum ΗΓΚ, ſive ΒΓ ad ΓΚ, ſicut rectangulum ΒΖΘ ad rectangulum ΘΖΛ, ſive ΒΖ ad ΒΛ ipſis ΑΚ, ΔΛ parallelæ ducantur ΓΜ, ΒΝ;



ac fiet ΒΜ ad ΜΑ ſicut ΕΝ ad ΝΔ. anguli autem ad puncta Γ, Ζ ſunt recti, & anguli ad puncta Μ, Ν æquales ſunt angulis ΒΑΚ, ΒΔΛ Quapropter ex præmiſſis conſtabit triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΒΖ ſimile eſſe.

LEMMA IV.

Sint duo triangula rectos angulos habentia ad puncta Β, Ε, ac ducantur ΒΗ, ΕΘ ſub æqualibus angulis ΑΗΒ, ΔΘΕ: ſit autem rectangulum ΑΗΓ ad quadratum ex ΗΒ ſicut rectangulum ΔΘΖ ad quadratum ex ΘΕ. demonſtrandum eſt triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΕΖ ſimile eſſe.

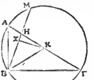


Circumſcribantur circuli quorum capiantur centra Κ, Λ. ac manifeſtum eſt centra eſſe ad eaſdem partes punctorum Η, Θ. nam ſi fieri poſſit ſit Κ inter puncta Γ, Η, centrum vero Λ inter Δ & Θ, ac producantur ΒΗ, ΕΘ ad puncta Μ, Ν, & de puncto Κ demittatur cathetus ΚΞ ſuper ipſam ΜΒ cadat autem inter puncta Η, Β; & erit angulus ΑΗΒ obtuſus, cui æqualis eſt angulus ΔΘΕ: unde angulus ΔΘΕ eſt etiam obtuſus, adeoque angulus ΔΘΝ acutus. hinc normalis à puncto Λ in ΕΝ demiſſa cadet inter puncta Θ, Ν. cadat, ſitque ea recta ΛΟ: eſt igitur ΝΟ ipſi ΟΕ æqualis, ac proinde ΝΟ major erit quam ΘΕ, ac ΝΘ multo major quam ΘΕ; unde rectangulum ΝΘΕ ſive ΔΘΖ majus erit quadrato ex

 ΕΘ.

ſed rectangulum ΑΘΖ eſt ad quadratum ex ΘΕ ſicut rectangulum ΑΗΓ ad quadratum ex ΗΒ abſurdum eſt igitur *rectangulum ΔΘΖ majus eſſe quadrato ex ΘΕ*. cum enim ΜΗ minor eſt quam ΗΒ erit rectangulum ΜΗΒ, *hoc eſt* ΑΗΓ, minus quadrato ex ΗΒ; centro igitur Κ exiſtente inter puncta Η, Γ, non erit centrum Λ inter puncta Δ, Θ.

Cadat igitur inter puncta Θ, Ζ, ac demittatur normalis ΛΟ. quoniam vero rectangulum ΑΗΓ, hoc eſt rectangulum ΜΗΒ, eſt ad quadratum ex ΗΒ, ſive ΜΗ ad ΗΒ, ſicut rectangulum ΔΘΖ ſive ΝΘΒ ad quadratum ex ΘΕ, hoc eſt ut ΝΘ ad ΘΕ, ac rectæ ΒΜ, ΝΒ biſecantur in Ξ & Ο: erit igitur ut ΒΞ ad ΞΗ ita ΒΟ ad ΟΘ. ſed ut ΗΞ ad ΞΚ ita ΘΟ ad ΟΛ; quia anguli ad Ξ, Ο ſunt recti, anguli vero ad Η, Θ æquales: ex æquo igitur ut ΒΞ ad ΞΚ ita ΕΟ ad ΟΛ; comprehendunt autem æquales angulos: ac proinde angulus ΒΚΞ angulo ΕΛΟ æqualis eſt. verum angulus ΞΚΗ angulo ΟΛΘ æqualis eſt: totus igitur ΒΚΗ toti ΕΛΘ æqualis, corundemque dimidia ſive anguli ΑΓΒ, ΔΖΕ æqualia ſunt: adeoque, ob rectos angulos ad Β & Ε, erit triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΕΖ ſimile.

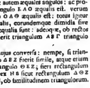


Ac manifeſta eſt hujus converſa: nempe, ſi triangulum ΑΒΓ triangulo ΔΕΖ fuerit ſimile, atque etiam triangulum ΗΒΓ triangulo ΘΕΖ; fieri rectangulum ΑΗΓ ad quadratum ex ΗΒ ſicut rectangulum ΔΘΖ ad quadratum ex ΘΕ, ob ſimilitudinem triangulorum.

LEMMA V.

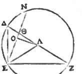
Sint duo triangula ΑΒΓ, ΔΕΖ æquales habentia angulos ad Α, Δ, non autem rectos; ac ducantur catheti ΑΗ, ΔΘ; habeat autem rectangulum ΒΗΓ ad quadratum ex ΑΗ eandem rationem quam habet rectangulum ΕΘΖ ad quadratum ex ΔΘ: ac ſint ΒΗ, ΕΘ ſegmenta majora rectarum ΒΓ, ΕΖ. dico triangulum ΑΒΗ ſimile eſſe triangulo ΔΕΘ, reliquumque reliquo.

Circumſcribantur circuli, ac producantur normales ΑΗ ΔΘ ad puncta Κ, Λ; ſintque circulorum centra Μ, Ν: à quibus ad ipſas ΑΚ, ΒΓ; ΔΛ, ΕΖ demittantur catheti ΜΞ, ΜΟ; ΝΠ, ΝΡ. & eodem quo præcedentia conſtabit modo, quod ΚΗ eſt ad ΗΑ ſicut ΛΘ ad ΘΔ, quodque ΑΞ eſt ad ΞΗ ſicut ΔΠ ad ΠΘ. junge ΑΜ, ΔΝ, & erit ut ΑΞ ad ΞΗ ita ΑΜ ad ΜΣ, utque ΔΠ ad ΠΘ ita ΔΝ ad ΝΤ; adeoque ΑΜ eſt ad ΜΣ ſicut ΔΝ ad ΝΤ. Connectantur etiam ΒΜ, ΕΝ. quoniam vero ſegmentum ΒΑΓ ſimile eſt ſegmento ΕΔΖ, reliquum ſegmentum ΒΚΓ reliquo ſegmento ΕΛΖ ſimile eſt. quæ igitur in illis inſunt anguli ſunt inter ſe æquales, ac proinde anguli ΒΜΟ, ΕΝΡ ſunt æquales, in primo caſu. In ſecundo vero manifeſtum eſt angulum ΒΜΟ angulo ΕΝΡ æqualem eſſe, quia ſunt in ſegmentis æ-



ΒΘ τετραγώνου, καί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΔΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ οὕτω τὸ ὑπὸ ΑΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. ἔστι γὰρ ἔλασσον, ἐπειδήπερ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΜΗ τῆς ΗΒ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΗΒ τοῦ ἀπὸ ΗΒ· οὐκ ἄρα τοῦ Κ κέντρου ὄντος μεταξὺ τῶν Η,Γ τὸ Λ ἔσται μεταξὺ τῶν Δ, Θ.

Ἔστω οὖν μεταξὺ τῶν Θ, Ζ, καὶ κατὰ τὰ αὐτὰ ἤχθω ἡ ΛΟ κάθετος. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΗΒ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ, τουτέστιν ὡς ἡ ΜΗ πρὸς ΗΒ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΘΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΝΘΒ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ, τουτέστιν ἡ ΝΘ πρὸς ΘΕ. καὶ τέτμηνται αἱ ΒΜ, ΝΒ δίχα τοῖς Ξ, Ο· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΞ πρὸς ΞΗ οὕτως ἡ ΒΟ πρὸς ΟΘ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΗΞ πρὸς ΞΚ οὕτως ἡ ΘΟ πρὸς τὴν ΟΛ· ὀρθαὶ μὲν γὰρ αἱ Ξ, Ο, ἴσαι δὲ αἱ πρὸς τοῖς Η,Θ σημείοις γωνίαι· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΒΞ πρὸς ΞΚ οὕτως ἡ ΕΟ πρὸς ΟΛ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΚΞ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΕΛΟ γωνίᾳ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΞΚΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΛΘ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΚΗ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΒΛΘ ἴση, καὶ τὰ ἡμίσεα· καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΔΖΕ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ Β, Ε γωνίαι· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΒΖ τριγώνῳ.

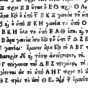


Φανερὸν δὲ καὶ τούτου ἀντίστροφον, ὅτι, ἐὰν ᾖ ὅμοιον τὸ μὲν ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΖ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΗΒΓ τῷ ΘΕΖ, ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων.

ΛΗΜΜΑ ι'.

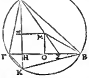
Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς Α, Δ γωνίας, μὴ ὀρθὰς δέ· καὶ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ· καὶ ἔστω ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΘ· καὶ ἔστω τῶν ΒΓ, ΕΖ εὐθειῶν μείζονα τμήματα ΒΗ, ΕΘ. λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστι τὸ μὲν ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ, τὸ δὲ λοιπὸν τῷ λοιπῷ.

Περιγεγράφθωσαν κύκλοι καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ ἐπὶ τὰ Κ, Λ σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Μ, Ν, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰς ΑΚ, ΒΓ· ΔΛ, ΕΖ ἤχθωσαν κάθετοι αἱ ΜΞ, ΜΟ· ΝΠ, ΝΡ. ἔσται δὴ κατὰ τὰ αὐτὰ τοῖς προγεγραμμένοις, ὡς ἡ ΚΗ πρὸς ΗΑ οὕτως ἡ ΛΘ πρὸς ΘΔ· ὥστε καὶ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς ΞΗ, οὕτως ἡ ΔΠ πρὸς ΠΘ. ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΜ, ΔΝ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΞ πρὸς ΞΗ οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς ΜΣ, ὡς δὲ ἡ ΔΠ πρὸς ΠΘ οὕτως ἡ ΔΝ πρὸς ΝΤ· καὶ ὡς ἄρα ΑΜ πρὸς ΜΣ οὕτως ἡ ΔΝ πρὸς ΝΤ. ἐπιζεύχθωσαν δὴ αἱ ΒΜ, ΕΝ. ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚΓ τμῆμα λοιπῷ τῷ ΒΑΖ τμήματι ὅμοιόν ἐστιν· αἱ ἄρα ἐν αὐτοῖς γωνίαι ἴσαι εἰσίν, καί εἰσιν αὐτῶν κατὰ μίαν ἴσαι αἱ ὑπὸ τῶν ΒΜΟ, ΕΝΡ ἄρα γωνίαι ἴσαι εἰσίν, ἐπὶ τῆς πρώτης διαθέσεως τῶν πτώσεων. ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, ἐκ παρακειμένων φανερὸν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΜΟ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΕΝΡ, καὶ γὰρ αἱ ἐν ἴσοις ΒΑΓ,



ΒΑΓ, ΕΔΖ τμήματι γωνίας· γίνεται ἄρα ὡς ἡ ΒΜ πρὸς ΜΟ, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΟ, οὕτως ἡ ΕΝ πρὸς ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΔΝ πρὸς ΝΡ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΜ πρὸς ΜΣ, οὕτως ἡ ΔΝ πρὸς ΝΤ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΜΟ πρὸς ΜΣ οὕτως ἡ ΡΝ πρὸς ΝΤ. καί εἰσιν ὀρθαὶ μὲν αἱ Ο, Ρ γωνίαι, ὀξεῖα δ' ἑκατέρα τῶν Σ, Τ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΟΜΣ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΡΝΤ γωνίᾳ. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΜΟ τῇ ὑπὸ ΕΝΡ ἴση ἐστίν· καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΜΣ ἄρα τῇ ὑπὸ τῶν ΕΝΤ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ Γ γωνία τῇ Ζ ἐστὶν ἴση. ὅμοια ἄρα ἐστὶ πάντα πᾶσι.

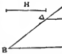
Δειχθέντος δὲ καὶ ἐπὶ μιᾶς γωνίας, ἢ τῆς ἀμβλείας ἢ ὀξείας, προγεγραμμένης δείξεως, τὸ λοιπὸν ἀποδείξομεν οὕτως. ὑποκείσθω γὰρ ἀποδεδεῖχθαι, ὅτι τῶν ἴσων ἀμβλειῶν τῶν γωνιῶν τὸ πρότερον, κατὰ τὴν προγεγραμμένην σύνταξιν, καὶ ἔστω δὴ νῦν ὀξειῶν οὐσῶν ἴσων τῶν ΒΑΓ, ΕΔΖ, δεῖξαι, ὅτι ὅμοια τὰ τρίγωνα. πάλιν περιγεγράφθωσαν οἱ κύκλοι, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ ἐπὶ τὰ Κ, Λ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ, ΕΛ, ΛΖ· ἴσαι ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ ΒΚΓ, ΕΛΖ γωνίαι ἀμβλεῖαι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΚΗ πρὸς ΗΑ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΘΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΔΘΛ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ, τουτέστιν ἡ ΛΘ πρὸς ΘΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΛ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΒΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΚ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΛ. καί εἰσιν ἴσαι ἀμβλεῖαι αἱ ὑπὸ τῶν ΒΚΓ, ΕΛΖ γωνίαι, καὶ κάθετοι αἱ ΚΗ, ΛΘ· διὰ δὴ τὸ προγεγραμμένον, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΒΚΗ τρίγωνον τῷ ΕΛΘ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΓΚΗ τῷ ΖΛΘ. ὥστε καὶ τὸ μὲν ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ ἐστὶν ὅμοιον, τὸ δὲ ΑΗΓ τῷ ΔΘΖ· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ ὅλῳ τῷ ΔΕΖ ἐστὶν ὅμοιον.



ΛΗΜΜΑ ς'.

Θέσει δεδομένων τῶν ΑΒ, ΑΓ εὐθειῶν, ἀγαγεῖν παρὰ θέσει τὴν ΔΕ, καὶ ποιεῖν δοθείσῃ ἴσην τὴν ΔΕ.

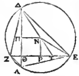
ΓΕΓΟΝΕΤΩ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ· παρὰ θέσει ἄρα ἐστί. καί ἐστι δοθὲν τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ. διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΔΕ. καὶ δοθεῖσα ἡ ΔΕ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΖ. ἀλλὰ καὶ θέσει, καὶ δοθέν ἐστι τὸ Α· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ Ζ. διὰ δὲ δεδομένου τοῦ Ζ παρὰ θέσει τῇ ΑΒ ἦκται ἡ ΖΕ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ, θέσει δὲ ἡ ΑΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Ε. καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ θέσει ἦκται ἡ ΔΕ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ.



Συντεθήσεται δὲ τὸ πρόβλημα οὕτως. ἔστωσαν αἱ μὲν τῇ θέσει δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΑΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα τῷ μεγέθει ἔστω ἡ Η, παρ' ἣν δὲ ἀγαγεῖν δεῖ ἔστω ἡ ΑΖ, καὶ τῇ Η ἴση κείσθω ἡ ΑΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ζ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΕ, διὰ δὲ τοῦ Ε τῇ ΑΖ ἤχθω ἡ ΕΔ. λέγω ὅτι ἡ ΔΕ ποιεῖ τὸ πρόβλημα. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΑΖ, ἀλλὰ ἡ ΑΖ τῇ Η ἐστὶν ἴση, τουτέστι τῇ δοθείσῃ· ἡ ΔΕ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα. καὶ φανερὸν ὅτι μόνη, ἀεὶ γὰρ ἡ ἔγγιον τοῦ Α τῆς ἀπώτερον ἐστιν ἐλάσσων.

qualibus ΒΑΓ, ΕΔΖ: eſt igitur ſicut ΒΜ ad ΜΟ ſive ΑΜ ad ΜΟ ita ΕΗ ſive ΔΝ ad ΝΡ. ſed ΑΜ eſt ad ΜΣ ſicut ΔΗ ad ΝΤ: ex æquo igitur ΜΟ eſt ad ΜΣ ſicut ΡΝ ad ΝΤ. anguli autem ad Ο, Ρ ſunt recti, quare uterque angulus ad Σ, Τ acutus eſt; adeoque angulus ΟΜΣ angulo ΡΝΤ æqualis eſt. ſed angulus ΒΜΟ angulo ΕΗΡ æqualis eſt: angulus itaque ΒΜΣ angulo ΕΗΤ æquatur; ac proinde angulus Γ angulo Ζ æqualis eſt. unde patet triangula eſſe quoad omnia ſimilia.

Abſoluta autem demonſtratione in altero angulorum, ſive obtuſo ſive acuto, in reliquo etiam hoc modo abſolvi poteſt. ponatur enim demonſtratum eſſe modo jam deſcripto, rem ita ſe habere, exiſtentibus angulis obtuſis, ac probandum eſt quod, ſi fuerint anguli ΒΑΓ, ΕΔΖ acuti, triangula quoque ſimilia eſſent. circumſcriptis circulis & productis ΑΗ, ΔΘ ad Κ, Λ, jungantur ΒΚ, ΚΓ; ΕΛ, ΛΖ: æquales igitur ſunt anguli obtuſi ΒΚΓ, ΕΛΖ. cum autem rectangulum ΒΗΓ ſive ΑΗΚ eſt ad quadratum ex ΑΗ, hoc eſt ΚΗ ad ΗΑ, ſicut rectangulum ΕΘΖ ſive ΔΘΛ ad quadratum ex ΔΘ, hoc eſt ut ΛΘ ad ΘΔ;

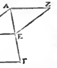


erit igitur quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΗΚ ſicut quadratum ex ΔΘ ad quadratum ex ΘΛ. ſed rectangulum ΒΗΓ eſt ad quadratum ex ΑΗ ſicut rectangulum ΕΘΖ ad quadratum ex ΔΘ: ex æquo igitur rectangulum ſub ΒΗΓ erit ad quadratum ex ΗΚ ſicut rectangulum ΕΘΖ ad quadratum ex ΘΛ. æquales autem ſunt anguli obtuſi ΒΚΓ, ΕΛΖ, ac normales ſunt ΚΗ, ΛΘ; unde per jam dicta ſimile erit triangulum ΒΚΗ triangulo ΕΛΘ, triangulumque ΓΚΗ triangulo ΖΛΘ. Quapropter triangulum ΑΒΗ triangulo ΔΕΘ ſimile eſt, uti triangulum ΑΗΓ triangulo ΔΘΖ: adeoque totum ΑΒΓ toti ΔΕΖ ſimile eſt.

LEMMA VI.

Datis duabus rectis ΑΒ, ΑΓ, ducere rectam ΔΕ poſitione datæ parallelam, quæ magnitudine datæ æqualis ſit.

PUTA factum, & per Α ipſi ΔΕ parallela ducatur ΑΖ; ΑΖ igitur poſitione datæ parallela eſt: datum autem punctum Α, adeoque ΑΖ poſitione datur. per Ε ipſi ΑΒ parallela ducatur ΕΖ: æqualis eſt igitur ΑΖ ipſi ΔΕ. ac data eſt ΔΕ, quare ΑΖ etiam data eſt. ſed & poſitione datur, & datum eſt punctum Α; unde punctum Ζ quoque datur. per datum autem punctum Ζ poſitione datæ ΑΒ parallela ducta eſt recta ΖΕ; datur igitur poſitione ΖΕ. ac datur poſitione recta ΑΓ: datum eſt igitur punctum Ε, ac per ipſum ducta eſt ΔΕ poſitione datæ parallela: datur itaque poſitione recta ΔΕ.

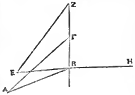


Componetur autem problema hoc modo. ſint rectæ duæ poſitione datæ ΑΒ, ΑΓ, magnitudine autem data ſit recta Η; ac ſit ΑΖ ea cui parallela ducenda eſt. ipſi Η æqualis fiat ΑΖ, & per Ζ ipſi ΑΒ parallela ducatur ΖΕ; per Ε autem ipſi ΑΖ parallela ducatur ΕΔ. dico rectam ΕΔ ſatisfacere problemati. quoniam enim ΔΕ æqualis eſt ipſi ΑΖ, ac ΑΖ rectæ datæ Η facta eſt æqualis; recta igitur ΔΕ ſolvit problema. ac manifeſtum eſt quod ea ſola rem præſtat, ſemper enim puncto Α propior minor eſt remotiore.

LEMMA VII.

Sint duo plana ABΓ, EBZ, ſecundum eandem rectam BΓ ſuper idem planum ſubjectum normaliter erecta. dico rectas AB, BE, BΓ eſſe in eodem plano.

DUCATUR enim è puncto B in ſubjecto plano recta BH ipſi BΓ ad angulos rectos: quæ proinde plano EBZ normalis erit; adeoque & rectæ BE pari argumento ipſi etiam AB normalis eſt. ſed & rectæ BΓ normalis eſt eadem BH: tribus igitur rectis AB, BE, BΓ ad angulos rectos inſiſtit recta BH ad ipſarum concurſum in B: quare [per quintam undecimi El.] rectæ AB, BE, BΓ ſunt in eodem plano. Q. E. D.



ΛΗΜΜΑ ζ΄.

Εϛω δύο ἐπίπεδα τὰ ΑΒΓ, ΕΒΖ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΒΓ ἐφεϛῶτα, τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ ὀρθά. λέγω ὅτι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ ΑΒ, ΒΕ, ΒΓ εὐθεῖαι.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἡ ΗΒ· καὶ τῷ ΕΒΖ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐϛὶν ὀρθὴ ἡ ΗΒ, ὥϛε καὶ τῇ ΒΕ ἐϛὶν ὀρθή. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τῇ ΑΒ. ἔϛι δὲ καὶ τῇ ΒΓ εὐθείᾳ ἡ ΒΗ ὀρθή· ἡ ΒΗ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΑΒ, ΒΕ, ΒΓ ὀρθὴ ἐπὶ τῆς ἁφῆς τῆς Β ἐφέϛηκεν· διὰ ἄρα τὸ ἑνδέκατον πέμπτον ϛοιχείων ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ αἱ ΑΒ, ΒΕ, ΒΓ εὐθεῖαι.

LEMMA VIII.

Sint duo triangula ABΓ, ΔEZ rectos habentia angulos A & Δ, ac ducantur rectæ AH, ΔΘ ſub æqualibus angulis AHB, ΔΘE; ſit autem ut BH ad HΓ ita BΘ ad ΘZ. dico triangulum ABH triangulo ΔEΘ ſimile eſſe, *&* *triangulum* AHΓ *triangulo* ΔΘZ, *totumque toti.*

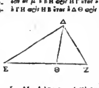
PRODUCATUR AH, ac fiat ut ΔΘ ad ΘE ita ΓH ad HK, ac jungantur BK, KΓ: eſt igitur angulus ΔEΘ angulo ΓKH æqualis. quoniam vero BH eſt ad HΓ ſicut EΘ ad ΘZ, facta autem eſt ΓH ad HK ſicut ΔΘ ad ΘE; erit ex æquo perturbatè ut BH ad HK ita ΔΘ ad ΘZ; & ſunt circa angulos æquales: angulus igitur BKH angulo ad Z æqualis eſt. demonſtratum autem eſt angulum ΓKH angulo ad E æqualem eſſe, ac anguli duo ad Z & E æquales ſunt recto adeoque angulus BKΓ rectus eſt. ſed ex hypotheſi angulus BAΓ rectus eſt: unde puncta A, B, Γ, K ſunt in circulo; ac proinde angulus AKΓ, hoc eſt ΔEZ, angulo ABΓ æqualis eſt. ex hypotheſi autem angulus AHB angulo ΔΘE æqualis eſt: ſimile igitur eſt triangulum ABH triangulo ΔEΘ, pariterque triangulum AHΓ triangulo ΔΘZ ſimile eſt, *totumque toti.*



ΛΗΜΜΑ η΄.

Εϛω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ὀρθὰς ἔχοντα τὰς Α, Δ γωνίας, καὶ διήχθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ ἐν ἴσαις γωνίαις ταῖς ὑπὸ ΑΗΒ, ΔΘΕ· ἔϛω δὲ ὡς ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΖ. λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐϛι τὸ μὲν ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ, [τὸ δὲ ΑΗΓ τῷ ΔΘΖ, καὶ ὅλον ὅλῳ.]

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΗ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΔΘ πρὸς ΘΕ οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ, ΚΓ· ἴση ἄρα ἐϛὶν ἡ ὑπὸ ΔΕΘ τῇ ὑπὸ ΓΚΗ γωνίᾳ. ἐπεὶ δὲ ἐϛὶν ὡς μὲν ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΖ, ὡς δὲ ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΕ· δι' ἴσου ἄρα ἐϛὶν ἐν τῇ τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ ὡς ἡ ΒΗ πρὸς ΗΚ οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς ΘΖ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας· ἴση ἄρα ἐϛὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΒΚΗ γωνία τῇ Ζ γωνίᾳ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΗ γωνία ἴση τῇ Ε, καί εἰσιν αἱ Ε, Ζ ὀρθῇ ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΚΓ γωνία ἐϛὶν ὀρθή. ἀλλὰ καὶ ὑπόκειται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὀρθή· ἐν κύκλῳ ἄρα ἐϛὶ τὰ Α, Β, Γ, Κ σημεῖα· ἴση ἄρα ἐϛὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΓ, τουτέϛιν ἡ ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ γωνία καθ' ὑπόθεσιν ἴση ἐϛὶ τῇ ὑπὸ ΔΘΕ γωνίᾳ· ὅμοιον ἄρα ἐϛὶν τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ, κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ ἐϛὶν ὅμοιον, [καὶ ὅλον ὅλῳ.]



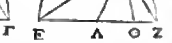
Aliter & melius.

BISECENTUR in punctis K, Λ rectæ BΓ, EZ, ac jungantur AK, ΔΛ. jam quoniam BH eſt ad HΓ ſicut BΘ ad ΘZ, componendo ac dimidiando antecedentes, deinde per converſionem rationis, fiet ΓK ſive AK ad KH ſicut ΛZ ſive ΔΛ ad ΛΘ. anguli autem ad puncta H, Θ ſunt æquales, & uterque angulus KAH, ΛΔΘ acutus eſt: angulus igitur AKH angulo ΔΛΘ eſt æqualis; eorundemque ſemiſſes, nempe anguli ad B & E, ſunt æquales. ſed angulus ad H angulo ad Θ æqualis eſt: ſimile eſt igitur triangulum ABH triangulo ΔEΘ. pari argumento triangulum AHΓ triangulo ΔΘZ ſimile eſt, ac totum toti. Q. E. D.



Ἄλλως καὶ ἄμεινον.

Τετμήσθωσαν δίχα τοῖς Κ, Λ σημείοις αἱ ΒΓ, ΒΖ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΔΛ. ἐπεὶ οὖν ἐϛὶν ὡς ἡ ΒΗ πρὸς ΗΓ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΖ, συνθέντι, καὶ τὰ ἡμίση τῶν ἡγουμένων, καὶ ἀναϛρέψαντι γίνεται ὡς ἡ ΓΚ τουτέϛιν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΗ οὕτως ἡ ΛΖ, τουτέϛιν ἡ ΔΛ πρὸς ΛΘ. καί εἰσιν ἴσαι μὲν αἱ πρὸς τοῖς Η, Θ σημείοις γωνίαι, αἱ δὲ ὑπὸ ΚΑΗ, ΛΔΘ ἑκατέρα ἅμα ὀξεῖα· ἴση ἄρα ἐϛὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΚΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΛΘ γωνίᾳ, καὶ τὰ ἡμίση· καὶ ἡ Β ἄρα γωνία ἴση ἐϛὶ τῇ Ε. ἀλλὰ καὶ ἡ Η γωνία τῇ Θ ἴση ἐϛίν· ὅμοιον ἄρα ἐϛὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΘ τριγώνῳ. κατὰ τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ΑΗΓ τρίγωνον τῷ ΔΘΖ τριγώνῳ ἐϛὶν ὅμοιον, καὶ ὅλον ὅλῳ.



APOL-

APOLLONII PERGÆI CONICORUM

LIBER SEXTUS.

Apollonius Attalo S. P.

MITTO tibi Sextum Conicorum librum: qui complectitur Propoſitiones de Sectionibus Conicis & Sectionum Segmentis æqualibus & inæqualibus, ſimilibus & diſſimilibus; ut & alia nonnulla prætermiſſa ab iis qui nos præceſſerunt. Nam ſpecialiter in hoc libro invenies quomodo Sectio Sectioni datæ æqualis in dato Cono recto ſit ſecanda: & quomodo deſignandus ſit Conus rectus Cono dato ſimilis qui contineat datam Sectionem Conicam. Quæ quidem uberius aliquanto ac dilucidius tractavimus quam qui ante nos his de rebus ſcripſerunt. Vale.

DEFINITIONES.

I. Sectiones Conicæ dicantur *æquales*, ſi applicari poſſit altera ſuper alteram; ita ut ubique conveniant, nec occurrant inter ſe. *Inæquales* autem ſunto quæ non ita ſe habent.

II. *Similes* vero dicantur Sectiones, in quibus, ductis ad utrinſque Axem ordinatim applicatis, ipſæ ordinatim applicatæ ad portiones Axis ab iiſdem abſciſſas Verticique conterminas fuerint reſpectivè proportionales: diviſo ſcilicet utroque Axe in partes numero æquales, vel eandem inter ſe rationem ſervantes. *Diſſimiles* vero ſint Sectiones, quibus modo dicta non competunt.

III. Recta ſubtendens ſegmentum aliquod circumferentiæ Circuli vel Sectionis Conicæ, *Baſis* Segmenti vocetur.

IV. Recta autem quæ occurrens rectis Baſi ſegmenti parallelis eas omnes bifariam dividit, dicatur ſegmenti *Diameter*.

V. Dicatur etiam punctum in Sectione per quod ducitur Diameter, ſegmenti *Vertex*.

VI. Segmenta vocentur *æqualia*, ſi, Baſibus æqualibus exiſtentibus, fieri poſſit ut unum ſuper alterum ita applicetur ut nuſquam occurrant inter ſe, ſed utrobique congruant. *Inæqualia* vero ſint, quæ aliter ſe habent. R VII. Seg-

VII. Segmenta vero *ſimilia* dicantur, quorum baſes cum diametris æquales continent angulos, & in quorum ſingulis, ductis rectis Baſi parallelis numeroque æqualibus, ipſæ parallelæ, ut & Baſes ad abſciſſas diametrorum portiones verticibus conterminas, ſunt in iiſdem rationibus reſpectivè. Diviſâ ſcilicet ab ipſis parallelis utriuſque diametro in partes invicem proportionales.

VIII. Dicatur *Sectio Conica in Cono poni*, vel *Conus à Sectione Conicâ contineri*, ſi vel tota ſectio comprehenſa fuerit in ſuperficie Conicâ inter Verticem & Baſim Coni interceptâ: Vel ſi, eâdem ſuperficie infra Baſim Coni productâ, tota Sectio fuerit in ea ſuperficiei parte quæ eſt infra Baſim: Vel etiam ſi fuerit partim in hac partim in altera ſuperficie.

IX. Coni vero recti dicantur *ſimiles*, ſi eorundem Axes ad diametros Baſium ſint in eadem ratione.

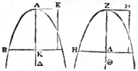
X. Dicatur etiam *Figura Sectionis ſuper Axem vel diametrum aliquam facta*, rectangulum contentum ſub Axe vel diametro illâ & Latere ejuſdem recto.

PROPOSITIO I.

SI in duabus Parabolis latera recta fuerint æqualia, erunt ipſæ Sectiones æquales. Ac ſi fuerint Sectiones æquales, erunt quoque earundem latera recta æqualia.

Sint duæ Parabolæ quarum Axes ΑΔ, ΖΘ: ſintque earundem latera recta ΑΕ, ΖΜ æqualia. Dico ipſas ſectiones eſſe æquales.

Nam ſi applicetur Axis ΑΔ ſuper Axem ΖΘ, ſectio coincidet cum ſectione & cum eadem ubique congruet. Si enim fieri poſſit ut non congruant, ſit pars aliqua ſectionis ΑΒ quæ non congruat cum ΖΗ, & capiatur punctum quoddam Β, in parte cum ipsâ ΖΗ non congruente, à quo demittatur normalis ad Axem ΒΚ, ac compleatur parallelogrammum rectangulum ΚΕ: &, factâ ΖΛ ipſi ΑΚ æquali, erigatur normalis ad Axem recta ΗΛ, ac compleatur parallelogrammum rectangulum ΛΜ. Quoniam vero latera ΚΑ, ΑΕ æqualia ſunt lateribus ΛΖ, ΖΜ, utraque inter ſe congruent, ac proinde rectangulum ΚΕ æquale erit rectangulo ΛΜ. Sed



recta ΚΒ poteſt rectangulum ΚΕ (per 11^mam primi) ac (per eandem) ΛΗ poterit rectangulum ΛΜ; adeoque ipſæ ΚΒ, ΛΗ ſunt æquales. Poſito igitur Axe ſuper Axem, ita ut coincidat recta ΑΚ cum ΛΖ, recta ΒΚ cadet ſuper ΛΗ, punctumque Β ſuper punctum Η. Poſuimus autem non debere coincidere punctum Β cum ſectione ΖΗ: quod abſurdum. Unde patet fieri non poſſe ut ſectio ſectioni non ſit æqualis.

Porro ſi ſectio fuerit æqualis ſectioni, capiatur ΑΚ ipſi ΖΛ æqualis, & è punctis Κ, Λ erigantur normales ΒΚ, ΗΛ; ac compleantur rectangula parallelogramma ΚΕ, ΛΜ. Congruente autem ſectione ΑΒ cum ſectione ΖΗ, Axis quoque ΑΚ cum Axe ΖΛ congruet; aliter enim Parabola ΖΗ duos haberet Axes, quod fieri non poteſt: coincidet igitur punctum Κ cum puncto Λ, ob ΑΚ, ΖΛ æquales. Cadente autem puncto Β ſuper Η, erit recta ΒΚ ipſi ΛΗ æqualis; ac proinde (per 11^mam primi) rectangula ΚΕ, ΛΜ æqualia erunt. Sed ΑΚ ipſi ΖΛ facta eſt æqualis. Latus igitur rectum ΑΕ Lateri recto ΖΜ æquale eſt. Q. E. D.

PROPO-

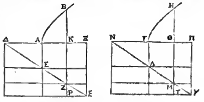
Digitized by Google

PROPOSITIO II.

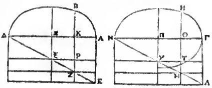
SI Figuræ factæ ſuper Axes tranſverſos Hyperbolarum vel Ellipſium fuerint æquales ac ſimiles inter ſe, erunt ipſæ Sectiones æquales. Ac ſi fuerint Sectiones æquales, erunt quoque Figuræ, factæ ſuper Axes earundem tranſverſos, æquales ac ſimiles ſimiliterque ſitæ.

Sint ΑΒ, ΓΗ duæ Hyperbolæ vel Ellipſes, quarum Axes ΑΚ, ΓΘ; ſintque figuræ ſuper Axes tranſverſos factæ æquales ac ſimiles, nt ΔΕ, ΝΛ. Dico ſectinnes ΑΒ, ΓΗ æquales eſſe.

Applicetur Axis ΑΚ ſnper Axem ΓΘ, ac coincidet ſectio cum ſectione. Nam ſi aliter fuerit, ſit pars aliqna ſectionis ΑΒ extra ſectionem ΓΗ; & in hac parte capiatur punctum aliquod Β, à quo demittatur ad Axem normalis ΒΚ, ac compleatur rectangulum ΔΖ. Capiatur etiam in Axe ΓΘ recta ΓΘ ipſi ΑΚ æqualis, ac erectâ normali ſuper Axem ΓΘ ad punctum Θ, ut ΗΘΜ, compleatur rectangulnm ΝΜ. Quoniam vero rectæ ΑΕ, ΑΚ æquales ſnnt ipſis ΑΓ, ΓΘ; rectangula ΒΚ, ΑΘ erunt æqualia. Rectangula antem ΑΜ, ΕΖ ſimilia ſunt ſimiliterque ſita, quia ſimilia ſunt rectangulis ſimilibus ΔΕ, ΝΛ. Sed rectæ ΑΚ, ΓΘ æqusles ſunt, adeoque rectangula ΕΖ, ΑΜ ſunt etiam æqualia. Verum rectangula ΚΕ, ΘΑ æqualia ſunt, ac proinde rectangulum ΑΖ rectangulo ΓΜ æquale erit. Poſſunt antem hæc rectangula (per 11um & 13um primi) ordinatim applicatæ ΒΚ, ΗΘ: applicato igitur Axe ſuper Axem, cadet recta ΒΚ ſuper ΘΗ, ac punctum Β ſuper punctum Η. Abſurde igitur poſuimus punctum Β cadere extra ſectionem ΓΗ: ac propterea tota ſectio ΑΒ coincidet cum ſectione ΓΗ.



Quinetiam ſi fuerint ſectinnes æquales; fiant ΑΚ, ΓΘ æquales, ac erigantur normales ΚΒ, ΘΗ, compleanturqne parallelogramma rectangula ΔΕ, ΔΖ; ΝΛ, ΝΜ, & applicetur ſectio ΑΒ ſnper ſectionem ΓΗ: cadet igitur Axis ΑΚ ſnper Axem ΓΘ neceſſario. Nam ſi nnn cadat ſnper eum, in Hyperbola fnrent duo Axes, & in Ellipſi tres: quod qnidem impoſſibile eſt. Cadente autem ΑΚ ſuper ΓΘ quæ eidem æqualis eſt, cadet punctum Κ ſnper Θ: coincidentibuſque rectis ΚΒ, ΘΗ ponctum Β cadet ſuper Η; ac proinde ΚΒ, ΘΗ æquales ſunt. Hinc conſequitur (per 12um & 13um primi) rectangula ΑΖ, ΓΜ æqualia eſſe. Sed ΑΚ ipſi ΓΘ æqnalis eſt, adeoque ΚΖ ipſi ΘΜ. Simili modn, ſi ponatur ΑΞ ipſi ΓΠ æqualis, demnnſtrabitur Ξξ ipſi Πγ æqualem eſſe; quare & ΡΖ ipſi ΜΤ & Ρξ ipſi Τγ æquales erunt: unde & rectangula Ζξ, Μγ æqualia & ſimilia, ac (*per* 24um VI. *Elem.*) rectangula ΔΖ, ΝΜ erunt quoque ſimilia. Sed ΚΖ, ΘΜ ſunt æquales; quare etiam ΔΚ, ΘΝ ſunt æquales: & ob æquales ΑΚ, ΓΘ, ipſæ quoque ΑΔ, ΓΝ erunt æquales. Rectangula autem ΔΕ, ΝΛ ſimilia ſunt, adeoque rectæ ΑΕ, ΓΛ æquales. Quapropter rectangula ΔΕ, ΝΛ ſimilia & æqualia ſunt; quæ quidem ſnnt Figuræ æqualium ſectionum ſuper Axes factæ. Q. E. D.



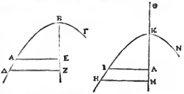
Similiter ſi ſectiones fuerint Parabolæ, & occurrant ordinatim applicatæ diametris quibuſcunque in utrâque ſectione ſub æqualibus angulis; ac ſint harum diametrorum Latera recta æqualia; erunt quoque Sectiones æquales.

Ac ſi fuerint ſectiones Hyperbolæ vel Ellipſes, & ordinatim applicatæ occurrant diametris ſub angulis æqualibus; fuerintque Figuræ factæ ſuper has diametros æquales & ſimiles inter ſe; erunt etiam ſectiones æquales. Hoc antem eodem modo conſtabit, quo rem ita ſe habere quoad Axes jam demonſtratum eſt.

PROPOSITIO III.

Manifeſtum eſt Ellipſin non poſſe æqualem eſſe duabus reliquis ſectionibus, quia terminata eſt; hæ vero in infinitum prodeunt. Dico quoque nullam Parabolam æqualem eſſe Hyperbolæ.

Sit ABΓ Parabola, Hyperbola vero HIKN; ac ſi fieri poſſit, ſint inter ſe æquales. Sint antem ſectionum Axes BZ, KM, ac KΘ diameter tranſverſa Hyperbolæ: &, factis AE, BZ ipſis KΛ, KM æqualibus, ducantur ad Axes normales AE, ΔZ; IΛ, HM.

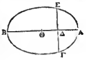


Jam ſi fuerint æquales, ſectio applicari poteſt ſuper ſectionem; & cadent puncta E, Z, A, Δ ſuper puncta Λ, M, I, H. Verum ZB eſt ad BE (per 20um primi) ut quadratum ex ΔZ ad quadratum ex EA: erit igitur MK ad KΛ ut quadratum ex MH, ad quadratum ex ΛI. Hoc antem fieri neqnit, qnia quadratum ex MH eſt ad quadratum ex IΛ ſicut rectangulum ſub ΘM, MK ad rectangulum ſub ΘΛ, ΛK, per 21um primi. Parabola igitur Hyperbolæ non eſt æqualis.

PROPOSITIO IV.

Si in Ellipſi de centro ducatur recta quælibet utrinque ad Sectionem terminata: dividet hæc ſectionem in duas partes æquales; itemque Area ejus diviſa erit biſariam.

Sit ABΓ Ellipſis, cujus centrum Θ; & per centrum ducatur recta Aa, quæ primò ſit alter Axium ſectionis. Dico applicari poſſe Curvam AΓB ſuper Curvam AEB, ita ut tota Area AΓa ſuper totam Aream AEB ſuperpoſita ubique coincidat cum eadem.

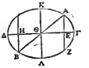


Nam, ſi fieri poſſit ut non coincidat Curva AΓB cum Curva AEB, capiatur in parte non coincidente punctum Γ; &, demiſſa ad Axem AB, normalis ΓΔ producatur ad E. Recta igitur ΓΔ cadet ſuper rectam ΔE, ob angulos ad punctum Δ rectos: ΓΔ autem ipſi ΔE æqualis eſt, atque adeo pnnctum Γ cadet ſuper punctum E. Abſurda eſt igitur poſitio punctum illud non cadere in ſectione AEB. Curva igitur AΓB cadet ſuper Curvam AEB, ubique coincidens cum eâ, uti ſuperficies AΓB coincidet cum ſuperficie AEB. Quocirca Curva æqnalis eſt Curvæ, & Area Areæ. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

Si vero AB non fuerit alter Axium, ſint Axes ΓΔ, KΛ; & demittantur normales AE, BH: & applicatâ Curvâ ΓΛΔ ſuper Curvam ΓZΔ, eo quo factum eſt modo in Propoſitione præcedente, cadet punctum Z ſuper punctum Λ, ac Area ΛΓE ſuper Aream ΓZE. Similiter KΓΛ cadet ſuper KΔΛ, & EΘ ſuper ΘH; ut & EZ ſuper BH, ob EΘ ipſi ΘH & EZ ipſi BH æquales. Cadet igitur Area ΓEZ ſuper

per Aream ΔΗΒ, ac proinde Area ΑΓΕ coincidet cum Area ΒΔΗ, eidemque æqualis eſt, ut & Curva ΑΓ Curvæ ΔΒ æqualis. Triangulum autem ΑΕΘ æquale eſt triangulo ΒΗΘ: Area igitur ΑΓΘ Areæ ΑΔΘ æqualis eſt, *ac area reſidua* ΑΘΚ *reſiduæ* ΑΘΛ, ut & Curva ΑΚ Curvæ ΒΛ æqualis. Quapropter Curva ΑΚΔ Curvæ ΓΛΒ æqualis eſt, totaque Area ΑΚΔΒ toti ΑΓΛΒ, totaque Curva ΑΚΔΒ Curvæ ΔΓΛΒ etiam æqualis. Q. E. D.

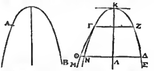


PROPOSITIO VI.

SI portio aliqua Sectionis Conicæ, applicata ſuper portionem aliquam alterius cujuſdam Sectionis, coincidat cum eâdem: erit tota Sectio toti Sectioni æqualis.

Sit ΑΒ ſegmentum ſectionis alicujus ΗΑΒ, quod applicatum congruit cum ΓΔ ſegmento ſectionis ΓΔΕ. Dico ſectionem ΗΑΒ æqualem eſſe ſectioni ΓΔΕ.

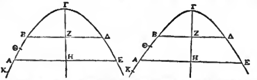
Nam, ſi fieri poſſit, congruat pars ΑΒ cum parte ΓΔ; non autem congruat ſectionis pars reliqua ΑΗ cum ΓΝ reliqua parte ſectionis alterius: ſint autem ad modum ſectionum ΔΓΜ, ΔΓΝ. Capiatur in ΓΜ punctum aliquod Θ, junctâque ΔΘ ducatur in ſectione ΓΔΕ diameter ΚΛ bifariam dividens ipſam ΔΘ: erit igitur recta, quæ ſectionem ΓΔΕ tangit in puncto Κ, ipſi ΔΘ parallela. Diameter autem ΚΛ omnes rectas ipſi ΔΘ parallelas bifariam dividit; quare, ductâ ΓΖ ipſi ΔΘ parallelâ, ΚΛ eam bifariam dividet; adeoque ΓΖ parallela eſt rectæ ſectionem ΔΓΜ tangenti in puncto Κ. Sed & eadem recta Tangens eſt ſectionis ΔΓΝ; ac proinde (per 7^{am} ſecundi) recta ΚΛ diameter eſt ſectionis ΔΓΝ, dividetque ipſam ΔΝ bifariam in puncto Λ. Eadem autem dividit rectam ΔΘ bifariam in puncto Λ: quod abſurdum eſt. Tota igitur ſectio ΒΑΗ ſuper totam ΔΓΝ applicata ubique congruit, eidemque æqualis eſt. Q. E. D.



PROPOSITIO VII.

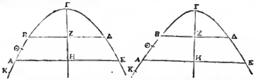
IN Parabolâ vel Hyperbolâ, ſi ductæ ad Axem ordinatim applicatæ ad alteram Sectionis partem producantur: abſcindentur è Sectione ab utroque Axis latere ſegmenta, quæ applicatæ congruent inter ſe; ſed quæ neutiquam coincident cum aliâ quâvis Sectionis parte, ſi eidem imponantur.

Sit ΑΒΓ Parabola vel Hyperbola, cujus Axis ΓΗ; & capiatur ſegmentum aliquod ſectionis ΒΑ; & demittantur ad Axem ΓΗ ordinatim applicatæ, quæ ad alterum ſectionis latus productæ, ut ΒΖΔ, ΑΗΕ, abſcindant è ſectione ſegmenta ΒΓΔ, ΑΓΕ. Dico Curvam ΒΓ congruere cum Curva ΓΔ, & Curvam ΒΑ cum Curva ΔΕ, itemque Aream ΑΓΗ cum Area ΗΓΕ, ſegmentumque ΑΒΓ cum ſegmento ΕΔΓ.



Hoc autem conſtabit ad modum præcedentium; quia omnes ordinatim applicatæ, à ſegmento ΔΒΓ ad Axem ΓΗ ductæ, poterunt rectangula æqualia rectangulis quæ

poſſunt ordinatim applicatæ à ſegmento ΓΔΕ ad eandem ΓΗ ductæ; adeoque, continuatis ipſis ordinatim applicatis, erit ΒΖ ipſi ΖΔ & ΑΗ ipſi ΕΗ æquales. Anguli autem ad puncta Ζ, Η recti ſunt: ſegmentum igitur ΓΒ applicatum ſuper ſegmentum ΓΔ coincidet cum eo; coincidet etiam ſegmentum ΑΒ cum ſegmento ΔΕ, areæque areis congruent.

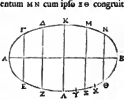


Sit jam ΘΚ ſegmentum aliquod aliud his duabus normalibus non interceptum. Dico, quod ſi ſegmentum ΔΕ ſuper illud applicetur, non coincidet cum eo. Nam ſi non ita ſit, ac fieri poſſit ut congruant inter ſe, ſuperimponatur ΔΕ coincidatque cum ΚΘ; coincidet igitur (per Prop. proximè præcedentem) Curva ΓΔ cum eâ ſectionis parte quæ cum ΚΘ continuatur. Cadet vero punctum Γ in ſegmento ΓΔΕ in diverſo ſitu ac in ſegmento ΚΘΓ; quia ſegmentum ΚΘΓ non eſt æqualis ſegmento ΓΔΕ: ac proinde Axis ΗΓ diverſas haberet poſitiones, ac Parabola vel Hyperbola plures haberet Axes; quod (per 48^vam ſecundi) abſurdum eſt. Quapropter ſegmentum ΔΕ cum ſegmento ΘΚ congruere non poteſt. Q. E. D.

PROPOSITIO VIII.

SI in Ellipſi demiſſæ ad Axem normales producantur ad alterum Sectionis latus: ſegmenta ab utrâque Axis parte abſciſſa, unum ſuper alterum applicata, congruent inter ſe. Si vero imponantur ſuper ſegmenta à normalibus ad eaſdem à centro diſtantias, ſed ab alterâ ejus parte abſciſſa: coincident etiam cum iiſdem, congruent autem cum nullo alio Sectionis ſegmento.

Sit ΑΒΓΔ Ellipſis, cujus Axes ΑΒ, ΚΛ, & ad ΑΒ demittantur normales duæ quæ occurrant utrinque ſectioni ut ΓΕ, ΔΖ: ducantur etiam in ſectione aliæ duæ normales ad eaſdem à centro diſtantias ac priores, ut ΜΞ, ΝΘ. Jam ſi ſegmentum ΓΔ ipſi ΕΖ ſuperimponatur, congruent inter ſe, juxta demonſtrata in Prop. proxime præcedente. Eodemque modo conſtabit ſegmentum ΜΝ cum ipſo ΞΘ congruiturum. Area autem ΚΑΛ ſuper aream ΚΒΛ applicata (per quartam hujus) coincidet; ac recta ΓΕ cadet ſuper ipſam ΝΘ, quia eadem eſt utriuſque à centro diſtantia; cadet etiam ΔΖ ſuper ΜΞ, adeoque cadet ſegmentum ΓΔ ſuper ſegmentum ΜΝ; ac proinde congruet ΓΔ cum ſegmento ΞΘ, quia ΜΝ, ΞΘ congruunt inter ſe. Idem quoque manifeſtum eſt de ſegmento ΕΖ.



Si vero capiatur in ſectione ſegmentum aliquod aliud præter hæc quatuor, ut ΥΧ. Dico illud congruere non poſſe cum prædictis ſegmentis. Nam ſi fieri poſſit, coincidat cum ſegmento ΜΝ; ac, per demonſtrata in præcedentibus, invenietur Ellipſis plures quam duos habitura Axes. Hoc autem (per 48^vam ſecundi) abſurdum eſt. Quocirca ſegmentum ΜΝ non congruet cum ſegmento ΥΧ. Q. E. D.

PROPO-

PROPOSITIO IX.

IN Sectionibus æqualibus, ſegmenta, quæ æqualiter à Verticibus earundem diſtant, ſuperpoſita coincident inter ſe: quæ vero non diſtant æqualiter à Verticibus, non congruent inter ſe.

Sectionum duarum æqualium ſint Axes ΓΔ, KA, ac ſit diſtantia ſegmenti AB à puncto Γ æqualis diſtantiæ ſegmenti EH à puncto K. Dico AB congruere cum EH.

Imponatur enim ſectio ΓA ſuper ſectionem KE, ac punctum B cadet ſuper punctum H, quia diſtantiæ earundem à Vertice utriuſque ſectionis æquales ſunt: cadet etiam punctum A ſuper punctum E, adeoque & ſegmentum AB ſuper ſegmentum EH. Dico quoque, ſi ſuperimponatur ſuper aliud quodvis ſegmentum,



non congruet cum illo: Nam, ſi fieri poteſt, cadat ſuper ſegmentum ZΘ. Demonſtravimus autem AB congruere cum ſegmento EH, ac proinde congruet ZΘ cum ipſo EH. Segmenta vero ZΘ, EH non ſunt abſciſſa à duabus normalibus, neque ad eaſdem à centro diſtantias. Abſurdum eſt igitur ea congruere poſſe, per demonſtrata in duabus Propoſitionibus præcedentibus. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

SI Sectiones fuerint inæquales, fieri non poteſt ut pars aliqua unius congruat cum ulla parte alterius.

Sint ABΓ, ΔEZ ſectiones duæ inæquales. Dico nullam partem unius coincidere poſſe cum parte aliquâ alterius.

Nam, ſi fieri poſſit, congruat pars AB cum parte ΔE; ac tota ſectio ABΓ (per ſextam hujus) congruere deberet cum ipſâ ΔEZ: atque adeo ſectio ABΓ æqualis eſſet ſectioni ΔEZ. Hoc autem eſt contra hypotheſim. Quapropter non coincidet pars ulla ſectionis ABΓ cum parte aliquâ ipſius ΔEZ. Q. E. D.

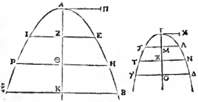


PROPOSITIO XI.

PArabolæ omnes ſimiles ſunt inter ſe.

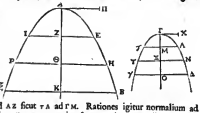
Sint AB, ΓΔ duæ Parabolæ, quarum Axes AK, ΓO. Dico ſectiones inter ſe ſimiles eſſe.

Sint earundem latera recta AΠ, ΓX, ac fiat AK ad ad AΠ ſicut ΓO ad ΓX; ac dividatur AK in punctis Z, Θ utcunque, & in iiſdem rationibus dividatur etiam ΓO in punctis M, Ξ; & ad Axes AK, ΓO erigantur normales ZE, ΘH, KB; MΛ, NΞ, ΔO.



Quoniam

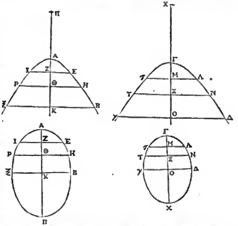
Quoniam vero ΠΑ eſt ad ΑΚ ſicut ΓΧ ad ΓΟ; & ΚΑ media eſt proportionalis inter ipſas ΠΑ, ΑΚ, (per 11^{mam} primi) uti ΔΟ media eſt inter ΓΧ, ΓΟ: erit igitur ΚΒ ad ΚΑ ſicut ΔΟ ad ΟΓ; cumque Βξ dupla eſt ipſius ΒΚ, uti Δγ dupla ipſius ΔΟ; erit Βξ ad ΑΚ ſicut Δγ ad ΓΟ. Pariter cum ΠΑ eſt ad ΑΚ ſicut ΓΧ ad ΓΟ, ac ΑΚ eſt ad ΑΘ ſicut ΓΟ ad ΓΞ: erit ex æquo ΠΑ ad ΑΘ ſicut ΓΧ ad ΓΞ. Patebit igitur modo nuper oſtenſo, ΡΗ eſſe ad ΑΘ ſicut ΝΤ ad ΓΞ; ac ſimili argumento ΕΙ erit ad ΑΖ ſicut τΛ ad ΓΜ. Rationes igitur normalium ad Axem, Βξ, ΗΡ, ΕΙ, ad *abſciſſas* ΑΚ, ΑΘ, ΑΖ, *eadem ſunt ac rationes normalium* Δγ, ΝΤ, Λτ *ad abſciſſas* ΓΟ, ΞΓ, ΓΜ reſpectivè. Segmenta autem ex uno Axium abſciſſa proportionalia ſunt ſegmentis alterius Axis. Quocirca (*per Definitionem ſecundam*) ſectio ΑΒ ſimilis eſt ſectioni ΓΔ. Q. E. D.



PROPOSITIO XII.

SI Hyperbolarum vel Ellipſium figuræ ſuper Axes factæ fuerint ſimiles; ipſæ etiam Sectiones ſimiles erunt. Ac ſi ſectiones fuerint ſimiles; figuræ ſuper Axes factæ erunt quoque ſimiles.

Sint ΑΒ, ΓΔ duæ Hyperbolæ vel Ellipſes, quarum figuræ ſuper Axes factæ ſunt ſimiles. Sint autem earum Axes ΑΚ, ΓΟ, diametri vero tranſverſæ ΑΠ, ΓΧ; & capiantur Axium ſegmenta ΑΚ, ΓΟ, ita ut ΑΚ ſit ad ΑΠ ſicut ΓΟ ad ΓΧ. Dividatur ΑΚ utcunq; in punctis Ζ, Θ; & in iiſdem rationibus quoq; recta ΓΟ in punctis Μ, Ξ: ac per puncta Ζ, Θ, Κ; Μ, Ξ, Ο erigantur ſuper Axes normales ΒΚ, ΘΗ, ΖΕ; ΟΔ, ΞΝ, ΜΛ.



Quoniam autem figuræ ſectionum ſunt ſimiles, erit (per 21^{am} primi) quadratum ex ΒΚ ad rectangulum ſub ΠΚΑ ſicut quadratum ex ΔΟ ad rectangulum ſub ΧΟΓ. Rectangulum vero ſub ΠΚΑ eſt ad quadratum ex ΚΑ, ſicut rectangulum ſub ΧΟΓ ad quadratum ex ΟΓ, quia ΠΚ eſt ad ΚΑ ſicut ΧΟ ad ΟΓ. Erit igitur ΒΚ ad ΚΑ ſicut ΔΟ ad ΟΓ, & Βξ erit ad ΚΑ ſicut Δγ ad ΓΟ. Jam ΚΑ eſt ad ΑΘ ſicut ΟΓ ad ΓΞ, *ac* ΠΑ *eſt ad* ΑΚ *ſicut* ΧΓ *ad* ΓΟ: quare *ex æquo* ΠΑ eſt ad ΑΘ ſicut ΧΓ ad ΓΞ. Conſtabit igitur per jam demonſtrata ΗΡ eſſe ΑΘ ſicut ΝΤ ad ΓΞ: ac pari argumento

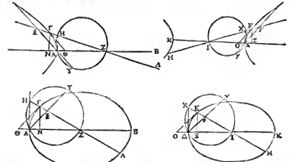
argumento ΕΙ eſſe ad ΑΖ ſicut ΤΛ ad ΓΜ. Normales itaque Βξ, ΗΡ, ΕΙ ſunt ad ſegmenta Axis ΑΚ, ΑΘ, ΑΖ in iiſdem rationibus ac normales Δγ, ΝΤ, ΤΛ ad ſegmenta Axis ΟΓ, ΓΞ, ΓΜ *reſpectivè*: atque ſegmenta ipſius ΑΚ Axis ſectionis ΑΒ à normalibus abſciſſa, ad ſegmenta ipſius ΓΟ Axis ſectionis ΓΔ à normalibus abſciſſa, ſunt in eadem ratione. Quare (*per Definit.* 2[dam]) ſectio ΑΒ ſimilis eſt ſectioni ΓΔ.

Quod ſi ſectio ΑΒ ſimilis fuerit ſectioni ΓΔ: Dico *Figuras* utriuſque ſectionis eſſe ſimiles inter ſe. Demittantur enim à ſectione ΑΒ normales quotlibet ad Axem ΑΚ, ut Βξ, ΗΡ, ΕΙ: & à ſectione ΓΔ normales Δγ, ΝΤ, ΑΤ; ita ut normales ad abſciſſas in utroque Axe ſint *reſpectivè* in iiſdem rationibus, uti & abſciſſæ in uno Axium ad abſciſſas in altero ſint in eadem ratione; nempe ſit ΒΚ ad ΑΚ ſicut ΔΟ ad ΟΓ, ac ΚΑ ad ΑΘ ſicut ΟΓ ad ΓΞ, ac ΑΘ ad ΘΗ ſicut ΓΞ ad ΞΝ. Erit igitur ΒΚ ad ΘΗ ſicut ΔΟ ad ΝΞ, adeoque quadratum ex ΒΚ ad quadratum ex ΘΗ erit ut quadratum ex ΔΟ ad quadratum ex ΝΞ; unde (per 21[am] primi) rectangulum ΠΚΑ erit ad rectangulum ΠΘΑ ſicut rectangulum ΧΟΓ ad rectangulum ΧΞΓ. Sed ΚΑ eſt ad ΑΘ ſicut ΟΓ ad ΓΞ: erit igitur ΚΠ ad ΠΘ ſicut ΟΧ ad ΧΞ; atque adeo ΠΘ erit ad ΘΚ ſicut ΧΞ ad ΞΟ. *Sed* ΘΚ *eſt ad* ΞΟ *ſicut* ΑΘ *ad* ΓΞ; igitur ΠΘ eſt ad ΘΑ ſicut ΧΞ ad ΞΓ, ac rectangulum ΠΘΑ eſt ad quadratum ex ΘΑ, ſicut rectangulum ΧΞΓ ad quadratum ex ΞΓ. *Quoniam vero* ΑΘ *eſt ad* ΘΗ *ſicut* ΓΞ *ad* ΞΝ, erit rectangulum ΠΘΑ ad quadratum ex ΘΗ ſicut rectangulum ΧΞΓ ad quadratum ex ΞΝ. Sed rectangulum ΠΘΑ eſt ad quadratum ex ΘΗ (per 21[am] primi) ſicut diameter ΑΠ ad Latus ejus rectum, & rectangulum ΧΞΓ eſt ad quadratum ex ΞΝ ſicut diameter ΧΓ ad Latus ejus rectum. Figuræ igitur utriuſque ſectionis ſuper ΠΑ, ΓΧ factæ ſunt ſimiles.

PROPOSITIO XIII.

SI fuerint Hyperbolarum vel Ellipſium figuræ, ſuper alios diametros præter Axes factæ, ſimiles inter ſe; ac ordinatim applicatæ ad has diametros contineant cum ipſis angulos æquales: erunt hæ ſectiones inter ſe ſimiles.

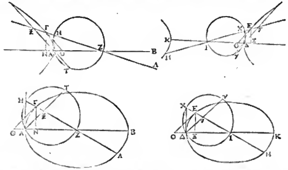
Sint Hyperbolarum vel Ellipſium duarum centra Ζ, Ι, diametri vero quævis ΓΛ, ΕΜ; ſintque anguli quos continent diametri hæ cum ordinatim applicatis ſuis inter ſe æquales; Figuræ autem quæ fiunt ſuper diametros ΓΛ, ΕΜ ſint ſimiles. Dico ſectiones illas ſimiles eſſe.



Ducantur enim è punctis Γ, Ε rectæ duæ quæ ſectiones contingant, ut ΓΘ, ΕΟ, quæque proinde parallelæ erunt ordinatim applicatis ad has diametros: adeoque anguli qui fiunt ad puncta Γ, Ε cum diametris ΓΛ, ΕΜ erunt æquales: ſint etiam ΑΒ, ΔΚ ſectionum Axes, occurrentes Tangentibus in punctis Θ, Ο. Erit igitur an-

gulus ΘΓΖ angulo ΟΕΙ æqualis, ob Tangentes ordinatim ductis parallelas. Per puncta Α, Δ erigantur normales ad Axes occurrentes diametris ΓΑ, ΕΜ in punctis Η & Χ, nempe rectæ ΑΗ, ΔΧ; & circumſcribantur circuli triangulis ΖΑΗ, ΙΔΧ: & agantur per Vertices Α, Δ Tangentibus ΓΘ, ΕΟ parallelæ ΑξΤ, Δτγ.

Quoniam vero Figuræ ſuper ΓΑ, ΕΜ factæ ſimiles ſunt; ac rectæ ΑΗ, ΔΧ contingunt ſectiones; & rectæ Αξ, Δτ ſunt ordinatim applicatæ ad diametros ΓΑ, ΕΜ: erit (per 37^{am} primi) rectangulum ſub Ζξ, ξΗ ad quadratnm ex Αξ nt rectangulum ſub Ιτ, τΧ ad quadratum ex Δτ; utraqne enim harum rationum eadem eſt, nempe diametri tranſverſæ ad latus rectum ntrique diametro competens. Rectangulum autem ſub Ζξ, ξΗ æquale eſt rectangulo ΤξΑ, ac rectangulnm ΙτΧ æquale eſt rectangulo Δτγ; adeoqne rectangulum ΤξΑ erit ad quadratum ex ξΑ ſicut rectangulum Δτγ ad quadratum ex Δτ: ac proinde Τξ erit ad ξΑ ut τγ ad Δτ. Verum anguli dno ad puncta ξ, τ ſunt æquales, ſed non recti, quia diametri ΓΑ, ΕΜ non ſunt Axes ſectionum, ac circulorum diametri ſnnt rectæ ΗΖ, ΧΙ: quare (*& per Lemmata priora* Pappi) erit angulus ad Ζ angulo ad Ι æqualis. Anguli autem ΖΓΘ, ΙΕΟ ſunt æquales, ac propterea triangula ΖΓΘ, ΙΕΟ ſunt ſimilia. De punctis Γ, Ε demittantnr ad Axes normales ΓΝ, ΕΞ; & erit rectangulnm ΖΝΘ ad quadratum ex ΓΝ (*per converſas Lemmatum*) ut rectangulum ΙΞΟ ad quadratum ex ΕΞ. Sed (per 37^{am} primi) rectangulnm ΖΝΘ eſt ad quadratnm ex ΓΝ ſicut Axis tranſverſus ΑΒ ad latus ejus rectum; & rectangulum ΙΞΟ eſt ad quadratum ex ΕΞ nt Axis ΔΚ ad latus ejus rectnm. Ipſæ igitur ſectiones (per præcedentem 12^{mam}) ſimiles ſnnt. Oportet antem in Ellipſibus utrumque Axem ΑΒ, ΚΔ eſſe Axem majorem vel minorem, quia ratio ipſius ΒΑ ad latus ejus rectum eadem debet eſſe cum ratione Axis ΚΔ ad latus rectum ejuſdem ΚΔ. Perinde autem eſt ſi nterque Axis vel major vel minor fuerit. Q. E. D.

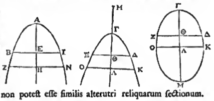


PROPOSITIO XIV.

P*Arabola nec Hyperbolæ neque Ellipſi ſimilis eſt.*

Sint duæ ſectiones, nempe Parabola ΑΒ Axe ΑΗ deſcripta; ac Hyperbola vel Ellipſis, *ſi fieri poſſit*, eidem ſimilis, nt ΓΔ. Sit ſectionis ΓΔ Axis ΓΑ, ac ſit latus tranſverſum figuræ ſive diameter tranſverſa ΜΓ. In utrâque ſectione ducantur normales, ut ΒΙ, ΖΝ; ΔΞ, ΚΟ; & ſint rationes earum ad abſciſſas in uno Axium, eædem ac rationes normalium ad abſciſſas in altero reſpectivè; ſimulque diviſus ſit uterque Axis in ſegmenta eandem inter ſe rationem habentia, nempe ſit ΖΗ ad ΗΑ ut ΚΑ ad ΑΓ, ac ΗΑ ad ΑΕ ut ΑΓ ad ΓΘ, ac ΑΕ ad ΕΒ ſicnt ΓΘ ad ΘΔ: erit igitur ΖΗ ad ΕΒ ſicut ΚΑ ad ΔΘ, adeoqne quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex ΕΒ ut quadratum ex ΚΑ ad quadratum ex ΔΘ. Sed quadratum ex ΖΗ eſt ad quadratum

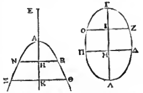
quadratum ex BE (per 20^{mam} primi) ſicut HA ad AE, ac HA eſt ad AB ſicut AΓ ad ΓΘ: quadratum igitur ex KΛ eſt ad quadratum ex ΔΘ ſicut AΓ ad ΓΘ. Verum (per 21^{am} primi) quadratum ex KΛ eſt ad quadratum ex ΔΘ ut rectangulum MΛΓ ad rectangulum MΘΓ, ac proinde MΛ ipſi MΘ æqualis: quod abſurdum. Parabola itaque non poteſt eſſe ſimilis alterutri reliquarum ſectionum.



PROPOSITIO XV.

H*Yperbola non eſt ſimilis Ellipſi.*

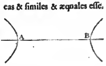
Sit AB Hyperbola ac ΓΔ Ellipſis, axibus AK, ΓM, *diametris vero tranſverſis* EA, ΓΛ deſcriptæ: ac ſi ſint ſectiones ſimiles, ducantur in utrâque normales, ut BN, ΘΞ; ZO, ΔΠ; ita ut earundem rationes ad abſciſſas in utroque Axe ſint reſpectivè eædem, uti & abſciſſæ ad abſciſſas in eadem ratione. Eodem igitur modo, quo præcedentem demonſtravimus, conſtabit quadratum ex ΘK eſſe ad quadratum ex BH ſicut quadratum ex ΔM ad quadratum ex ZI. Sed ut quadratum ex ΘK ad quadratum ex BH ita rectangulum EKA ad rectangulum EHA; & ut quadratum ex ΔM ad quadratum ex IZ ita rectangulum ΓMΛ ad rectangulum ΓIΛ: quare rectangulum EKA eſt ad rectangulum EHA ut rectangulum ΓMΛ ad rectangulum ΓIΛ. Sed, ex hypotheſi, KA eſt ad AH ſicut MΓ ad ΓI; foret igitur KE ad EH ſicut MΛ ad ΛI. Hoc autem abſurdum eſt. Sectio itaque AB non eſt ſimilis ſectioni ΓΔ. Q. E. D.



PROPOSITIO XVI.

H*Yperbolæ oppoſitæ ſunt ſimiles inter ſe & æquales.*

Sint A, B ſectiones oppoſitæ, quarum Axis AB. Dico eas & ſimiles & æquales eſſe. Quoniam enim latera recta Sectionum A, B (per 14^{am} primi) ſunt æqualia, recta vero AB eſt latus tranſverſum commune figuræ utriuſque ſectionis; erunt igitur figuræ, quæ ſiunt ſuper eundem Axem AB, inter ſe ſimiles & æquales: ac proinde ſectio A (per 12^{mam} hujus) ſimilis & æqualis eſt ſectioni B. Q. E. D.



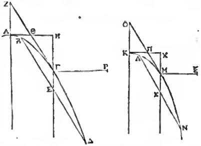
PROPOSITIO XVII.

D*Uctis ad ſimiles Sectiones Conicas Tangentibus, quæ Axibus occurrentes cum iiſdem contineant angulos æquales; eductiſque de punctis contactuum diametris ſectionum, in quarum utraque capiantur puncta, ita ut interceptæ inter hæc puncta & diametrorum Vertices ſint ad ipſas Tangentes in eadem ratione: ſi per puncta ſumpta ducantur rectæ Tangentibus parallelæ, abſcindent hæ ab utrâque ſectione ſegmenta ſimilia & ſimiliter poſita. Ac ſi ſegmenta fuerint ſimilia & ſimiliter poſita, eædem erunt rationes*

diametrorum ad Tangentes in utraque ſectione, angulique ſub diametris & Tangentibus contenti erunt æquales.

Sint imprimis ſectiones ſimiles Parabolæ duæ, ut ΑΒΓ, ΚΛΜ; quarum Axes ΑΖ, ΚΟ; Tangentes vero ΓΖ, ΜΟ, cum Axibus æquales continentes angulos ΑΖΓ, ΚΟΜ; ac per Γ, Μ, ducantur ſectionum diametri ΓΕ, ΜΞ; ac fiat ΕΓ ad ΓΖ ſicut ΞΜ ad ΜΟ; perque Ε, Ξ ipſis ΓΖ, ΜΟ parallelæ agantur ΔΒ, ΝΛ. Dico ſegmenta ΒΓΔ, ΛΜΝ eſſe ſimilia ſimiliterque poſita.

E punctis Α, Κ erigantur ΑΗ, ΚΧ normales ad Axes; ac producantur diametri ΕΓ, ΜΞ uſque ad occurſum earundem in punctis Η, Χ: ac fiat ΡΓ ad duplam ipſius ΓΖ ſicut ΘΓ ad ΓΗ, atque etiam ξΜ ad duplam ipſius ΜΟ ſicut ΠΜ ad ΜΧ. Erunt igitur (per 49^am primi) ΡΓ, Μξ latera recta ad diametros ΓΕ, ΜΞ; ac proinde quadratum ex ΔΕ æquale erit rectangulo ΡΓΕ, uti quadratum ex ΝΞ rectangulo ΞΜξ. Anguli autem ΚΟΜ, ΑΖΓ ſunt æquales inter ſe, adeoque & ipſæ ΧΜΟ, ΗΓΖ æquales; quia rectæ ΧΞ, ΗΕ (per 46^am primi) parallelæ ſunt ipſis ΟΚ, ΖΑ. Quoniam vero anguli ΧΜΟ, ΗΓΖ ſunt æquales, & anguli ad Η & Χ recti ideoque æquales, erunt triangula ΘΗΓ, ΠΧΜ ſimilia; ac ΘΓ erit ad ΓΗ ſicut ΠΜ ad ΜΧ: unde ΡΓ erit ad ΓΖ ſicut ξΜ ad ΜΟ. Fecimus autem ΓΖ ad ΓΕ ſicut ΜΟ ad ΜΞ; quare *ex æquo* ΡΓ erit ad ΓΕ ſicut ξΜ ad ΜΞ. Pari igitur argumento, quo Prop. XI^mam hujus demonſtravimus, conſtabit quod, ſi ducantur ad diametrum ΓΕ rectæ ipſi ΒΔ parallelæ; & ad ΜΞ ipſi ΛΝ parallelæ, *ad intervalla ipſis* ΓΕ, ΜΞ *proportionalia*, erunt hæ rectæ baſibus ΒΔ, ΛΝ parallelæ, ad intercepta ſegmenta utriuſque diametri, Verticibus Γ, Μ contermina, in eadem ratione reſpectivè; anguli autem contenti ſub ordinatim applicatis utrique baſi parallelis & diametris utriuſque ſegmenti ſunt utrobique æquales, ob angulos ad Γ & Μ æquales. Quapropter ſegmentum ΒΓΔ ſimile eſt ſegmento ΛΜΝ ſimiliterque ſitum. Q. E. D.



At vero ſi fuerit ſegmentum ΔΓΒ in unâ ſectionum ſimile ſegmento ΝΜΛ in alterâ, ac ſint eorundem diametri ΓΕ, ΜΞ, Baſes vero ΔΒ, ΛΝ, ac Vertices puncta Γ, Μ, ad quæ tangunt ſectiones rectæ ΓΖ, ΜΟ. Dico angulos ΑΖΓ, ΚΟΜ eſſe æquales, ac ΕΓ eſſe ad ΓΖ ſicut ΞΜ ad ΜΟ.

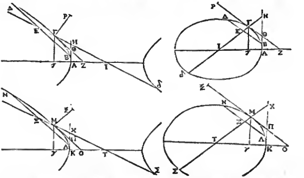
Maneant rectæ nuper deſcriptæ. Quoniam vero ſegmenta ſunt ſimilia, erit angulus contentus ſub Baſe ΒΔ & diametro ΓΕ æqualis contento ſub ΛΝ & ΜΞ; ac rectæ ΖΓ, ΟΜ parallelæ ſunt ipſis ΒΔ, ΛΝ; adeoque anguli ad puncta Γ, Ε; Μ, Ξ ſunt æquales. Anguli itaque obtuſi ΖΓΕ, ΟΜΞ ſunt inter ſe æquales; unde, ob parallelas, angulus ad punctum Ζ æqualis eſt angulo ad punctum Ο. Porro quoniam ΔΒ eſt ad ΕΓ ſicut ΝΛ ad ΞΜ, ob ſimilia ſegmenta; ΔΕ erit ad ΕΓ ſicut ΝΞ ad ΞΜ. At vero ΡΓ eſt ad ΔΕ ſicut ΔΕ ad ΕΓ, & ξΜ ad ΝΞ ſicut ΞΝ ad ΞΜ, propter Parabolas: *quare* ΡΓ *eſt ad* ΔΕ *ſicut* ξΜ *ad* ΝΞ. *Sed* ΔΕ *ad* ΕΓ *ſicut* ΝΞ *ad* ΞΜ; *ex æquo* igitur ΡΓ erit ad ΕΓ ſicut ξΜ ad ΜΞ. Jam ΡΓ eſt ad duplam ipſius ΓΖ (per 49. primi) ſicut ΘΓ ad ΓΗ, & ξΜ eſt ad duplam ipſius ΜΟ ut ΠΜ ad ΜΧ. Sed ΘΓ eſt ad ΓΗ ſicut ΠΜ ad ΜΧ, propter ſimilia triangula ΓΘΗ, ΠΜΧ; quare ΡΓ eſt ad ΓΖ ſicut ξΜ ad ΜΟ. *Cumque* ΡΓ *eſt ad* ΓΕ *ſicut* ξΜ *ad* ΜΞ, *ut jam dictum eſt*; erit ex æquo ΕΓ ad ΓΖ ſicut ΜΞ ad ΜΟ. Anguli autem ΑΖΓ, ΚΟΜ per nuper demonſtrata æquales ſunt: *ergo conſtat Propoſitio.*

PROPO-

PROPOSITIO XVIII.

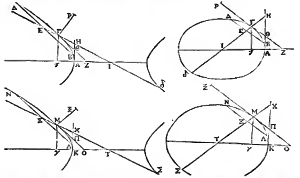
Sint jam ſectiones, de quibus agitur, Hyperbolæ vel Ellipſes; ac ſint omnia deſcripta ut in figurâ præcedente, & producantur diametri ΓΕ, ΜΞ ad centra ſectionum Ι, Τ: habeat autem abſciſſa ΓΕ ad Tangentem ΓΖ eandem rationem ac ΞΜ ad ΜΟ. Dico ſegmenta ΔΓΒ, ΛΜΝ ſimilia eſſe.

Fiat ΡΓ ad duplum Tangentis ΓΖ ſicut ΘΓ ad ΓΗ; ac ξΜ ad duplum Tangentis ΜΟ ſicut ΠΜ ad ΜΞ: erunt igitur (per 50^{mam} primi) ΓΡ & ξΜ latera recta ad diametros ΓΕ, ΜΞ. De punctis Λ, Κ, Γ, Μ ducantur ad Axes normales ΛΗ, ΚΧ, Γτ, Μγ. Jam quoniam ſectiones ſimiles ſunt, erunt earum figuræ ſuper Axes factæ (per 12^{am} hujus) etiam ſimiles; ac ſi figuræ ſuper Axes factæ fuerint ſimiles, erit (per 37^{am} primi) rectangulum ΙτΖ ad quadratum ex Γτ ſicut rectangulum Τγο ad quadratum ex γΜ. Anguli autem ad puncta Ζ, Ο ex hypotheſi ſunt æquales, & anguli ad τ & γ ſunt etiam æquales, utpote recti: triangulum igitur ΓτΖ triangulo Μγο ſimile eſt. Manifeſtum autem eſt (*per Lemmata* 3um & 5^{tum} Pappi) quod, ſi rectangulum ΙτΖ ſit ad quadratum ex Γτ ſicut rectangulum Τγο ad quadratum ex γΜ, triangula ΓτΙ, ΜΤγ erunt ſimilia, ac proinde anguli ad centra Ι, Τ æquales. Anguli igitur ΖΓΙ, ΤΜΟ ſunt æquales, quibus etiam æquales ſunt anguli ad Ε & Ξ, propter ordinatim applicatas Tangentibus parallelas. Ob æquales autem angulos ad Ι & Τ, neceſſe eſt etiam angulos ad Η & Χ æquales eſſe. Sed anguli



ΖΓΙ, ΤΜΟ ſunt æquales; quare triangula ΘΓΗ, ΠΜΧ ſunt ſimilia, ac ΘΓ eſt ad ΓΗ ſicut ΠΜ ad ΜΧ. Fecimus autem ΡΓ ad duplum ipſius ΓΖ *ſicut* ΘΓ *ad* ΓΗ, *&* ξΜ *ad duplum ipſius* ΜΟ ſicut ΠΜ ad ΜΧ; erit igitur ΓΡ ad ΓΖ ſicut Μξ ad ΜΟ; & (ob ſimilia triangula) ΓΖ eſt ad ΓΙ ſicut ΟΜ ad ΜΤ: quare *ex æquo* ΓΡ eſt ad ΓΙ ſicut Μξ ad ΜΤ, adeoque ΓΡ eſt ad Γδ ſicut Μξ ad ΜΣ. Figuræ igitur contentæ ſub ipſis ΓΡ, Γδ, & ſub Μξ, ΜΣ ſunt ſimiles. Quinetiam cum ΓΡ eſt ad ΓΖ ſicut Μξ ad ΜΟ, & ΓΖ ad ΓΕ ut ΜΟ ad ΜΞ, erit *ex æquo* ΡΓ ad ΓΕ ut Μξ ad ΜΞ. Hoc autem cum ita ſit, ac figura contenta ſub ΓΡ, Γδ ſimilis ſit contentæ ſub Μξ, ΜΣ; ſi jam ſecetur ΓΕ utcunque, ac per punctum diviſionis ducatur recta ipſi ΒΔ baſi ſegmenti parallela, ac dividatur diameter ΜΞ in eadem ratione qua diviſa eſt ΓΕ, ac per punctum diviſionis agatur parallela baſi ſegmenti ΛΝ: erunt (per demonſtrata in 12^{mâ} hujus) parallelæ diametro ΜΞ occurrentes ad abſciſſas ex eâdem Vertici Μ conterminas, *in eâdem ratione ac baſi* ΒΔ *parallelæ ad portiones ab iiſdem in diametro* ΓΕ *abſciſſas verticique* Γ *conterminas*. Angulus autem quem comprehendit baſis ΒΔ cum ΓΕ æqualis eſt angulo comprehenſo ſub baſi ΛΝ & ipſâ ΜΞ; quia hi anguli æquales ſunt æqualibus angulis ad puncta Γ, Μ ſub Tangentibus & diametris contentis. Segmenta igitur ΔΓΒ, ΝΜΛ ſimilia ſunt & ſimiliter poſita. Q. E. D.

Verum ſi fuerint ſegmenta ſimilia. Dico angulos ΓΖΑ, ΜΟΚ æquales eſſe, ac ΓΕ eſſe ad ΓΖ ut ΞΜ ad ΜΟ. Poſitis igitur ſegmentis duabus ſimilibus, ducantur in iiſdem utcunque rectæ ipſis ΔΒ, ΝΛ parallelæ numeroque æquales, occurrentes ipſis ΓΕ, ΜΞ ſub angulis æqualibus: & erunt ipſæ, ut & baſes ΔΒ, ΛΝ, ad abſciſſas è diametris in iiſdem rationibus reſpective; ac abſciſſæ in ipſâ ΓΕ ad abſciſſas in diametro ΜΞ (*per Definit. ſeptimam*) proportionales erunt. Poterunt autem rectæ in ſegmento ΔΓΒ ipſi ΔΒ parallelæ & ad ΓΕ ductæ (per 50^am^ primi) rectangula lateri recto ΓΡ adjacentia, & excedentia vel deficientia figuris rectangulis ſimilibus contentis ſub ΓΡ, Γϑ: pariterque poterunt rectæ in ſegmento ΝΜΛ ad rectam ΜΞ ductæ, ipſique ΛΝ parallelæ, rectangula ipſi ξΜ adjacentia, & excedentia vel deficientia figuris rectangulis rectangulo ſub ξΜ, ΜΣ contento ſimilibus. Hoc autem cum ita ſit, erit (per 12^am^ hujus) ΓΡ ad Γϑ ſicut Μξ ad ΜΣ; occurruntque ordinatim applicatæ diametris ſub iiſdem angulis: *quare* (per 13^am^ hujus) *ſectiones ſimiles ſunt, ac figuræ Axium ſimiles.* Unde (per 37^am^ primi) rectangulum ΙτΖ erit ad quadratum ex Γτ ſicut rectangulum Τγο ad quadratum ex Μγ. Verum anguli ad τ, γ ſunt recti, & anguli ΖΓΙ, ΟΜΤ æquales, ac proinde triangula ΙΓΖ, ΤΜΟ (*per* Pappi *Lemmata* 3um *&* 5^tum^) ſunt ſimilia: *adeoque angulus* ΓΖΑ *angulo* ΜΟΚ *æqualis eſt.* Atque hoc in Hyperbola univerſim conſtat, in Ellipſi vero opus eſt ut uterque Axis ΑΙ, ΚΤ ſit Axis *major vel* minor.



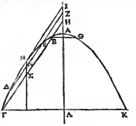
Quoniam vero ΡΓ eſt ad Γϑ ſicut ξΜ ad ΜΣ; *& rectangulum* ϑΕΓ *eſt* (per 21^am^ primi), *ad quadratum ex* ΔΕ *ut* ϑΓ *ad* ΓΡ, quemadmodum rectangulum ΜΞΣ eſt ad quadratum ex ΝΞ ſicut ΣΜ ad Μξ; *erit rectangulum* ϑΕΓ *ad quadratum ex* ΔΕ *ſicut rectangulum* ΜΞΣ *ad quadratum ex* ΝΞ. Quadratum autem ex ΔΕ eſt ad quadratum ex ΕΓ ſicut quadratum ex ΝΞ ad quadratum ex ΜΞ; *ex æquo* igitur rectangulum ϑΕΓ erit ad quadratum ex ΕΓ ſicut rectangulum ΜΞΣ ad quadratum ex ΞΜ; hoc eſt ϑΕ ad ΕΓ ſicut ΣΞ ad ΞΜ: *& dividendo vel componendo* ϑΓ *erit ad* ΓΕ *ſicut* ΣΜ *ad* ΜΞ. Ob ſimilia autem triangula ΙΓΖ, ΤΜΟ, ΙΓ erit ad ΓΖ ſicut ΤΜ ad ΜΟ: At vero ϑΓ, ΣΜ duplæ ſunt ipſarum ΙΓ, ΤΜ; quare ϑΓ eſt ad ΓΖ ſicut ΣΜ ad ΜΟ; ac proinde ΓΕ eſt ad ΓΖ ſicut ΜΞ ad ΜΟ. anguli autem ad Ζ, Ο ſunt æquales: *ergo conſtat Propoſitio.*

PROPOSITIO XIX.

DUctis ad Axem Parabolæ vel Hyperbolæ normalibus, erunt ſegmenta à duabus quibuſvis normalibus, ab utroque Axis latere abſciſſa, ſimilia & æqualia; ſegmentum autem quodvis aliud ejuſdem ſectionis non erit iiſdem ſimile.

Sit

Sit ΓΑΚ Parabola vel Hyperbola, cujus Axis ΑΛ; & ducantur in ſectione rectæ duæ ad Axem normales, puta ΒΘ, ΓΚ, abſcindentes è ſectione ſegmenta ΒΓ, ΘΚ: ſint autem ſegmenta ΔΕ, ΘΚ à diverſis normalibus abſciſſa. Dico ſegmenta ΒΓ, ΘΚ eſſe ſimilia, quia (per 7^{mam} hujus) æqualia ſunt, ac ſuperimpoſita unum ſuper alterum congruunt inter ſe: ſegmenta vero ΔΕ, ΘΚ non eſſe ſimilia.

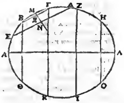


Nam, ſi fieri poſſit, ſint ſegmenta ΔΕ, ΘΚ ſimilia. Segmentum autem ΘΚ ſegmento ΒΓ (per eandem 7^{mam}) ſimile eſt: ſegmentum igitur ΔΕ ſimile erit ſegmento ΒΓ; atque adeo baſes ΒΓ, ΔΕ productæ (per duas Prop. præcedentes) occurrent Axi ſub æqualibus angulis ΑΗΒ, ΑΖΕ: unde rectæ ΓΒ, ΔΕ erunt parallelæ. Ducatur recta ΜΞ dividens ipſas ΓΒ, ΔΕ bifariam in Ξ & Ν, & per punctum Μ ipſi ΔΕΖ parallela ſit ΜΙ. Erit igitur ΜΞ (per 28^{vam} ſecundi) ſectionis diameter, ac ΜΙ ordinatim applicatis parallela tanget ſectionem. Jam ſi ſegmenta ΓΒ, ΔΕ ſint ſimilia, erit (per duas proximè præcedentes) ΜΙ ad ΜΞ ſicut ΜΙ ad ΜΝ. Hoc autem abſurdum eſt, ac proinde ſegmentum ΔΜΕ non poteſt eſſe ſimile ſegmento ΘΚ. Q. E. D.

PROPOSITIO XX.

DUctis ad Axem Ellipſeos normalibus; erunt ſegmenta à duabus quibuſvis normalibus ab utroque Axis latere abſciſſa, ſimilia & æqualia inter ſe, ut & ſegmentis, à normalibus ab altera parte centri ad eaſdem ab eo diſtantias ductis, abſciſſis: poſitio quoque horum quatuor ſegmentorum ſimilis erit; neque ullum aliud ſegmentum ejuſdem ſectionis his ſimile eſſe poteſt.

Sit Ellipſeos Axis ΑΛ, & ad rectos angulos occurrant Axi rectæ duæ ΒΘ, ΓΚ; ut & ab alterâ parte centri aliæ duæ ad eaſdem à centro diſtantias ut ΖΙ, ΗΟ. Dico ſegmenta ΒΓ, ΘΚ, ΖΗ, ΙΟ eſſe ſimilia, neque aliud dari ſegmentum in ſectione quod iiſdem ſimile ſit.



Quod autem ſegmenta hæc ΒΓ, ΘΚ, ΖΗ, ΙΟ ſimilia ſint ac ſimiliter poſita, hinc manifeſtum eſt; quia (per 8^{vam} hujus) æqualia ſunt, ac applicatæ coincident inter ſe. Verum quod nullum aliud ſegmentum his ſimile ſit hoc modo probabitur. Si fieri poſſit, ſimile ſit iis ſegmentum ΔΕ, ac jungantur rectæ ΔΕ, ΒΓ; quas productas ad occurſum Axis eidem (per 18^{vam} hujus) convenire oportet ſub æqualibus angulis. Rectæ igitur ΔΕ, ΓΒ erunt parallelæ; ductâque rectâ ΜΞΝ parallelas has bifariam dividente in punctis Ν, Ξ, erit ΜΞΝ (per 28^{vam} II^{di}) ſegmentorum diameter. Jam ſi ſegmenta ΔΕ, ΓΒ ſint ſimilia, foret ΓΒ ad ΞΜ ſicut ΔΕ ad ΜΝ. Hoc autem abſurdum eſt: nam ſi hoc ita ſit, tranſirent rectæ ΜΒ, ΜΓ junctæ & productæ per puncta Ε, Δ. Segmentum igitur ΔΕ non eſſe poteſt ſimile ſegmento ΓΒ. Q. E. D.

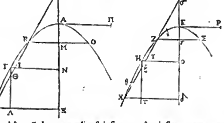
PROPOSITIO XXI.

SI ducantur ad Axes duarum Parabolarum normales, ita ut Axium portiones interceptæ Verticibuſque conterminæ fuerint in eadem ratione ac latera recta utriuſque ſectionis: erunt ſegmenta à normalibus abſciſſa in unâ ſectionum ſimilia ſegmentis alterius,

ſimiliterque poſita; neque in iiſdem ſectionibus reperietur ſegmentum aliud quodcunque prædictis ſimile.

Sint ΑΒ, ΕΖ duæ Parabolæ quarum Axes ΑΞ, Εϑ, latera vero recta ΑΠ, ΕΡ; & in alterâ ſectionum ducantur normales ΒΜ, ΔΞ, in alterâ vero normales Ζτ, Χϑ: fiat autem ut ΑΜ ad ΑΠ ita Ετ ad ΕΡ, & ut ΞΑ ad ΑΠ ita Εϑ ad ΕΡ. Dico ſegmentum ΒΑΟ ſimile eſſe ſegmento ΖΕΣ; ac ſegmentum ΔΑ ſimile ſegmento ΧΕ, atque etiam ſegmentum ΒΔ ſegmento ΖΧ.

Segmentum autem ΒΑΟ ſimile eſſe ſegmento ΖΕΣ (in 11^mi hujus) demonſtratum eſt. Quod autem ſegmenta ΒΔ, ΖΧ ſint ſimilia, hoc modo demonſtrabitur. Junctæ rectæ ΒΔ, ΖΧ producantur ad puncta Κ, σ; ac dividantur ipſæ ΒΔ, ΖΧ bifariam in punctis Θ, ξ, per quæ ducantur Axibus parallelæ ΓΘΛ, ΗξΤ; & de punctis Γ, Η demittantur ad Axes normales ΓΝ, Ηο. Quoniam vero ΑΠ eſt ad utramque ΑΜ, ΑΞ ut ΕΡ ad utramque ex ipſis Ετ, Εϑ; manifeſtum eſt ΑΞ eſſe ad ΑΜ ſicut Εϑ ad Ετ, ac proinde (per 20^mam primi) erit quadratum ex ΔΞ ad quadratum ex ΒΜ ut quadratum ex Χϑ ad quadratum ex Ζτ; quapropter ΔΞ eſt ad ΒΜ ut Χϑ ad Ζτ; atque adeo ΞΚ ad ΚΜ ſicut ϑσ ad στ: per converſionem autem rationis erit ΚΞ ad ΞΜ ſicut ϑσ ad ϑτ. Cum autem ΑΞ eſt ad ΑΜ ſicut ϑΞ ad Ετ; per converſionem rationis ΑΞ erit ad ΞΜ ſicut ϑΕ ad ϑτ. Sed jam conſtat ΚΞ eſſe ad ΞΜ ſicut σϑ ad ϑτ; erit itaque ΚΞ ad ΞΑ ſicut σϑ ad ϑΕ. Verum (per 11^mam hujus) ΞΑ eſt ad ΞΔ ſicut Εϑ ad ϑΧ; *adeoque* ΚΞ *ad* ΞΔ *ſicut* σϑ *ad* ϑΧ. Anguli autem ad puncta Ξ, ϑ ſunt recti, adeoque triangula ΚΞΔ, σϑΧ ſimilia ſunt, ac proinde anguli ad puncta Κ, σ æquales. Jam propter ſimilia triangula, ΔΚ eſt ad ΚΒ ſicut Χσ ad σΖ; ac per converſionem rationis ΚΔ eſt ad ΔΒ ſicut Χσ ad ΧΖ. Biſecatur autem ΒΔ in Θ, uti ΧΖ in ξ; quare ΚΔ eſt ad ΔΘ ſicut Χσ ad Χξ: ac ΔΞ



erit ad ΞΛ ſicut Χϑ ad ϑΤ. Sed ΞΛ æqualis eſt ipſi ΓΝ, ac ϑΤ ipſi Ηο; quare ΔΞ erit ad ΓΝ ſicut Χϑ ad Ηο, ac (per 20^mam primi) ΞΑ erit ad ΑΝ ſicut ϑΕ ad Εο; *ac per converſionem rationis* ΞΑ *ad* ΞΝ *ſicut* ϑΕ *ad* ϑο. Demonſtravimus autem ΚΞ eſſe ad ΞΑ ſicut σϑ ad ϑΕ, unde *ex æquo* ΚΞ erit ad ΞΝ ſicut σϑ ad ϑο; atque adeo ΚΔ erit ad ΔΙ ſicut σΧ ad ΧΤ. Verum ΚΘ eſt ad ΘΔ ut σξ ad ξΧ, unde ΚΘ eſt ad ΘΙ ſicut σξ ad ξΤ: ob ſimilia autem triangula ΙΘΓ, ΤξΗ; erit ΙΘ ad ΘΓ ſicut Τξ ad ξΗ; quare *ex æquo* ΚΘ erit ad ΘΓ ſicut σξ ad ξΗ. Recta autem ΘΚ æqualis eſt Tangenti ſectionis ad punctum Γ ad Axem terminatæ, quia eidem ΘΚ parallela eſt ac inter duas parallelas. Pariter σξ æqualis erit Tangenti per punctum Η ductæ ad Axem: quare Tangens per Η ducta eſt ad Ηξ ſicut Tangens per Γ ducta eſt ad ΓΘ. Quod ſi hoc ita ſe habeat ac æquales ſint anguli quos continent Tangentes hæ cum ſuis Axibus, manifeſtum eſt (per 17^am hujus) fore ſegmenta ſimilia de quorum verticibus Tangentes ducuntur: adeoque ſegmentum ΔΓΒ ſegmento ΧΗΖ eſſe ſimile.

Quinetiam ſi capiatur aliud ſegmentum ut θε, quod non intercipiatur à prædictis normalibus. Dico illud non eſſe ſimile ſegmento ΔΓΒ. Nam ſegmentum ΔΓΒ ſimile eſt ſegmento ΧΗΖ, & ſegmentum ΧΗΖ (per 19^am hujus) non eſt ſimile ſegmento θε, quia non intercipitur ab iiſdem normaliter applicatis. Segmentum igitur θε non eſt ſimile ſegmento ΔΓΒ.

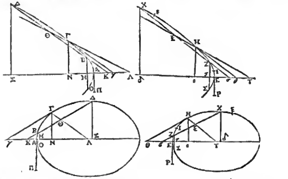
PROPO-

PROPOSITIO XXII.

Iſdem poſitis in Hyperbolis & Ellipſibus ſimilibus, eadem evenient quæ in Parabola evenire, in Propoſitione præcedente, demonſtravimus.

Iiſdem factis quæ prius in Parabola fecimus, producantur diametri ſegmentorum ΓΘ, ΗΞ ad centra Λ, Υ; & ad puncta Γ, Η tangant ſectiones rectæ Γγ, Ηθ, quæ parallelæ erunt ipſis ΔΚ, Χσ. Sint autem ΑΜ, ΑΞ ad latus rectum ΑΠ ſicut ΕΥ, Εδ ad latus rectum alterius ſectionis ΕΡ.

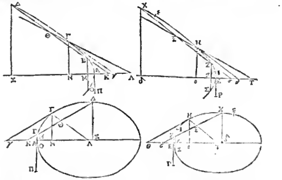
Quoniam vero ſectiones ſunt ſimiles, erunt etiam (per 12^{mam} hujus) earundem figuræ ſimiles, ac Axis tranſverſus unius erit ad latus ejus rectum ſicut Axis alterius ad latus ejus rectum. Supponimus autem ΑΜ, ΕΥ eſſe in ratione laterum rectorum; quare, per demonſtrata in 12ma hujus, ſi ducantur in ſegmento ΒΑΟ rectæ ipſi ΒΟ parallelæ, & in ſegmento ΖΕΣ rectæ ipſi ΖΣ parallelæ, ſitque numerus harum parallelarum in utroque ſegmento æqualis; erunt parallelæ in ſegmento ΖΕΣ & ipſa Baſis ΖΣ, ad portiones Axis ΕΥ, ab iiſdem abſciſſas verticique Ε conterminas, in eiſdem rationibus quas habent parallelæ in ſegmento ΒΑΟ & ipſa ΒΟ ad abſciſſas in Axe ΑΜ vertici Α adjacentes, *reſpectivè*: erunt quoque abſciſſæ Axis ΑΜ ad abſciſſas Axis ΕΥ in eadem ratione. Quocirca (*per Definit. ſeptimam*) ſegmenta ΒΑΟ, ΖΕΣ ſimilia ſunt.



Quoniam antem ΑΜ eſt ad latus rectum ΑΠ ſicut ΕΥ ad latus rectum ΕΡ, ac ΑΞ eſt ad ΑΠ ſicut δΕ ad ΕΡ; erunt (propter ſimiles ſectiones) ΑΜ ad ΜΒ ſicut ΕΥ ad ΥΖ, & ΞΑ eſt ad ΑΜ ſicut δΕ ad ΕΥ: unde *ex æquo* ΞΑ eſt ad ΒΜ ſicut δΕ ad ΥΖ. Sed & ΔΞ eſt ad ΞΑ ſicut Χδ ad δΕ; quare *iterum ex æquo* ΔΞ erit ad ΒΜ ſicut δΧ ad ΥΖ; ac proinde ΞΚ ad ΚΜ ſicut δσ ad σΥ: per converſionem autem rationis ΚΞ erit ad ΞΜ ſicut δσ ad δΥ. Verum ΞΜ eſt ad ΞΑ ut δΥ ad δΕ (ob ΞΑ ad ΑΜ ſicut δΕ ad ΕΥ) quare ΚΞ eſt ad ΞΑ ut σδ ad δΕ. Eſt antem ΞΑ ad ΔΞ ſicut Εδ ad δΧ; quare *ex æquo* ΚΞ eſt ad ΔΞ ſicut σδ ad δΧ. Anguli autem ad puncta Ξ, δ ſunt recti, adeoque triangula ΚΔΞ, σΧδ ſunt ſimilia & anguli ad Κ, σ æquales. Jam ſectionum ſimilium figuræ ſunt ſimiles, ac rectæ Γγ, Ηθ ſunt Tangentes; erit igitur (per 37^{mam} primi) rectangulum ΛΝγ ad quadratum ex ΓΝ ſicut rectangulum Υοθ ad quadratum ex Ηο. Sed quadratum ex ΓΝ eſt ad quadratum ex Νγ ut quadratum ex Ηο ad quadratum ex οθ, ob ſimilia triangula ΓΝγ, Ηοθ: quare *ex æquo* rectangulum ΛΝγ eſt ad quadratum ex Νγ ſicut rectangulum Υοθ ad quadratum ex οθ; ac propterea ΛΝ erit ad Νγ ſicut Υο ad οθ. Sed Νγ eſt ad ΓΝ ſicut θο ad οΗ; adeoque ΛΝ erit ad ΓΝ ſicut Υο ad οΗ. Anguli autem ad Ν & ο

 ſunt

ſunt recti, ac triangula ΓγΝ, Ηθσ ſunt ſimilia; quare anguli ad Λ, Τ ut & ad γ, θ ſunt æquales: quocirca triangula ΓγΛ, ΗθΤ ſunt ſimilia, ac γΛ eſt ad ΓΛ ſicut θΤ eſt ad ΤΗ. Eſt autem γΚ ad ΓΘ ſicut σθ ad Ηξ, propter parallelas γΓ ipſi ΘΚ ac Ηθ ipſi σξ. Porro ob ſimilitudinem ſectionum ΛΜ eſt ad ΜΒ ſicut Ετ ad τΖ; & ΜΒ eſt ad ΜΚ ſicut Ζτ ad τσ; *unde* ex æquo ΛΜ *eſt ad* ΜΚ *ſicut* Ετ *ad* τσ, *ac componendo vel dividendo* ΛΜ *eſt ad* ΛΚ *ſicut* Ετ *ad* Εσ. Eſt autem ΛΛ ad ΛΜ ſicut ΕΤ ad τΕ (quia ratio compoſita ex ratione ΛΛ ad ΛΠ & ΛΠ ad ΛΜ eadem eſt ac ratio compoſita ex ratione ΕΤ ad ΕΡ & ΕΡ ad τΕ) *ex æquo* igitur ΛΛ eſt ad ΛΚ ſicut ΤΕ ad Εσ, *ac proinde* ΛΛ *eſt ad* ΛΚ *ſicut* ΕΤ *ad* Τσ. Ob ſimilia autem triangula, ΛΝ eſt ad Λγ ſicut οΤ ad Τθ; & ΝΛ eſt ad Λγ (per 37^{am} primi) ſicut quadratum ex ΛΛ ad quadratum ex Λγ, quemadmodum οΤ eſt ad Τθ ſicut quadratum ex ΕΤ ad quadratum ex Τθ: quadratum igitur ex ΛΛ eſt ad quadratum ex Λγ ſicut quadratum ex ΕΤ eſt ad quadratum ex Τθ; adeoque ΛΛ eſt ad Λγ ſicut ΕΤ ad Τθ. Verum jam demonſtravimus ΛΛ eſſe ad ΛΚ ſicut ΕΤ ad Τσ; quare Λγ eſt ad ΛΚ ſicut Τθ ad Τσ, ac proinde Λγ eſt ad γΚ ſicut Τθ ad θσ. Sed Γγ eſt ad γΛ ſicut θΗ ad θΤ, ob ſimilia triangula γΛΓ, θΤΗ: erit igitur *ex æquo* Γγ ad γΚ ſicut θΗ ad θσ. Nuper autem oſtenſum eſt γΚ eſſe ad ΓΘ ſicut σθ ad Ηξ; quare *ex æquo* Γγ *eſt ad* ΓΘ *ſicut* θΗ *ad* Ηξ. Anguli autem ad puncta γ, θ ſunt æquales: ſegmenta igitur ΒΓΔ, ΖΗΧ ſimilia ſunt ſimiliterque poſita, juxta ea quæ demonſtrata dedimus in 18va hujus.



Quod ſi capiatur ſegmentum aliquod aliud ut ις, quod non ſit interceptum ſub iiſdem ordinatim applicatis, nec in Ellipſi ſub ordinatis æqualiter ab altera parte centri diſtantibus: Dico illud non eſſe ſimile ſegmento ΔΓΒ. Nam ſi fieri poſſit, ſit illi ſimile. Cumque ſegmentum ΒΔ ſimile eſt ſegmento ΖΧ, erit quoque ſegmentum ις ipſi ΖΧ ſimile. Non autem interceptum eſt ſub iiſdem ad Axem normalibus, neque ſub iis quæ ſunt ad eaſdem à centro diſtantias. Itaque (per 19^{nam} & 20^{mam} hujus) poſuimus abſurdum. Segmentum igitur ις non poteſt eſſe ſimile ſegmento ΧΖ, adeoque nec ſegmento ΔΓΒ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIII.

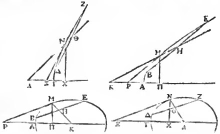
IN ſectionibus diſſimilibus, nulla portio unius ſimilis eſt alicui alterius portioni.

Sint ΑΒ, ΓΔ ſectiones diſſimiles, ac primum ſint ambæ Hyperbolæ vel Ellipſes. Dico nullum ſegmentum ſectionis ΑΒ ſimile eſſe ſegmento alicui ex ΓΔ.

Nam ſi fieri poſſit, ſint ΒΕ, ΔΖ ſegmenta ſimilia. Jungantur ΒΕ, ΔΖ ac dividantur bifariam in punctis Θ, Η; ac per centra ſectionum, Κ, Λ ducantur rectæ ΗΜΚ, ΘΝΛ: quæ (per 47^{am} primi) diametri erunt ſectionum. Hæ vero vel erunt ſectionum

onum Axes, vel nnn erunt. Quod ſi Axes fuerint, ac ſegmenta ΒΕ, ΔΖ ſint ſimilia; demiſſæ ad Axes normales parallelæ erunt ipſis ΕΒ, ΔΖ; & erunt normales ad abſciſſas Axis vertici conterminas in unâ ſectinnum ſicut normales ad abſciſſas Axis in alterâ in iiſdem rationibus *reſpective*: atque etiam abſciſſæ in unn Axe erunt ad abſciſſas in altero in eadem ratione. At hæ parallelæ normales ſunt ſuper Axes ſectinnum; qnare ſectiones ipſæ erunt ſimiles. Hoc antem abſurdum eſt. Pnſuimns enim eas diſſimiles eſſe.

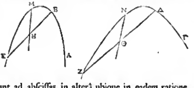
Si vero ΗΜΚ, ΘΝΛ non fuerint Axes, ſint ſectinnum Axes ΑΚ, ΓΛ, & de punctis Μ, Ν demittantur ad Axes normales ΜΠ, ΝΧ, & ab iiſdem ducantur tangentes ΜΡ, ΝΞ: ac (per demonſtrata in 18va hujus) manifeſtum erit triangula ΜΡΚ, ΝΞΛ ſimilia eſſe; quorum perpendicularia ſunt ΜΠ, ΝΧ: quare (*per*



Converſas Lemmatum Pappi *tertii & quinti*) rectangulum ΚΠΡ erit ad quadratum ex ΜΠ ſicut rectangulum ΛΧΞ ad quadratum ex ΝΧ. Sed rectangulum ΚΠΡ eſt ad quadratum ex ΜΠ (per 37^{am} primi) ſicut Axis tranſverſus ſectionis ΑΒ ad latus ejus rectum; ac (per eandem) rectangulum ΛΧΞ erit ad quadratum ex ΝΧ ſicut Axis tranſverſus ſectionis ΓΔ ad latus ejus rectum. Quapropter Axis ſectionis ΑΒ eſt ad latus ejus rectum ſicut Axis ſectionis ΓΔ ad ejus latus rectum. Figuræ igitur ſectionum ΑΒ, ΓΔ ſunt ſimiles, ac prninde (per 12^{mam} hujus) ſectiones ipſæ ſunt ſimiles. Sectinnes itaque ΑΒ, ΓΔ ſunt ſimiles, quas tamen diſſimiles eſſe ſuppoſuimus. Abſurdum eſt igitur ſegmentum ΒΕ ſimile eſſe ſegmento ΔΖ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

SI vern ſectio ΑΒΕ fuerit Parabola, ΓΔΖ vero Hyperbola ant Ellipſis; demonſtravimus quidem (per 14^{tam} hujus) ſectinnem ſectioni non eſſe ſimilem. Dico quoqne ſegmenta earum non poſſe ſimilia eſſe. Nam, ſi poſſibile ſit ut ſint ſimilia, duci poterunt in iiſdem (*per Definit. ſeptimam*) rectæ numero æquales, ipſis ΒΕ, ΔΖ parallelæ, ita nt portinnes diametri ΜΗ vertici Μ conterminæ à parallelis abſciſſæ, fuerint ad ipſas parallelas in ſegmento ΒΕ, in iiſdem rationibus ac abſciſſæ diametri ΝΘ vertici Ν conterminæ ad parallelas in altera ſegmento ΔΖ ductas: ſimulque Baſis unius erit ad diametrum ejus ſicut Baſis alterius ad diametrum ejus; ac portiones in



unâ diametrorum abſciſſæ erunt ad abſciſſas in alterâ ubique in eadem ratione. Hoc autem fieri nnn poſſe, eodem modo quo rem in integris ſectinnibus (per Prop. 14^{tam}) demnnſtravimus, facile conſtabit. Q. E. D.

Quod ſi una ſectionum fuerit Hyperbola, altera vero Ellipſis, patebit abſurditas juxta argumentum Propoſitionis 15^{tæ} hnjus.

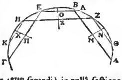
PROPOSITIO XXV.

T*Rium ſectionum Conicarum nulla portio eſt arcus Circuli.*

 Sit

Sit ΑΒΓΕ ſectio aliqua. Dico quod fieri nequit ut pars aliqua ejus ſit arcus circularis.

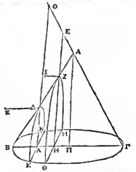
Nam, ſi fieri poſſit, ſit ΑΒΓ arcus Circuli, & in eâ ducautur utcunque rectæ duæ non parallelæ ut ΑΒ, ΓΕ; atque etiam altera ut ΖΗ iiſdem non parallela; ducantur quoque ΖΘ ipſi ΑΒ parallela, ut ΗΚ ipſi ΓΕ, ac ΕΛ ipſi ΖΗ; biſecentur omnes hæ rectæ in punctis Μ, Ν; Ο, Ξ; Π, Χ: ac junctæ rectæ ΜΝ, ΟΞ, ΠΧ diametri erunt Circuli, ac proinde dividentes chordas parallelas bifariam (*per 3. III. Element.*) iiſdem normales eruut. Eædem vero ſunt diametri ſectionis (per 28^{vam} ſecundi) & *ob angulos ipſis parallelis rectos*, ΜΝ, ΞΟ, ΠΧ erunt quoque ſectionis Axes. Neque coincidunt in eandem rectam, qnia tres chordas prius ductas non eſſe parallelas ſupponitnr. Hoc autem abſurdum eſt, quia (per 48^{vam} ſecundi) in nullâ ſectione habentur plures quam duo Axes. Fieri igitur neqnit ut pars aliqua cujuſlibet ſectionis Conicæ ſit arcus Circuli. Q. E. D.



PROPOSITIO XXVI.

SI ſecetur Conus planis æquidiſtantibus, quæ producta ſupra Coni verticem ſubtendantur angulo ejus exteriori: Sectiones Hyperbolicæ hinc genitæ ſimiles erunt inter ſe, ſed inæquales.

Sit Conus ΑΒΓΔ; ac ſecetur planis æquidiſtantibus quorum communes ſectiones cum plano Baſis Coni ſint ΘΜ, ΚΝ; & per centrum Baſis ad has rectas demittatur Cathetus ΒΛΗΓ: ſecetur etiam Couus alio plano per Axem ejus, ſecundum rectam ΒΓ, qnod Conicæ ſuperficiei occurrat in rectis ΑΒ, ΑΓ; ac ſint communes interſectiones hujus plani cum duobus prædictis planis parallelis, rectæ ΔΛ, ΖΗ, quæ producantur ad Ο, Ε. Dico ſectionem ΘΖΜ ſimilem eſſe ſectioni ΚΔΝ, ſed tamen non illi æqualem.



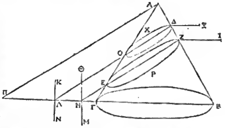
De puncto Α ipſis ΔΛ, ΖΗ parallela ducatur ΑΠ; ac fiat ΟΔ ad ΔΞ ut quadratum ex ΑΠ ad rectangulum ΒΠΓ: fiat etiam ΕΖ ad ΖΙ ut quadratum ex ΑΠ ad rectangulum ΒΠΓ: *adeoque* ΕΖ *erit ad* ΖΙ *ſicut* ΟΔ *ad* ΔΞ. Jam recta ΒΛ normalis eſt ipſi ΚΝ, adeoque cæteræ in ſectione Hyperbolica ΚΔΝ ad rectam ΔΛ ductæ ipſiqne ΛΝ parallelæ (per 12^{mam} primi) poterunt plana lateri recto ΔΞ adjacentia, excedeutia vero rectangulis ſimilibus contento ſub ΟΔ, ΔΞ. Pariter, quia recta ΒΗ normalis eſt ipſi ΜΘ, rectæ eodem modo ductæ in Hyperbola ΘΖΜ poterunt rectangula lateri recto ΖΙ adjacentia, excedentia antem figuris rectangulis ſimilibus contentâ ſub ΕΖ, ΖΙ. Verum angulus quem continent rectæ ΔΛ, ΚΝ æqualis eſt angulo coutento ſub ΖΗ, ΘΜ; quia parallelæ ſuut inter ſe. *Figura autem* ΕΖΙ *ſimilis eſt figuræ* ΟΔΞ: Sectiones igitur (per 12^{mam} hujus) ſunt ſimiles. Quoniam vero rectangulum ΟΔΞ majus eſt rectangulo ΕΖΙ, ſectiones (per ſecundam hujus) non erunt æquales. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

SI ſecetur Conus planis inter ſe parallelis occurrentibuſque utrique lateri trianguli per verticem, neque Baſi Coni parallelis, neque eidem ſubcontrariè poſitis; erunt ſectiones genitæ Ellipſes ſimiles, verum non æquales.

Secent

Secent Conum ΑΒΓ plana dno æquidiſtantia, ſintque commnnes eorum interſectiones cum plano Baſis Coni rectæ ΘΜ, ΚΝ. De centro Baſis Coni ad ipſas ΘΜ, ΚΝ demittatur normalis ΒΓΗΛ; ac ſecetur Conus plano juxta hanc rectam Conique Axem deſignato: ſint autem commnnes horum planorum interſectiones rectæ ΖΕΗ, ΔΟΛ. Dico ſectiones ΖΡΕ, ΔΧΟ ſimiles eſſe, ſed inæquales.

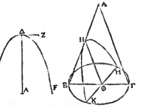


Ducatur de vertice Coni Α recta ipſis ΖΗ, ΔΛ parallela, ut ΑΠ; & erit diameter ΟΔ ad latus rectum ΔΞ ſicut diameter ΕΖ ad latus rectum ΖΙ, quia utraque ratio eſt ut quadratum ex ΑΠ ad rectangulum ΒΠΓ. Eſt autem recta ΒΓΛ ipſi ΚΝ normalis; ac proinde rectæ, ordinatim ad Axem ΔΟ ductæ in ſectione Elliptica ΔΧΟ, ipſi ΚΝ parallelæ erunt; poteruntque rectangula lateri recto ΔΞ adjacentia, deficientia vero figuris (per 13am primi) ſimilibus contentæ ſub ipſis ΞΔ, ΔΟ. Simili ratione ordinatim ductæ ad diametrum ΖΕ, in Ellipſi ΖΡΕ, ipſi ΘΜ parallelæ erunt; ac poterunt rectangula lateri recto ΖΙ adjacentia, deficientia autem figuris ſimilibus factæ ſub ΕΖ, ΖΙ. Verum angulus ΚΛΔ æqualis eſt angulo ΘΗΖ, quia rectæ ΚΛ, ΛΔ ipſis ΘΗ, ΗΖ parallelæ ſunt. *Cumque* ΟΔ *eſt ad* ΔΞ *ſicut* ΕΖ *ad* ΖΙ, figura contenta ſub ΟΔ, ΔΞ ſimilis erit contentæ ſub ΖΕ, ΖΙ. Quod ſi hoc ita ſe habeat, ſectiones ipſæ (per 12mam hujus) ſimiles erunt, adeoqne ſectiones ΖΡΕ, ΔΧΟ ſunt ſimiles. Non poſſunt autem æquales eſſe, quia rectangulum ΕΖΙ majus eſt contento ſub ΟΔ, ΔΞ; ac proinde (juxta demonſtrata in ſecundâ hujus) ſectiones quoque ſunt inæquales.

PROPOSITIO XXVIII. PROBL.

IN Cono recto dato invenire ſectionem datæ Parabolæ æqualem.

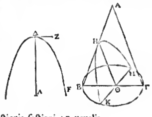
Sit Conus rectus datus, cujus ſectio per Axem eſt triangulum ΑΒΓ: Parabola autem data ſit ΔΕ, cujus Axis ΔΛ & latus rectum ΔΖ: fiat ΔΖ ad ΑΗ ſicut quadratum ex ΓΒ ad rectangulum ſnb ΑΒ, ΑΓ; ac ducatur recta ΗΘ ipſi ΑΓ parallela: dein ſecetur Conus plano tranſeunte per rectam ΗΘ & ad angulos rectos ſuper planum ΑΒΓ, ac genita erit ſectio ΚΗΜ ſuper Axem ΗΘ. Dico ſectionem ΚΗΜ æqualem eſſe ſectioni ΔΕ.



Quoniam normales in ſectione ΚΗ, ad Axem ΗΘ ductæ, poſſunt rectangula *lateri ejus recto* adjacentia; quod quidem eſt ad ΑΗ (per 11mam primi) ſicut quadratum ex ΒΓ ad rectangulum ſub ΑΒ, ΑΓ: fecimus antem ΔΖ ad ΑΗ in eadem ratione quadrati ex ΒΓ ad rectangulum ΒΑΓ; recta igitur ΔΖ æqualis eſt lateri recto ſectionis ΚΗΜ. Sed, ſi ita fuerit, manifeſtum eſt (per primam hnjus) ſectiones eſſe æquales; ac proinde ſectio ΔΕ ſectioni ΗΚ æqualis eſt.

Dico quoque quod non reperietur in hoc Cono alia Parabola datæ æqualis, cujus vertex ſive Axis extremitas ſit in recta ΑΒ, præter hanc ſolam. Nam ſi fieri poſſit ut reperiatur alia Parabola æqualis ſectioni ΔΕ, planum ejus ſecabit triangulum per Coni Axem ad angulos rectos; & erit Axis ſectionis in plano trianguli

ΑΒΓ, ob Conum rectum: in Cono enim recto omnium ſectionum Axes ita ſe habent. At ſi poſſibile ſit ut alia ſectio æqualis ſectioni ΔΕ Verticem habeat in recta ΑΒ, erit Axis ejus parallela ipſi ΑΓ, & punctum Verticis diverſum erit à puncto Η: erit autem latus ejus rectum ad interceptam in recta ΑΒ, inter ſectionis illius & Coni Verticem Α, ut quadratum ex ΒΓ ad rectangulum ΒΑΓ. Hæc autem eadem eſt ratio ipſius ΔΖ ad ΑΗ; quare ΔΖ non eſt æqualis lateri recto hujus alterius ſectionis, quæ proinde ſectioni ΔΕ non eſt æqualis. Poſuimus autem ſectiones æquales eſſe: quod abſurdum eſt, uti conſtat ex primâ hujus. Non igitur reperietur in recta ΑΒ Vertex Axis alicujus alterius ſectionis ſectioni ΔΕ æqualis.

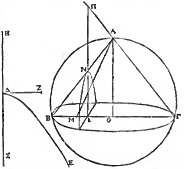


PROPOSITIO XXIX. PROBL.

IN Cono recto dato invenire ſectionem Hyperbolæ datæ æqualem. Oportet autem rationem quadrati Axis Coni ad quadratum ſemidiametri Baſis non majorem eſſe ratione quam habet diameter tranſverſa, ſive Axis datæ ſectionis, ad latus ejus rectum.

Sit Conus rectus propoſitus, in quo triangulum per Axem eſt ΑΒΓ, Axis vero ΑΘ: ſit quoque Hyperbola data ΔΕ, cujus Axis ΗΔΣ; figura vero rectangulum contentum ſub ΗΔ, ΔΖ. Primum autem ſit quadratum ex ΑΘ ad quadratum ex ΒΘ in ratione ΗΔ ad ΔΖ; ac ducatur (*per Lemma* VI. Pappi) recta ipſi ΑΘ parallela ipſique ΗΔ æqualis, quæ ſubtendat angulum ΒΑΠ, ad modum rectæ ΝΠ; & per ΝΠ, ad angulos rectos ſuper planum trianguli ΑΒΓ, erigatur planum Conicæ ſuperficiei occurrens. Dico Hyperbolam ſectione ejus genitam, cujus Axis eſt ΙΝΠ, *æqualem eſſe Hyperbolæ datæ* ΔΕ.

Quoniam enim ΑΘ parallela eſt ipſi ΠΝ, erit ΠΝ, ſive diameter tranſverſa, ad latus rectum ſectionis (per 12[um] primi) ut quadratum ex ΑΘ ad rectangulum ſub ΓΘ, ΘΒ; & ΗΔ eſt ad ΔΖ in eadem ratione; ΠΝ autem ipſi ΗΔ facta eſt æqualis: quare ΔΖ æqualis erit lateri recto ſectionis cujus Axis eſt ΠΝΙ. Figura igitur ſectionis cujus Axis eſt ΠΝΙ æqualis eſt figuræ ſectionis ΔΕ, ac proinde (per ſecundam hujus) ſectiones ipſæ ſunt æquales.

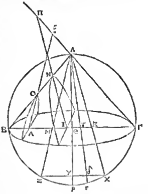


Neque reperietur alia ſectio ſectioni ΔΕ æqualis, cujus punctum Axis verticale ſit in recta ΑΒ. Nam, ſi fieri poſſit, erit quoque Axis hujus ſectionis in plano trianguli ΑΒΓ (ut demonſtratum eſt in Propoſitione præcedente) ac planum hujus alterius ſectionis erit ad angulos rectos ſuper planum trianguli ΑΒΓ. Cum autem ſectio altera Hyperbola eſt & æqualis ſectioni ΔΕ, occurret Axis ejus lateri ΑΓ ultra apicem Coni Α producto, ita ut portio intercepta inter latus trianguli ΑΒ & occurſum cum ΑΓ productâ (per 2[dam] hujus) æqualis ſit ipſi ΔΗ. At vero non eſt ipſa ΠΝ, neque eidem parallela; quia ſi rectæ

ΠΝ

ΠΝ parallela eſſet, non foret eidem æqualis. Sit igitur eidem non parallela, ac ab Α Axi ejus parallela ducatur ΑΜ, quæ cadet vel inter ΑΒ & ΑΘ, vel inter ΑΘ & ΑΓ: erit igitur (per 12^{mam} primi & ſecundam hujus) quadratum ex ΑΜ ad rectangulum ΒΜΓ ſicut ΔΗ ad ΔΖ. Hoc autem abſurdum eſt: nam quadratum ex ΑΜ majus eſt quadrato ex ΑΘ & rectangulum ΒΜΓ minus rectangulo ΒΘΓ.

Jam habeat quadratum ex ΑΘ ad quadratum ex ΘΒ minorem rationem quam ΔΗ ad ΔΖ, ac circumſcribatur Circulus triangulo ΑΒΓ, ac producatur Axis ΑΘ ad Ρ: erit igitur ratio ΑΘ ad ΘΡ minor ratione ipſius ΗΔ ad ΔΖ. Fiat itaque ΑΘ ad Θγ ſicut ΗΔ ad ΔΖ, ac, ductâ rectâ Χγ Ξ Baſi ΒΓ parallelâ, jungantur rectæ ΑΜΞ, ΑΚΧ: fiat etiam utraque ΠΝ, ξΟ (*per ſextum Lemma* Pappi) ipſi ΔΗ æqualis, ita ut ΠΝ ſit ipſi ΑΧ, & ξΟ ipſi ΑΞ parallela; ac concipiantur, per rectas ΠΝ, ξΟ, plana duo ad angulos rectos ſuper planum trianguli ΑΒΓ erecta, quæ proinde generabunt in ſuperficie Conica Hyperbolas binas, quarum Axes ſunt ξΟΛ, ΠΝΙ. *Dico utramque Hyperbolam æqualem eſſe Hyperbolæ propoſitæ* ΔΕ.



Quoniam enim ΔΗ eſt ad ΔΖ ſicut ΑΘ ad Θγ, hoc eſt ut ΑΜ ad ΜΞ, atque etiam quadratum ex ΑΜ (per 12^{am} primi) eſt in eadem ratione ad *rectangulum* ΑΜΞ, *hoc eſt ad* rectangulum ΒΜΓ, quam habet ξΟ diameter tranſverſa figuræ ſectionis cujus Axis eſt ξΟΛ, ad latus rectum ejus: erit figura ſectionis ΔΕ & ſectionis cujus Axis eſt ξΟΛ inter ſe æquales; ac proinde (per ſecundam hujus) ſectiones ipſæ æquales ſunt. Pari argumento probabitur ſectionem ΔΕ æqualem eſſe ſectioni cujus Axis eſt ΠΝΙ.

Neque reperietur ſectio alia *ſectioni* ΔΕ *æqualis, quæ verticem habeat in recta* ΑΒ, præter jam deſcriptas. Nam, ſi fieri poſſit, erit Axis ſectionis (juxta demonſtrata in Parabola) in plano ΑΒΓ: huic autem Axi parallela ducatur recta ΑΤ; ac, argumento nuper uſurpato conſtabit rectam ΑΤ non coincidere cum recta ΑΚ, neque cum recta ΑΜ; ſed ΔΗ eſſe ad ΔΖ (per 12^{mam} primi) ſicut quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΒΤΓ, ſive ut quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΑΤσ, quod æquale eſt rectangulo ΒΤΓ. Sed quadratum ex ΑΤ eſt ad rectangulum ΑΤσ ſicut ΑΤ ad Τσ; quare ΔΗ eſt ad ΔΖ ſicut ΑΤ ad Τσ: quod abſurdum. Nam ΔΗ eſt ad ΔΖ ſicut ΑΘ ad Θγ, ſive ut ΑΤ ad Τδ.

Porro ſi fuerit ratio quadrati ex ΑΘ ad quadratum ex ΒΘ major ratione ΔΗ ad ΔΖ; Dico non reperiri poſſe in Cono ſectionem aliquam ſectioni ΔΕ æqualem. Nam, ſi fieri poſſit, reperiatur; ac ducatur recta ΑΜ hujus ſectionis diametro parallela: erit igitur quadratum ex ΑΜ ad rectangulum ΒΜΓ ſicut ΔΗ ad ΔΖ. Supponitur autem ratio quadrati ex ΑΘ ad rectangulum ΒΘΓ major ratione ΔΗ ad ΔΖ: quapropter ratio quadrati ex ΑΜ ad rectangulum ΒΜΓ minor erit ratione quadrati ex ΑΘ ad rectangulum ΒΘΓ. Sed quadratum ex ΑΜ majus eſt quadrato ex ΑΘ, & rectangulum ΒΜΓ minus rectangulo ΒΘΓ: quod quidem abſurdum eſt. Non reperietur igitur in hoc Cono ſectio aliqua ſectioni ΔΕ æqualis.

PROPOSITIO XXX. PROBL.

IN dato Cono recto invenire ſectionem Ellipſi datæ æqualem.

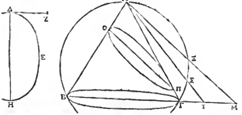
Detur Conus rectus, cujus ſectio per Axem ſit triangulum ΑΒΓ; ac ſit Ellipſis data ΔΕ, cujus Axis *major* ΔΗ ac latus rectum ΔΖ: circumſcribatur triangulo ΑΒΓ

Circulus;

Circulus; ac fiat AM ad MΞ ſicut ΔH ad ΔZ (quod quidem nullo negotio fieri poteſt) ac in triangulo ABΓ ducatur recta OΠ ipſi AM parallela rectæque ΔH æqualis: erigatur autem normaliter ſuper planum trianguli ABΓ, ſecundum rectam OΠ, planum quod Conicæ ſuperficiei occurrens producat Ellipſin. *Dico hanc Ellipſin, cujus Axis eſt* OΠ, *æqualem eſſe Ellipſi datæ* ΔE.

Eſt enim OΠ ad latus ejus rectum (per 13^am primi) ut quadratum ex AM ad rectangulum BMΓ. Sed rectangulum BMΓ æquale eſt rectangulo AMΞ; quare Axis tranſverſus OΠ erit ad latus rectum ſectionis hujus, ut quadratum ex AM ad rectangulum AMΞ, hoc eſt ut AM ad MΞ. Fecimus autem AM ad MΞ ſicut ΔH ad ΔZ; quapropter OΠ eſt ad latus rectum ſectionis cujus Axis eſt OΠ, ſicut ΔH ad ΔZ: figura igitur ſectionis ΔE & ejus cujus Axis eſt OΠ ſunt æquales; adeoque (per ſecundam hujus) & ipſæ ſectiones ſunt æquales.

Dico quoque non reperiri in hoc Cono ſectionem aliam ipſi ΔE æqualem, cujus Vertex apici Coni vicinior fuerit in recta AB. Nam, ſi fieri poſſit, (juxta demonſtrata in 28va hujus) conſtabit Axem ejus eſſe in plano trianguli ABΓ, planumque ejus normaliter inſiſtere eidem plano ABΓ. Quoniam vero hæc ſectio Ellipſis eſt, occurret Axis ejus productus rectæ BΓ, & erit ipſi ΔH æqualis (per 2^dam hujus) ac Vertex ejus puncto A propior erit in recta AB. Verum non cadet Axis ille ſuper rectam OΠ, neque eidem parallela eſſe poteſt. Ducatur igitur de puncto A



huic Axi parallela, quæ non coincidat cum recta AM, ſicut AΣT; hæc autem occurret arcui AΓ, quia non eſt ipſi BΓ parallela. Verum eſt Axis tranſverſus hujus ſectionis ad latus ejus rectum (per 13^am primi) ut quadratum ex AT ad rectangulum BTΓ, ac in eàdem debet eſſe ratione ΔH ad ΔZ. Sed rectangulum BTΓ æquale eſt rectangulo ATΣ; erit igitur ΔH ad ΔZ ut quadratum ex AT ad rectangulum ATΣ, hoc eſt ut AT ad TΣ. Verum ΔH eſt ad ΔZ ut quadratum ex AM ad rectangulum AMΞ, ſive ut AM ad MΞ; quare AT ad TΣ erit ut AM ad MΞ, quod abſurdum & impoſſibile eſt. Quapropter non reperietur in hoc Cono ſectio alia æqualis ſectioni ΔE, cujus Vertex apici Coni propior fuerit in recta AB, præter ſolam ſectionem cujus Axis major eſt OΠ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA.

INvenire Conum rectum Cono recto dato ſimilem, qui contineatur à Parabolâ datâ.

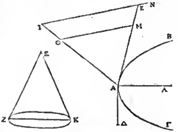
Sit ſectio ABΓ Parabola, cujus Axis AΛ, latus vero rectum ejus AΔ; ſitque Conus datus & triangulum per Axem ejuſdem EZK: & ſecundum AΛ erigatur normaliter, ſuper planum ſectinnis AΛΓ, planum aliud, ut ΘAΛ; & in hoc plano ducatur recta AM quæ contineat cum recta AΛ angulum æqualem angulo EZK: ac fiat ΔA ad AM ſicut KZ ad ZE: & ſuper baſim AM deſcribatur triangulum AΘM ſimile triangulo ZEK, ac ducantur rectæ ΘA, ΘM de punctis A, M; ac fiat Conus cujus Vertex Θ, ac Baſis circulus, cujus diameter AM, ſuper planum AΘM normaliter erectus. *Dico Conum* AΘM *Cono* EZK *ſimilem contineri à Parabolâ datâ* ABΓ.

Eſt enim angulus MAΛ æqualis angulo EZK, & angulus EZK æqualis eſt angulo

* ΘMA

ΘMΛ; angulus igitur MΛA æqualis eſt angulo ΘMA, adeoque ΛA ipſi ΘM parallela eſt. Sed ΘM latus eſt trianguli per Axem Coni; adeoque planum ſectionis propoſitæ producit in ſuperficie Conicâ Parabolam. Jam vero ΔA eſt ad AM ſicut KZ ad ZE, hoc eſt ut AM ad MΘ; quare ΔA eſt ad AM ſicut AM ad AΘ (ob AΘ ipſi MΘ æqualem) quocirca quadratum ex AM rectangulo ΔAΘ æquale, eſt ad rectangulum AΘM ſicut AΔ ad AΘ: eſt igitur latus rectum ſectionis in Cono genitæ (per 11^am primi) ipſa recta ΔA. Eadem antem eſt latus rectum ſectionis BAΓ: cumque utraque Parabola eſt, quarum latera recta ſunt æqualia, ipſæ ſectiones (per primam hnjus) ſunt etiam æquales. Poſita itaque eſt ſectio ABΓ in Cono jam invento, qui quidem ſimilis eſt Cono ZEK, quia ſimilia ſunt triangula EZK, ΘMA.

Dico quoque hanc ſectionem non reperiri in alio Cono ſimili Cono EZK, ita ut Apex ejus reſpiciat idem latus plani in quo eſt ſectio, præter hunc Conum ſolum. Nam, ſi fieri poſſit, ſit alter ille Conus qni contineat hanc ſectionem, ſimilisque ſit Cono EZK, Conus cujns Apex eſt Ι; & per Axem ejus tranſeat planum ſuper planum ſectionis normaliter erectum, eidem occurrens ſecundum Axem ſectionis, nempe in recta AΛ: erit igitur AΛ communis interſectio planorum. Planum autem ΘAΛ erigitur ad angulos rectos ſuper planum ſectionis, juxta eandem rectum AΛ; quare punctum Ι (*per Lemma* VII.) erit in plano ΘAΛ. Jam ſint AΙ, ΙN latera Coni, ac erit ΙN ipſi AΛ parallela, & angulus ZEK angulo AΙN æqualis, ut & angulo AΘM: recta igitur AΙ eſt in directo ipſius ΘA. Producatur recta AM ad Ξ; ac ſi foret ſectio BAΓ in Cono cujus Apex eſt Ι, & caperetur recta quædam ad AΙ in ratione quadrati ex AΞ ad rectangulum AΙΞ; eſſet recta illa latus rectum ſectionis BAΓ. Sed AΔ eſt latus rectum ſectionis BAΓ; quare quadratum ex AΞ *eſſet ad rectangulum* AΙΞ *ſicut* AΔ *ad* AΙ: *quadratum autem ex* AM eſt ad rectangulum AΘM ſicut AΔ ad AΘ. Eſt vero quadratum ex AM ad rectangulum AΘM ſicut quadratum ex AΞ ad rectangulum AΙΞ; adeoque AΔ erit ad AΘ in eadem ratione ac ad AΙ. Hoc autem abſurdum eſt. Non itaque inveniri poteſt Conus alius Cono dato ZEK ſimilis, qni contineat ſectionem ABΓ, ita nt Apex ejus reſpiciat idem latus plani ſectionis. Q. E. D.



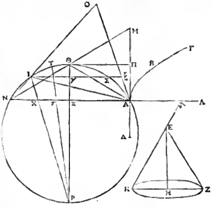
PROPOSITIO XXXII. PROBL.

INvenire Conum rectum Cono recto dato ſimilem ab Hyperbolâ datâ contentum. Oportet autem rationem quadrati Axis Coni ad quadratum ſemidiametri Baſis ejus non majorem eſſe ratione lateris tranſverſi, in figurâ ſectionis ſuper Axem factâ, ad latus rectum ejuſdem.

Sit ABΓ Hyperbola data, cujus Axis AΛ, diameter tranſverſa AN ac *latus rectum* AΔ; *ita ut* figura ſuper Axem facta ſit rectangulum NAΔ: ſit etiam Conus datus Conus ille in quo triangulum per Axem eſt triangulum EZK. Prodncatnr recta KE ad ϑ; & ſecundum Axem ſectionis AΛ erigatur planum ΘAΛ, ad angulos rectos ſuper plannm ſectionis; in hoc autem plano ſuper rectam NA deſcribatur ſegmentum circuli NΘA (*per* 33^am III. *Elem.*) quod capiat angulum æqnalem angulo ϑEZ: ac completo circulo dividatur arcus AΘN bifariam in puncto Θ, & per Θ ipſi AN normalis ducatur ΘΞP.

Imprimis autem ſit quadratum ex Axe Coni, ſive ex EH, ad quadratum ex ZH in ratione AN ad ΔA; & producatur recta NΘ ultra punctum Θ, nt MN, cui occur-

rat recta AM, ipſi ΘP parallela, in puncto M. Quoniam vero arcus NP æqualis eſt arcui PA, erit angulus NΘP æqualis angulo AΘP, adeoque angulus ΘMA æqualis angulo MAΘ. Fiat itaque Conus æquicruris cujus Apex eſt Θ, ac Baſis circulus cujus diameter eſt AM, & cujus planum normaliter inſiſtit plano ΘAΛ. Dico, his poſitis, planum in quo eſt ſectio producere in hoc Cono Hyperbolam cujus Axis eſt AΛ, diameter tranſverſa AN, *& latus rectum* AΔ; *Conumque hunc* ΘAM *Cono dato* EKZ *ſimilem eſſe.*



Angulus enim AΘM angulo ZEK æqualis eſt, quia fecimus ſegmentum AΘN capax anguli angulo ZEδ æqualis; ac ΘA, ΘM ſunt æquales inter ſe, ut ſunt rectæ ZE, EK. Demiſſa igitur normali ΘΠ, erit quadratum ex EH ad rectangulum KHZ (*per Converſ. Lemmat.*V.) ſicut quadratum ex ΘΠ ad rectangulum MΠA. Sed (*ex hypotheſi*) quadratum ex EH eſt ad rectangulum KHZ ſicut NA ad AΔ; eſt igitur quadratum ex ΠΘ ad rectangulum MΠA ſicut NA ad AΔ. Poterunt igitur ordinatim applicatæ ad AΛ Axem ſectionis genitæ (per 12^mam^ primi) rectangula lateri recto AΔ adjacentia, excedentia vero figuris ſimilibus factæ ſub ipſis NA, AΔ. Normales autem ad AΛ ductæ in ſectione ABΓ poſſunt etiam rectangula adjacentia eidem AΔ & excedentia figuris ſimilibus factæ ſub iiſdem NA, AΔ: ſectioni itaque BAΓ (per 2^dam^ hujus) æqualis eſt ſectio genita in Cono ΘAM, cujus Apex eſt Θ, ac baſis circulus diametro AM deſcriptus. Sunt autem in eodem plano, ac Axis coincidit cum Axe: continetur igitur à ſectione BAΓ Conus ille cujus vertex eſt Θ, qui quidem ſimilis eſt Cono EZK, quia ΘΠ eſt ad ΠM ut EH ad HZ.

Dico quoque non contineri ab hac ſectione Conum alium Cono EZK ſimilem, ita ut Apex ejus ad idem latus plani, in quo eſt ſectio ABΓ, jaceat, ad quod jacet punctum Θ, præter Conum jam factum. Nam ſi poſſibile ſit, contineat Conum alium, cujus vertex eſt I; ac, per ea quæ in Propoſitione præcedente demonſtravimus, manifeſtum erit punctum I in plano ΘAΛ reperiri. Sint autem latera hujus Coni rectæ IO, IA; ac ſit Conus ille ſimilis Cono ZEK, adeoque anguli AIO, ZEK æquales, ut & anguli AIN, ZEδ: unde punctum I cadet in arcu AΘN; ac recta IO producta tranſibit per N. Jungatur PXI, & per A eidem parallela ducatur AO; & per punctum I ipſi AN parallela ſit recta ξI. Si igitur ſectio ABΓ fuerit in Cono cujus Apex eſt I; producto ſectionis Axe AΛ ad N, erit quadratum ex ξI ad rectangulum Aξo ſicut diameter tranſverſa AN ad latus rectum AΔ. Sed AN eſt ad AΔ ut quadratum ex EH ad rectangulum ZHK; anguli autem duo NIP, PIA, hoc eſt, anguli IAO, AOI ſunt æquales inter ſe, utpote angulis EZK, EKZ æquales; ſicut angulus AIO angulo ZEK æqualis eſt: quare ſimilia ſunt triangula AIO, ZEK. Verum, per jam demonſtrata, quadratum ex Iξ eſt ad rectangulum Aξo ſicut quadratum ex EH ad rectangulum ZHK. Eſt autem ZH æqualis ipſi HK, adeoque & Aξ ipſi ξo. Sed Aξ eſt ad ξo ſicut NI ad IO, hoc eſt ſicut NX ad XA: quapropter rectæ NX, XA æquales erunt. Hoc autem abſurdum eſt; quia ſola ΘP circuli diameter occurrit ipſi AN ad angulos rectos in puncto Σ. Non igitur in-

* venire

venire licet Conum alium Cono EZK ſimilem, qui à ſectione ABΓ contineatur, præter Conum ΘAM jam deſcriptum.

Jam ſi fuerit ratio quadrati ex EH ad quadratum ex HZ minor ratione NA ad AΔ: fiant eadem quæ in priori caſu, & erit quadratum ex EH ad rectangulum HZK ut quadratum ex ΘΠ (*per Lemma quintum*) ad rectangulum MΠA, ob ſimilia triangula. Rectangulum autem MΠA æquale eſt quadrato ex ΠA, hoc eſt quadrato ex ΘΞ, & quadratum ex ΘΠ æquale eſt quadrato ex AΞ; quare quadratum ex EH eſt ad rectangulum ZHK ut quadratum ex AΞ eſt ad quadratum ex ΘΞ. Sed quadratum ex AΞ æquale eſt rectangulo PΞΘ; quare quadratum ex EH eſt ad rectangulum ZHK, hoc eſt ad quadratum ex ZH, ſicut rectangulum PΞΘ ad quadratum ex ΞΘ, ſive ut PΞ ad ΞΘ. Poſuimus autem rationem quadrati ex HE ad quadratum ex ZH minorem eſſe ratione NA ad AΔ; ratio igitur PΞ ad ΞΘ minor erit ratione NA ad AΔ. Fiat itaque PΞ ad Ξγ ſicut NA ad AΔ, & per punctum γ ipſi NA parallela ducatur recta IγΣξ, ac jungantur IN, IA, IP & per A ipſi IP parallela ſit AO.

Manifeſtum quidem eſt ex præmiſſis triangula æquicrura OIA, ZEK eſſe ſimilia; ac ſi fiat Conus cujus Apex eſt I, ac Baſis circulus cujus diameter AO, cujuſque planum ſuper planum ΘAA normaliter erectum ſit, planum in quo eſt ſectio ABΓ huic Cono occurrere, Hyperbolamque producere cujus Axis eſt recta AA ac diameter tranſverſa AN. Fecimus autem PΞ ad Ξγ, ſive PX ad XI, ſicut AN ad AΔ. Sed PX eſt ad XI ut rectangulum PXI ad quadratum ex XI, ac rectangulum PXI æquale eſt rectangulo NXA; quare rectangulum NXA eſt ad quadratum ex IX ſicut NA ad AΔ. Sed & rectangulum NXA eſt ad quadratum ex IX ſicut quadratum ex Iξ ad rectangulum Oξ A, (nam ob parallelogrammum AξIX, XA *eſt ad* IX *ſicut* Iξ *ad* ξA; *ac* XN *eſt ad* XI *ſicut* Iξ *ad* ξO, *& componendo*) quapropter NA eſt ad AΔ ſicut quadratum ex Iξ ad rectangulum AξO: recta igitur AΔ eſt latus rectum ſectionis in Cono AIO genitæ. Unde & per ea quæ in hac Propoſitione demonſtrata ſunt, manifeſtum erit Conum cujus Apex eſt punctum I contineri ab hac ſectione ABΓ. Continebitur etiam ab eadem ſectione Conus alter cujus Apex eſt punctum Σ, junctis rectis NΣ, ΣA, ac productâ ipſâ NΣ; ac Conus uterque ſimilis erit Cono dato EZK.

Dico quoque non contineri ab eadem Conum aliquem tertium Cono EZK ſimilem, cujus Apex fuerit ad eaſdem partes plani ſectionis BAΓ ad quas ſitum eſt punctum I. Apex enim ejus erit, per præmiſſa, in arcu AIN. Sit autem ille in puncto T, ac jungatur recta TτP; & è converſâ præcedentis demonſtrationis conſequetur AN eſſe ad AΔ ſicut Pτ ad Tτ: quod quidem abſurdum eſt, cum ſcilicet PΞ ſit ad Ξγ in illâ ratione. Sectio igitur BAΓ non continet tertium Conum ſimilem Cono EZK.

Quod ſi ratio quadrati ex EH ad quadratum ex ZH major fuerit ratione AN ad AΔ, impoſſibile erit ut Conus Cono EZK ſimilis contineatur à ſectione ABΓ. Nam, ſi fieri poſſit, contineatur ab ea Conica ſuperficies cujus Apex eſt I; & modo in præcedentibus uſurpato, conſtabit PX eſſe ad XI ſicut AN ad AΔ. Sed ratio AN ad AΔ minor eſt ratione quadrati ex EH ad quadratum ex ZH, quam demonſtravimus eſſe ſicut PΞ ad ΞΘ; erit igitur ratio PX ad XI minor ratione PΞ ad ΞΘ. Hoc autem abſurdum eſt: ac proinde nullus Conus Cono dato EZK ſimilis contineri poteſt à ſectione BAΓ. Q. E. D.

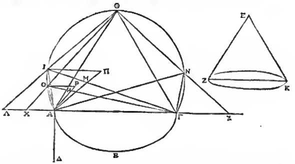
PROPOSITIO XXXIII. PROBL.

INvenire Conum rectum Cono recto dato ſimilem qui contineatur ab Ellipſi data.

Sit ABΓ data Ellipſis, cujus Axis major AΓ & latus rectum AΔ. Conus autem rectus datus ſit EZK; & ſecundum rectam AΓ normaliter, ſuper planum in quo eſt ſectio ABΓ, erigatur planum, & in eo ſuper baſin AΓ deſcribatur arcus circuli qui capiat angulum æqualem angulo ZEK, ut arcus AΘΓ: & biſecetur hic arcus in puncto Θ, & è puncto Θ educatur recta ΘIΛ, ita producenda ut ΘΛ ſit ad ΛI ſicut AΓ ad AΔ. Pari modo ducatur recta ΘΞ in eadem ratione dividenda in puncto N. Jungantur AI, IΓ, ac ipſi AΓ parallela ducatur IΠ; ipſique ΘΛ parallela ſit AΠ, *occur-*

rens ipſi ΙΓ *in* Μ: ac fiat Conus cujus Apex ſit Ι, & Baſis circulus cujus diameter eſt ΑΜ. Dico hunc Conum ſimilem eſſe Cono ΕΖΚ, ac à ſectione ΑΒΓ contineri.

Qooniam enim angulus ΘΙΓ æqualis eſt angulo ΘΑΓ, utpote in eodem arcu; idemque æqualis eſt angulo ΙΜΑ, ob parallelas ΘΑ, ΑΜ; erit igitur angulus ΘΑΓ æqualis angulo ΙΜΑ: angulus autem ΜΙΑ æqualis eſt angulo ΑΘΓ: reliquus igitur ΙΑΜ reliquo ΘΓΑ æqualis eſt, ac triangula ΑΙΜ, ΑΘΓ ſimilia. Triangulum autem ΑΘΓ ſimile eſt triangulo æquicruri ΕΖΚ; adeoque triangulum ΑΜΙ etiam æquicrure eſt ac ſimile triangulo ΕΖΚ: Conus igitur cujus Apex eſt Ι, ac Baſis circulus cujus diameter eſt ΑΜ, ſimilis eſt Cono ΕΖΚ; & planum in quo eſt ſectio ΑΒΓ producet in hoc Cono Ellipſin cujus Axis major eſt ΑΓ; & factum eſt ut ΑΓ ad ΑΔ ita ΘΑ ad ΑΙ, ſive rectangulum ΘΑΙ ad quadratum ex ΑΙ. Sed rectangulum ΘΑΙ æquale eſt rectangulo ΓΑΛ; quare ΓΑ eſt ad ΑΔ ſicut rectangulum ΓΑΛ ad quadratum ex ΑΙ. Eſt autem quadratum ex ΓΑΛ ad quadratum ex ΑΙ ut quadratum ex ΠΙ ad rectangulum ΑΠΜ, ob parallelogrammum ΠΛΑΙ: quare ΓΑ eſt ad ΑΔ ut quadratum ex ΙΠ ad rectangulum ΑΠΜ. Sed ΑΓ eſt diameter tranſverſa, ergo ΑΔ (per 13^{am} primi) eſt latus rectum ſectionis in Cono ΑΙΜ genitæ. Eſt etiam latus rectum ſectionis datæ ΑΒΓ; adeoque ſectio illa (per ſecundam hujus) æqualis eſt ſectioni ΑΒΓ. Sectio igitur ΑΒΓ continet Conum jam deſcriptum.



Pari modo demonſtrabitur eandem continere Conum alium cujus Apex eſt Ν, ac latera rectæ ΑΝ, ΝΓ. Neque continetur ab hac ſectione Conus aliquis tertius Cono ΕΖΚ ſimilis, cujus Apex fuerit ad eaſdem partes plani ſectionis. Nam, ſi fieri poſſit ut contineat Conum alium, demonſtrabitur, eo quo in præcedentibus modo, quod, ſi erigatur ad angulos rectos ſuper planum ſectionis, ſecundum Axem ejus, planum aliquod, communis interſectio horum planorum eſſet ſectionis Axis major; ac quemadmodum demonſtravimus de Hyperbolâ in Prop. præced. reperiretur Apex Coni in arcu ΑΘΓ. Sit autem ille in puncto Ο, ac ſint latera Coni ΟΑ, ΟΗ. Juncta ΘΟ producatur ad Χ, ipſique ΘΧ parallela ducatur ΑΡ, ipſi vero ΑΓ recta ΟΡ: erit igitur triangulum ΟΑΗ æquicrure, ac quadratum ex ΟΡ erit ad rectangulum ΑΡΗ ſicut ΑΓ ad ΑΔ. Sed quadratum ex ΟΡ eſt ad rectangulum ΑΡΗ ſicut rectangulum ΓΧΑ ad quadratum ex ΟΧ, propter parallelogrammum ΟΡΑΧ; rectangulum autem ΓΧΑ æquale eſt rectangulo ΘΧΟ, *ob circulum*: adeoque ΓΑ eſt ad ΑΔ ſicut rectangulum ΘΧΟ ad quadratum ex ΟΧ, hoc eſt ut ΘΧ ad ΧΟ. Demonſtravimus autem ΓΑ eſſe ad ΑΔ ſicut ΘΑ ad ΑΙ; quare ΘΧ erit ad ΧΟ ſicut ΘΑ ad ΑΙ; quod quidem impoſſibile eſt. Fieri igitur nequit ut tres Coni Cono ΕΖΚ ſimiles contineantur ab hac ſectione ΑΒΓ. Q. E. D.

ΠΑΠΠΟΥ

ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ
ΛΗΜΜΑΤΑ
ΕΙΣ ΚΩΝΙΚΩΝ ΤΟ Ζ'. ΚΑΙ Η'.
ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΠΕΡΓΑΙΟΥ.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA
IN VII. ET VIII. LIBRUM CONICORUM
APOLLONII PERGÆI.

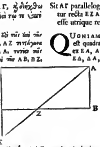
ΛΗΜΜΑ α'.

Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΖΑ. ὅτι τὸ ὑπὸ ΕΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ ΖΒΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΓΔΕ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΖ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΑ, ΑΖ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΔ, ΔΑ, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΔ, ΒΓ, καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ, τουτέστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΒΖ τετραγώνοις· [ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ ΒΖ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ ΕΑΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΒΑ, ΑΖ, τὸ δ' ἀπὸ ΓΒ, ΓΖ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ ΕΔΓ καὶ τοῦ δὶς ὑπὸ ΖΒΓ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ ΒΔ, ΒΓ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΒΖ τετραγώνοις] λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΒΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΕΔ, ΔΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΖΒ, ΒΓ· καὶ τὸ ἅπαξ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν ΕΔΓ καὶ τῷ ὑπὸ ΖΒΓ.

LEMMA I.

Sit ΑΓ parallelogrammum rectangulum, ac ducatur recta ΕΖΑ. dico rectangulum ΕΑΖ æquale eſſe utrique rectangulo ΖΒΓ & ΓΔΒ ſimul.



Quoniam enim quadratum ex ΕΖ æquale eſt quadratis ex ΕΓ, ΓΖ ſimul, ac quadrata ex ΕΑ, ΑΖ ſimul æqualia ſunt quadratis ex ΕΔ, ΔΑ, hoc eſt, quadratis ex ΒΔ, ΒΓ, una cum quadratis ex ΑΒ, ΒΖ ſimul, hoc eſt quadratis ex ΓΔ, ΕΖ. [Sed quadratum ex ΕΖ (per 7. 2[di] El.) una cum duplo rectangulo ſub ΕΑΖ æquale eſt utrique quadrato ex ΕΑ, ΑΖ; quadrata vero ex ΓΕ, ΓΖ una cum duplo rectanguli ſub ΕΔΓ & duplo rectanguli ΖΕΓ æqualia ſunt quadratis ex ΕΔ, ΕΓ & ex ΓΔ, ΒΖ] reliquum igitur nempe duplum rectanguli ΕΑΖ æquale erit duplo rectanguli ΒΔΓ una cum duplo rectanguli ΖΒΓ: quare rectangulum ΒΑΖ æquale eſt rectangulis ΒΔΓ, ΖΕΓ ſimul ſumptis.

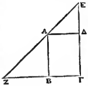
ΛΗΜΜΑ β'.

Παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΑΖ. ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΓΒΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΕΑΖ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΖ, ἔστι δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΑ, ΑΖ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΔ, ΔΓ, ΓΒ, ΒΖ· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΑΖ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΔΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΖΒΓ· καὶ τὸ ἅπαξ ἄρα τῷ ἅπαξ.

LEMMA II.

Sit ΑΓ parallelogrammum rectangulum ac ducatur ΕΑΖ. dico rectangulum ΕΔΓ una cum rectangulo ΓΒΖ æquale eſſe rectangulo ΕΑΖ.



Quoniam enim quadratum ex ΕΕ æquale eſt quadratis ex ΕΓ, ΓΖ ſimul, quadrata vero ex ΕΑ, ΑΖ ſimul æqualia ſunt quadratis ex ΕΔ, ΔΓ, ΓΒ, ΒΖ ſimul: duplum igitur rectanguli ΕΑΕ æquale erit duplo rectanguli ΕΔΓ una cum duplo rectanguli ΖΒΓ; ac proinde rectangulum ΕΑΖ ſemel æquale eſt utrique rectangulo ΕΔΓ, ΖΒΓ.

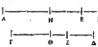
ΛΗΜΜΑ γ'.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ, καὶ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΕΒ τῷ ὑπὸ ΓΖΔ, καὶ ἔστω μείζονα τμήματα αἱ ΑΕ, ΓΖ. ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΕ τῆς ΓΖ.

LEMMA III.

Sit ΑΒ major quam ΓΔ, & rectangulum ΑΕΒ æquale rectangulo ΓΖΔ, ac ſint ΑΕ, ΓΖ utriuſque portiones majores. dico majorem eſſe ΑΕ quam ΓΖ.

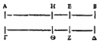
BISECENTUR totæ A B, Γ Δ in punctis H, Θ: major itaque eſt H B quam Δ Θ, ac quadratum ex H B majus quadrato ex Δ Θ. verum rectangulum A E B æquale eſt rectangulo Γ Z Δ; majus igitur eſt quadratum ex H B quadrato ex Θ B, ac proinde H E major quam Θ B. eſt autem A H major quam Γ Θ; tota igitur A E totâ Γ Z major eſt.



ΤΕΤΜΗΣΘΩΣΑΝ ὅλαι αἱ ΑΒ, ΓΔ δίχα τοῖς Η, Θ σημείοις· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ τῆς ΔΘ· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΘ τετραγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΕΒ ἴσον τῷ ὑπὸ ΓΖΔ· καὶ τὸ ἀπὸ ΗΒ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΘΖ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ τῆς ΘΖ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΗ μείζων τῆς ΓΘ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒ ὅλης τῆς ΓΖ μείζων ἐστί.

LEMMA IV.

Sit rectangulum Δ E B æquale rectangulo Γ Z Δ, æqualibus exiſtentibus rectis A B, Γ Δ. dico majora ſegmenta A E, Γ Z eſſe æqualia.



HOC autem eodem modo manifeſtum erit, biſectis rectis A B, Γ Δ in punctis H, Θ, &c.

ΛΗΜΜΑ δ'.

Ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΕΒ τῷ ὑπὸ ΓΖΔ, ἴσων οὐσῶν τῶν ΑΒ, ΓΔ. ὅτι τὰ μείζονα τμήματα τὰ ΑΕ, ΓΖ ἴσα ἐστί.

ΤΕΤΜΗΣΘΩΣΑΝ γὰρ αἱ ΑΒ, ΓΔ δίχα τοῖς Η, Θ, καὶ τὰ ἑξῆς.

LEMMA V.

Sit A B major quam Γ Δ; B E vero minor quam Δ Z; exiſtente A B majore quam B E, ac Γ Δ quam Δ Z. dico exceſſum quo A B ſuperat B E majorem eſſe exceſſu quo Γ Δ ſuperat Δ Z.

QUONIAM enim A B major eſt quam Γ Δ, major erit exceſſus ipſius A B ſupra B B exceſſu quo Γ Δ ſuperat eandem B E. major autem eſt exceſſus ipſius Γ Δ ſupra E B quam ſupra Δ B, quia E B minor eſt quam Δ Z: quocirca exceſſus ipſius A B ſupra B B multo major erit exceſſu quo Γ Δ ſuperat Δ Z.



ΛΗΜΜΑ ε'.

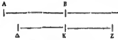
Ἔστω μὲν μείζων ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΒΕ τῆς ΔΖ, οὔσης μείζονος τῆς μὲν ΑΒ τῆς ΒΕ, τῆς δὲ ΓΔ τῆς ΔΖ· ὅτι ἡ τῶν ΔΒ, ΒΕ ὑπεροχὴ μείζων ἐστὶ τῆς τῶν ΓΔ, ΔΖ ὑπεροχῆς.

ΕΠΕΙ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΓΔ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ τῶν ΑΒ, ΒΕ ὑπεροχὴ τῆς τῶν ΓΔ, ΒΕ ὑπεροχῆς. ἀλλὰ ἡ τῶν ΓΔ, ΕΒ μείζων τῆς τῶν ΓΔ, ΔΖ ὑπεροχῆς, ἐλάσσων γάρ ἐστιν ἡ ΕΒ τῆς ΔΖ· ὥστε ἡ τῶν ΑΒ, ΒΕ ὑπεροχὴ πολλῷ μείζων ἐστὶ τῆς τῶν ΓΔ, ΔΖ ὑπεροχῆς.

LEMMA VI.

Sit AB ipſi B Γ æqualis, uti Δ K ipſi K Z: dico rectangulum ſub A Γ, Δ Z quadruplum eſſe rectanguli ſub A B, Δ K.

QUONIAM enim Γ A dupla eſt ipſius A B, ſumptâ in communem altitudinem Δ K, erit rectangulum ſub Γ A, Δ K duplum rectanguli ſub A B, Δ K. rurſus quoniam Δ B dupla eſt ipſius B K, ſub communi altitudine A Γ, fiet rectangulum ſub A Γ, Δ B duplum rectanguli ſub A Γ, Δ K: ſed & rectangulum ſub A Γ, Δ K duplum eſt rectanguli ſub A B, Δ K: proinde rectangulum ſub A Γ, Δ B quadruplum eſt facti ſub A B, Δ K.



ΛΗΜΜΑ ϛ'.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΚ τῇ ΚΖ· ὅτι τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΔΖ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΔΚ.

ΕΠΕΙ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΓΑ τῆς ΑΒ, κοινὸν ὕψος ἡ ΔΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΑ, ΔΚ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΔΚ. πάλιν ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΖ τῆς ΖΚ, κοινὸν ὕψος ἡ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ, ΔΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΓ, ΔΚ. ἀλλὰ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΔΚ τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΔΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ, ΔΖ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΔΚ.

LEMMA VII.

Sit ut A B ad B Γ ita Δ K ad K Z, & ut AB ad B H ita Δ K ad K Θ. dico rectangnlum ſub A B H eſſe ad rectangulum ſub A H Γ ſicut rectangulum Δ K Θ ad rectangulum Z Θ Δ.

ΛΗΜΜΑ ζ'.

Ἔστω ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΚΖ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΚΘ. ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘΔ.

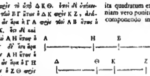
NAM cum A B eſt ad B H ſicut Δ K ad K Θ, per converſionem rationis B A erit ad A H ſicut K Δ ad Δ Θ; adeoque quadratum ex B A ad quadratum ex A H ſicut quadratum ex Δ K ad quadratum ex Δ Θ. ſed ut quadratum ex A B ad rectangulum A B H ita quadratum ex Δ K ad rectangulum Δ K Θ: erit igitur ut quadratum ex A H ad rectangulum A B H

ΕΠΕΙ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ οὕτως ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΚΘ, ἀναστρέψαντι ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΗ οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς τὴν ΔΘ· ὥστε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΚΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΗ

οὕτω

Digitized by Google

ἔστω τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΚΘ. ἐπεὶ δὲ ὑπόκειται ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΔΚ πρὸς ΚΖ, ἀνάπαλιν καὶ συνθέντι ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΔΚ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΗ οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς τὴν ΔΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς ΔΘ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΑΗ οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς ΘΔ, καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΗ οὕτω τὸ ὑπὸ ΖΘΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΘ. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΗ οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΚΘ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΒΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΓ οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΚΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΘΔ.

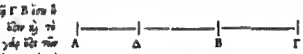


ita quadratum ex ΑΘ ad rectangulum ΔΚΘ. quoniam vero ponitur ΑΒ eſſe ad ΒΓ ſicut ΔΚ ad ΚΖ, componendo inverſe erit ΓΑ ad ΑΒ ſicut ΔΖ ad ΔΚ eſt autem ΒΑ ad ΑΗ ſicut ΚΔ ad ΔΘ: ex æquo igitur ΓΑ eſt ad ΑΗ ſicut ΖΔ ad ΔΘ, ac proinde dividendo ΓΗ erit ad ΗΑ ſicut ΖΘ ad ΘΔ: rectangulum igitur ΑΗΓ erit ad quadratum ex ΑΗ ſicut rectangulum ΖΘΔ ad quadratum ex ΔΘ. ſed [per jam oſtenſa] quadratum ex ΑΗ eſt ad rectangulum ΑΒΗ ut quadratum ex ΔΘ ad rectangulum ΔΚΘ; ex æquo igitur rectangulum ΑΒΗ erit ad rectangulum ΑΗΓ ſicut rectangulum ΑΚΘ ad rectangulum ΖΘΔ.

ΛΗΜΜΑ η'.

Εστω δοθέντα συναμφότερα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ δοθεῖσα ἡ τῶν αὐτῶν ὑπεροχή. ὅτι δοθεῖσά ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Κείσθω γὰρ τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΒΔ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑΔ· ὑπεροχὴ γάρ ἐστι τῶν ἀπὸ ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων. ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ ΓΑΔ δοθέν ἐστι, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑΔ δοθέν· δοθὲν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΓΑ, ΑΔ, ὥστε δοθεῖσά ἐστι συναμφότερος ἡ ΓΑ, ΑΔ. καὶ ἔστιν αὐτῆς ἡμίσεια ἡ ΒΑ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ· ὥστε καὶ ἡ ΒΓ δοθεῖσά ἐστιν.



LEMMA VIII.

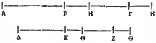
Datâ ſummâ quadratorum ex ΑΒ & ΒΓ, una cum differentia eorundem. dico utramque ex ipſis ΑΒ, ΒΓ datam eſſe.

PONATUR enim ΒΔ ipſi ΓΒ æqualis, ac datum erit rectangulum ΓΑΔ, quod nempe [per 6. 2.] differentia eſt quadratorum ex ΑΒ, ΒΓ; dato autem rectangulo ΓΑΔ ejuſdem duplum quoque datur, ac proinde (per 10. 2.) datum eſt quadratum ex ΓΑ, ΑΔ ſimul ſumptâ adeoque & ſumma ipſarum ΓΑ, ΑΔ data eſt. hujus vero dimidia eſt recta ΒΑ; quare ΒΑ data eſt, ac proinde ΒΓ quoque datur.

ΛΗΜΜΑ θ'.

Εστω ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ ἴση, ἡ δὲ ΔΚ τῇ ΚΖ, ἔτι δὲ ἔστω ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΘ. ὅτι γίνεται ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΘΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΖΘ.

Επεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΔ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΘ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΘΚ. ἀλλὰ καὶ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ οὕτω τὸ ἀπὸ ΔΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ οὕτω τὸ ἀπὸ ΚΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΖΘ· ἔσται ἄρα δι' ἴσου ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΘΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΖΘ.



LEMMA IX.

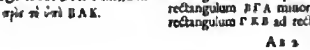
Sit ΑΒ ipſi ΒΓ æqualis, ut & ΔΚ ipſi ΚΖ; ſit etiam ut ΓΒ ad ΒΗ ita ΖΚ ad ΚΘ. dico rectangulum ΑΗΒ eſſe ad rectangulum ΒΓΗ ſicut rectangulum ΔΘΚ ad rectangulum ΚΖΘ.

QUONIAM enim ΓΒ eſt ad ΒΑ ſicut ΖΚ ad ΚΔ, atque etiam ΓΒ eſt ad ΒΗ ſicut ΖΚ ad ΚΘ; erit igitur ut quadratum ex ΑΗ ad rectangulum ΑΗΒ ita quadratum ex ΔΘ ad rectangulum ΔΘΚ. ſed ut quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΒΓ ita quadratum ex ΔΘ ad quadratum ex ΚΖ; & ut quadratum ex ΒΓ ad rectangulum ΒΓΗ ita quadratum ex ΚΖ ad rectangulum ΚΖΘ: ex æquo igitur erit ut rectangulum ΑΗΒ ad rectangulum ΒΓΗ ita rectangulum ΔΘΚ ad rectangulum ΚΖΘ.

ΛΗΜΜΑ ι'.

Εστω ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΒΚ. ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΚ.

Επεὶ γὰρ ἴση μέν ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἐλάσσων δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΒΚ· ἡ ΓΔ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΑΚ· ὥστε καὶ ἡ ΓΚ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΔ· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΒ τοῦ ὑπὸ ΓΚΒ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ΒΓΔ τοῦ ὑπὸ ΒΑΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΔ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΓΚΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΚ.



LEMMA X.

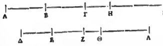
Sit ΑΒ ipſi ΒΓ æqualis, minor vero ſit ΒΔ quam ΒΚ. dico rectangulum ΑΔΒ ad rectangulum ΒΓΔ minorem habere rationem quam habet rectangulum ΓΚΒ ad rectangulum ΒΑΚ.

NAM cum ΑΒ æqualis eſt ipſi ΒΓ, ac ΒΔ minor quam ΒΚ, ΓΔ major erit quam ΑΚ, quemadmodum ΓΚ major eſt quam ΑΔ: minus igitur eſt rectangulum ΑΔΒ rectangulo ΓΚΒ, majus vero rectangulum ΒΓΔ rectangulo ΒΑΚ. quocirca rectangulum ΑΔΒ ad rectangulum ΒΓΔ minorem habet rationem quam rectangulum ΓΚΒ ad rectangulum ΒΑΚ.

LEMMA XI.

Reſtat jam præcedentium converſam demonſtrare. nempe exiſtentibus æqualibus A B, B Γ; Δ E, E Z; ac rectangulo A H B eandem rationem habente ad B Γ H quam habet rectangulum Δ Θ E ad rectangulum E Z Θ: fieri ut Γ B ad B H ita Z E ad E Θ.

PONATUR rectangulum ſub Γ H, A K æquale rectangulo ſub A H B, & rectangulum ſub Z Θ, Δ Λ æquale rectangulo Δ Θ E: eſt igitur ut rectangulum ſub A K, Γ H ad rectangulum B Γ H, hoc eſt A K ad B Γ, ita rectangulum ſub Δ Λ, Z Θ ad rectangulum E Z Θ, hoc eſt Δ Λ ad E Z. ſed ut Γ B ad B A ita Z E ad E Δ, quare rectæ A B, B Γ, Γ K ipſis Δ E, E Z, Z Λ eandem inter ſe ſervant rationem & ordinem, nempe B Γ eſt ad Γ K ſicut E Z ad Z Λ, ac proinde B Γ eſt ad B K ſicut Z E ad E Λ. quoniam vero rectangulum A H B æquale eſt rectangulo ſub A K, Γ H, auferatur utrumque è rectangulo ſub A K, H B, ac reſiduum rectangulum ſub H K, H B æquale erit rectangulo ſub A K, B Γ. erit igitur ut rectangulum ſub A K, B Γ ad quadratum ex B K ita rectangulum B H K ad idem quadratum ex B K. ſimili argumento rectangulum ſub Δ Λ, E Z erit ad quadratum ex E Λ ſicut rectangulum E Θ Λ ad quadratum ex E Λ. eſt autem rectangulum ſub A K, B Γ ad quadratum ex B K, ſicut rectangulum ſub Δ Λ, E Z ad quadratum ex E Λ, ob proportionalitatem partium pari ordine diſpoſitarum: ut igitur rectangulum B H K ad quadratum ex B K ita rectangulum E Θ Λ ad quadratum ex E Λ. eædem autem ſunt portiones B H, E Θ: erit igitur ut K B ad B H ita Λ E ad E Θ. ſed prius oſtenſum eſt B Γ eſſe ad B K ſicut Z E ad E Λ; ex æquo igitur B Γ eſt ad B H ſicut Z E ad E Θ.



ΛΗΜΜΑ ια'.

Ἔστω δὲ νῦν τὸ τοῖς προηγουμένοις ἀντίστροφον δεῖξαι. οὔσης ἴσης τῆς μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, τῆς δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ, καὶ ἔτι ὡς τὸ ὑπὸ ΑΗΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΘΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖΘ· δεῖξαι ὅτι γίνεται ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΘ.

ΚΕΙΣΘΩ τῷ μὲν ὑπὸ ΑΗΒ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΓΗ, ΑΚ, τῷ δὲ ὑπὸ ΔΘΕ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ ΖΘ, ΔΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΑΚ, ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ΑΚ πρὸς ΒΓ, οὕτω τὸ ὑπὸ ΔΛ, ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΖΘ, τουτέστιν ἡ ΔΛ πρὸς ΕΖ. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ οὕτως ἐστὶν ἡ ΖΕ πρὸς ΕΔ· αἱ ἄρα ΑΒ, ΒΓ, ΓΚ ταῖς ΔΕ, ΕΖ, ΖΛ ὁμοταγεῖς εἰσιν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, τουτέστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΖΛ· [καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΚ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΛ.] ἐπεὶ δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΚ, ΓΗ, ἀμφότερα ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΚ, ΗΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΚ, ΒΓ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΚ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ. διὰ ταῦτα δὴ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΛ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΛ, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΛ. καὶ ἔστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΚ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν ΔΛ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΛ, διὰ τὴν ἀναλογίαν τῶν ὁμοταγῶν τμημάτων· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΗΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ οὕτω τὸ ὑπὸ ΕΘΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΛ. καὶ ἔστι τὰ αὐτὰ τμήματα τὰ ΒΗ, ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΒ πρὸς ΒΗ οὕτως ἡ ΛΕ πρὸς ΕΘ. [ἀλλ' ἐδείχθη ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΚ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΛ· δι' ἴσου] ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΒΗ οὕτως ἐστὶν ἡ ΖΕ πρὸς ΕΘ.

LEMMA XII.

Sit A B ipſi B Γ uti & Δ K ipſi K Z æqualis; habeat autem B Γ ad Γ H majorem rationem quam K Z ad Z Θ. dico quod in primo caſu A H majorem habet rationem ad B Γ quam Δ Θ ad K Z: in ſecundo vero minorem.

QUONIAM enim B Γ majorem habet rationem ad Γ H quam K Z ad Z Θ; in primo caſu Γ B ad B H minorem habet rationem quam Z K ad K Θ; in ſecundo vero, majorem. adeoque A B ad B H minorem habet rationem quam Δ K ad K Θ: in ſecundo vero caſu majorem. quare H A in primo caſu majorem habet rationem ad A B quam Θ Δ ad Δ K, in ſecundo vero minorem. ſed ut A B ad B Γ ita Δ K ad K Z; ex æquo igitur, in primo caſu, A H majorem habet rationem ad B Γ quam Δ Θ ad K Z: in ſecundo vero caſu minorem.



ΛΗΜΜΑ ιβ'.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΚ τῇ ΚΖ, ἔστι δὲ ἡ ΒΓ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ. ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως, ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΚΖ· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας, ἐλάσσονα.

ΕΠΕΙ γὰρ ἡ ΒΓ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ [ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως ἡ ΓΒ πρὸς ΒΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ] ἡ ΖΚ πρὸς ΚΘ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας μείζονα· ὥστε καὶ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΚ πρὸς ΚΘ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας μείζονα· καὶ ἡ ΗΑ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΔ πρὸς ΔΚ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσονα. καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ ΔΚ πρὸς ΚΖ· δι' ἴσου ἄρα, ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης πτώσεως, ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ΔΘ πρὸς τὴν ΚΖ· ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας ἐλάσσονα.

LEMMA XIII.

Sint rurſus A B, B Γ æquales, ut & Δ K, K Z; habeat autem A H ad H B minorem rationem quam Δ Θ ad Θ K. dico B Γ majorem habere rationem ad Γ H quam K Z ad Z Θ.

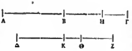
ΛΗΜΜΑ ιγ'.

Ἔστω πάλιν ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΚ τῇ ΚΖ, ἔστω δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ ἐλάσσονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΚ. ὅτι ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ.

ΕΠΕΙ

Digitized by Google

Ἐπεὶ γὰρ κατ' ἀναστροφὴν καὶ διαίρεσιν ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΑ, τουτέστιν ἡ ΒΓ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΔ, τουτέστι πρὸς τὴν ΚΖ· ἀναστρέψαντι καὶ διελόντι, ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ.



Quoniam enim per converſionem rationis & dividendo HB ad BA ſive BΓ majorem habet rationem quam ΘK ad KΔ, hoc eſt ad KZ: per converſionem rationis & dividendo, BΓ majorem habet rationem ad ΓH quam KZ ad ZΘ.

ΛΗΜΜΑ ιδ'.

Ἔστω ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ, καὶ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΒ μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΕ· ὅτι ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΖ.

LEMMA XIV.

Sint AB, BΓ æquales, uti & ΔE, EZ; habeat autem AH ad HB majorem rationem quam ΔΘ ad ΘE. dico BH majorem habere rationem ad HΓ quam EΘ ad ΘZ.

Ἐπεὶ γὰρ διαιροῦντι ἡ ΑΒ, τουτέστιν ἡ ΒΓ, πρὸς τὴν ΒΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΔΕ, τουτέστιν ἡ ΕΖ, πρὸς τὴν ΕΘ· ἀναστρέψαντι καὶ κατὰ διαίρεσιν ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΖ.



Dividendo enim AB ſive BΓ majorem habet rationem ad BH quam ΔE ſive EZ ad EΘ: per converſionem rationis igitur ac dividendo BH ad HΓ minorem habet rationem quam EΘ ad ΘZ.

His ſubjungere liceat Lemmata nonnulla manifeſtò aſſumpta in demonſtrationibus hujus Libri ſeptimi, quæ propterea eidem præfixit Abdolmelec Schirazita *Author Epitomes Conicorum* Apollonii Arabicè *ſcripta.*

LEMMA I.

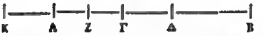
Si dividatur AB utcunque in punctis Γ, Δ; erit quadratum ex AB, BΓ ſimul æquale quadruplo rectanguli ſub AB, ΓΔ ſimul ſumptis & BΔ, una cum quadrato ex AΔ, ΔΓ ſimul.



Fiat BK ipſi BΓ æqualis, ac ΔZ ipſi ΔΓ, & erit ZK duplum ipſius BΔ. Biſecetur KZ in H, ac erit [per 8. II. El.] quadratum ex AK ſive ex AB, BΓ ſimul, æquale quadruplo rectanguli AHZ, hoc eſt quadruplo rectanguli ſub AB, ΔΓ ſimul & BΔ, una cum quadrato ex AZ, hoc eſt quadrato ex AΔ, ΔΓ ſimul.

LEMMA II.

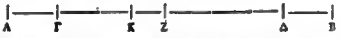
Si dividatur recta AB utcunque in punctis Γ, Δ; erunt quadrata ex AB, BΓ ſimul ſumpta æqualia quadratis ex AΔ, ΔΓ ſimul, una cum duplo rectangulo ſub AB, ΔΓ ſimul & BΔ.



Quoniam quadrata ex AB, BΓ [per 7. II. El.] æqualia ſunt duplo rectangulo ABΓ una cum quadrato ex AΓ, ac quadrata ex AΔ, ΔΓ [per eandem] æqualia ſunt duplo rectangulo AΔΓ cum quadrato ex AΓ: ob utrinque commune quadratum ex AΓ, erit exceſſus quadratorum ex AB, BΓ ſupra quadrata ex AΔ, ΔΓ æqualis exceſſui dupli rectanguli ABΓ ſupra duplum rectangulum AΔΓ. Biſecetur AΓ in Z, ac fiat AK ipſi ΔΓ æqualis, & erit [per 6. II.] exceſſus dupli rectanguli ABΓ ſupra duplum rectangulum AΔΓ æqualis exceſſui quo duplum quadrati ex BZ ſuperat duplum quadrati ex ΔZ, hoc eſt, duplo rectanguli KBΔ. ſed KB æqualis eſt utriſque BB, ΓΔ: quare quadrata ex AB, BΓ æqualia ſunt quadratis ex AΔ, ΔΓ una cum duplo rectangulo ſub AB, ΓΔ ſimul & BΔ.

LEMMA III.

Diviſâ rectâ AB in punctis Γ, Δ, ita ut AΓ, ΔB fuerint æquales; ſi ſumatur in ΓΔ punctum K, erunt quadrata ex AΔ, ΔB æqualia quadratis ex AK, KB una cum duplo rectanguli ΓKΔ.

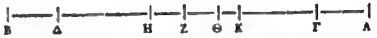


Si dividatur ΔΓ bifariam in K, res manifeſta eſt. Sin ſecus fuerit, dividatur bifariam in Z. Quoniam vero AB diviſa eſt inæqualiter in Δ, æqualiter vero in Z; erunt quadrata ex AΔ, ΔB [per 9. II.] æqualia duplo quadratorum ex AZ, ZΔ. Sed duplum quadrati ex ZΔ [per 5. II.] æ-

quale eſt duplo rectangulo ΓKΔ una cum duplo quadrato ex ZK, ob ΓΔ æqualiter diviſum in Z & inæqualiter in K: quadrata igitur ex AΔ, ΔB æqualia ſunt duplo quadratorum ex AZ, ZK una cum duplo rectangulo ΓKΔ. Sed duplum quadratorum ex AZ, ZK [per 9. II.] æquale eſt quadratis ex AK, KB: quadrata igitur ex AΔ, ΔB æqualia ſunt quadratis ex AK, KB una cum duplo rectangulo ΓKΔ.

LEMMA IV.

Si dividatur recta AB in punctis Γ, Δ ita ut AΓ, BΔ ſint æquales, ac biſecetur ΓΔ in Z, ſecetur autem utcunque in K; ſecta vero ſit ZΔ in H ita ut KZ major ſit quam ZH: erunt quadrata ex AH, HB una cum rectangulo ſub KH & duplâ differentiâ ipſarum HB, KA æqualia quadratis ex AK, KB.



FIAT ΘZ ipſi ZH æqualis, & erit ΘA ipſi BH æqualis, ac ΘK erit differentia inter HZ, ZK; eademque differentia eſt ipſarum HB, KA: erit igitur exceſſus quadratorum ex AK & KB ſupra quadrata ex AH, HB [per 9. II.] æqualis duplæ differentiæ quadratorum ex KZ, ZH. Hæc autem [per 6. II.] æqualis eſt duplo rectangulo ſub HK, KΘ, ob HZ ipſi ZΘ æqualem & ΘK adjectam: quadrata igitur ex AH, HB una cum duplo rectanguli ſub HK, KΘ æqualia ſunt quadratis ex AK, KB.

LEMMA V.

Iiſdem poſitis, erit quadruplum rectanguli BZΘ, una cum duplo rectangulo KΘB & quadruplo quadrati ex ΘZ, æquale duplo rectanguli ſub KZ, ZΘ ſimul & ΘB.

QUADRUPLUM enim rectanguli BZΘ una cum quatuor quadratis ex ZΘ [per 3. II.] æquale eſt quadruplo rectanguli BΘZ: adjiciatur utrinque duplum rectanguli KΘB; fiet ſumma æqualis duplo rectangulo ſub ZK, ΘB una cum duplo rectanguli BΘZ, hoc eſt, rectangulo ſub KZ, ZΘ ſimul & duplo ipſius ΘB.

LEMMA VI.

Iiſdem poſitis, erit etiam duplum rectanguli AΘB una cum quadruplo quadrati ex ΘZ æquale quadratis ex AΘ, ΘB.

QUONIAM enim AΘ ipſi HB æqualis eſt, erit rectangulum AΘB æquale rectangulo ΘBH; ac quadruplum quadrati ex ΘZ æquale eſt quadrato ex HΘ, ob ΘZ ipſi ZH æqualem: duplum igitur rectanguli ſub ΘB, BH, hoc eſt rectangulum AΘB una cum quadrato ex HΘ, æquale eſt [per 7. II.] quadratis ex ΘB & BH, hoc eſt quadratis ex AΘ, ΘB.

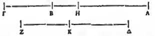
LEMMA VII.

Erit etiam duplum rectanguli ſub AB, ΓZ æquale differentiæ quadratorum ex AΓ, ΓB.

QUONIAM duplum rectanguli AB, ΓZ æquale eſt duplo rectanguli ſub BΓ, ΓZ, ſive rectangulo BΓΔ (ob ΓZ ipſi ZΔ æqualem) una cum duplo rectanguli AΓZ ſive rectangulo BΔΓ; erit rectangulum BΓΔ una cum rectangulo BΔΓ, ſive duplum rectanguli BΔΓ una cum quadrato ex ΔΓ, æquale rectangulo ſub BA, ΓZ: rectangulum igitur ſub BA, ΓZ [per 4. II.] æquale eſt exceſſui quo quadratum ex BΓ ſuperat quadratum ex BΔ ſive ex AΓ.

LEMMA VIII.

Si ratio ipſius AB ad BΓ major fuerit ratione ΔK ad KZ, [exiſtente AB majore quam BΓ & ΔK quam KZ] erit ratio quadrati ex AΓ ad quadrata ex AB & BΓ ſimul minor ratione quadrati ex ΔZ ad quadrata ex ΔK, KZ ſimul.



FIAT AH ad HΓ ſicut ΔK ad KZ, & erit AΓ ad ΓH ſicut ΔZ ad ZK; pariterque AΓ erit ad AH ſicut ΔZ ad ΔK: quocirca quadratum ex AΓ erit ad quadrata ex AH & ΓH ſicut quadratum ex ΔZ ad quadrata ex ΔK, KZ ſimul ſumpta. Sed ratio quadrati ex AΓ ad quadrata ex AB, BΓ minor eſt ratione quadrati ex AΓ ad quadrata ex AH, HΓ; quia quadrata ex AB, BΓ majora ſunt quadratis ex AH, HΓ: erit igitur ratio quadrati ex AΓ ad quadrata ex AB, BΓ minor ratione quadrati ex ΔZ ad quadrata ex ΔK, KZ.

APOL-

APOLLONII PERGÆI CONICORUM

LIBER SEPTIMUS.

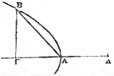
Apollonius Attalo S. P.

MITTO tibi una cum his librum Septimum de Conicis Sectionibus. In hoc autem libro inſunt plurimæ Propoſitiones novæ, diametros Sectionum figuraſque ſuper eas factas ſpectantes: quæ quidem omnes utilitatem ſuam habent in multis Problematum generibus, præcipueque in eorum διορισμοῖς. Horum autem plura occurrunt exempla in Problematis Conicis determinatis, à nobis reſolutis & demonſtratis in Octavo libro; qui loco appendicis eſt, quemque tibi quantocyus fieri poſſit mittendum curabo. Vale.

PROPOSITIO I.

SI in Axe Parabolæ ſupra verticem Sectionis producto ponatur recta æqualis lateri recto; ac ducatur recta quælibet à Vertice ad Sectionem, de cujus extremitate demiſſa ſit normalis ad Axem: poterit recta ſic ducta rectangulum contentum ſub interceptâ inter Verticem & normalem & interceptâ inter normalem & punctum ad quod productus eſt Axis.

Sit ΑΒ Parabola cujus Axis ΑΓ, & producatur ΑΓ ad Δ, ita ut ΑΔ æqualis ſit lateri recto: & de puncto Α ducatur utcunque ad ſectionem recta ΑΒ, & ſit ΒΓ Axi normalis. Dico quadratum ex ΑΒ æquale eſſe rectangulo ΔΓΑ.

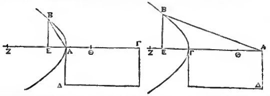


Quoniam enim ΑΓ eſt Axis ſectionis, & ΒΓ eidem normalis eſt, ac ΑΔ æqualis eſt lateri recto; erit quadratum ex ΒΓ (per 11^{am} primi) æquale rectangulo ΔΑΓ. Huic autem ſi adjiciatur quadratum ex ΑΓ, erunt quadrata ex ΑΓ, ΓΒ ſimul ſumpta æqualia rectangulo ΔΑΓ una cum quadrato ex ΑΓ, hoc eſt rectangulo ΔΓΑ. Sed quadrata ex ΑΓ, ΓΒ ſimul æqualia ſunt quadrato ex ΑΒ: quocirca quadratum ex ΑΒ æquale eſt rectangulo ΔΓΑ. Q. E D.

PROPOSITIO II.

SI dividatur Axis tranſverſus Hyperbolæ in ratione ejuſdem Axis ad latus ejus rectum, ita ut portio ea, quæ Axis termino alterutri adjacet, reſpondeat lateri recto; ac ſi ab eodem Axis termino ducatur recta ad punctum quodlibet in Sectione, à quo demittatur Axi normalis: erit quadratum rectæ ſic ductæ ad rectangulum ſub interceptis inter normalem & utramque Axis portionis lateri recto reſpondentis extremitatem, ſicut Axis tranſverſus ad reſiduam Axis partem. Vocetur autem Axis portio lateri recto reſpondens recta Homologa.

Sit Hyperbolæ Axis productus ΑΓΕ, figura autem ſectionis ſit ΓΔ; ac dividatur Axis ΑΓ in Θ, ita nt ΓΘ ſit ad ΘΑ ſicut ΓΑ ad ΑΔ ſive ad latus rectum: & ab Α ducatur utcunque recta ΑΒ, & demittatur ΒΕ normalis ad Axem. Dico quadratum ex ΑΒ eſſe ad rectangulum ΘΕΑ ſicut ΑΓ ad ΓΘ.



Fiat rectangulum ΑΕΖ æquale quadrato ex ΒΕ, ac erit rectangulum ΑΕΖ ad rectangulum ΑΕΓ ſicut quadratum ex ΒΕ ad rectangulum ΑΕΓ. At vero quadratum ex ΒΕ eſt ad rectangulum ΑΕΓ (per 12[am] primi) ſicut latus rectum ΑΔ ad Axem tranſverſum ΑΓ: quare rectangulum ΑΕΖ eſt ad rectangulum ΑΕΓ ſicut ΔΑ ad ΑΓ; ac proinde ΖΕ eſt ad ΕΓ ſicut ΔΑ ad ΑΓ, hoc eſt ſicut ΑΘ ad ΘΓ; ac componendo ΖΓ erit ad ΓΕ ſicut ΑΓ ad ΓΘ: nnde conſequitur ΖΑ eſſe ad ΘΕ ſicut ΑΓ ad ΓΘ. Sumptâ antem in communem altitudinem ΑΕ, erit rectangulum ΖΑΕ ad rectangulum ΘΕΑ in eadem ratione, ſive ut ΑΓ ad ΓΘ. Sed rectangulum ΖΑΕ æquale eſt quadrato ex ΑΒ; adeoque quadratnm ex ΑΒ eſt ad rectangulum ΘΕΑ ut ΑΓ ad ΓΘ. Q. E. D.

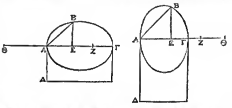
PROPOSITIO III.

SI Axis alteruter Ellipſeos producatur extra ſectionem, ita ut Axis auctus ejuſdemque pars extra ſectionem fuerint inter ſe ut Axis ipſe & latus ejus rectum inter ſe; & ab eo Vertice, cui contermina eſt portio illa quæ lateri recto reſpondet, ducatur recta ad punctum quodlibet in ſectione, de quo demittatur ad Axem normalis: erit quadratum ductæ ad rectangulum ſub interceptis inter normalem & utramque lateri recto reſpondentis rectæ extremitatem, ſicut Axis ſectionis ad portionem illam quæ Axi proportionalis eſt. Vocetur autem ea quæ lateri recto reſpondet recta Homologa.

Sit ſectio Ellipſis, cujus Axis ΑΓ ac figura ΓΔ; ſitque ΑΘ recta in Axe producto, ita ut ΓΘ ſit ad ΘΑ ſicut ΓΑ ad ΑΔ: &, ductâ ntcunque rectâ ΑΒ, demittatur ad Axem normalis ΒΕ. Dico quadratum ex ΑΒ eſſe ad rectangulum ΑΕΘ ut ΑΓ ad ΓΘ.

Fiat rectangulum ΑΕΖ æqnale quadrato ex ΒΕ: erit ıgitur rectangulum ΑΕΖ ad

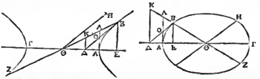
ad rectangulum AEΓ ut quadratum ex BE ad rectangulum AEΓ. Quadratum autem ex BE eſt ad rectangulum AEΓ (per 21^{mum} primi) ut latus rectum AΔ ad latus tranſverſum AΓ. Eſt igitur rectangulum AEZ ad rectangulum AEΓ ſicut ΔA ad AΓ, unde etiam ZE eſt ad EΓ ſicut AΔ ad AΓ ſive ut AΘ ad ΘΓ; ac dividendo ZΓ erit ad ΓE ſicut AΓ ad ΓΘ. *Summa autem vel differentia antecedentium eſt ad ſummam vel differentiam conſequentium in eadem ratione*; quare ZA erit ad EΘ ſicut AΓ ad ΓΘ; ac ſumptâ AE in communem altitudinem, erit ut ZA ad EΘ ita rectangulum ZAE ad rectangulum AEΘ: eſt itaque AΓ ad ΓΘ ut rectangulum ZAE ad rectangulum AEΘ. Sed rectangulum ZAE æquale eſt quadrato ex AB. Quapropter quadratum ex AB eſt ad rectangulum AEΘ ſicut AΓ ad ΓΘ. Q. E. D.



PROPOSITIO IV.

SI tangat Hyperbolam vel Ellipſin recta quælibet ſectionis axi occurrens, ac ſi à puncto contactus ducatur ordinatim applicata, ut & è centro recta Tangenti parallela, æqualis vero ſemidiametro conjugatæ cum diametro illâ quæ per punctum contactûs ducitur: erit quadratum Tangentis ad quadratum ſemidiametri eidem parallelæ, ſicut intercepta inter ordinatim applicatam & punctum occurſûs axis & Tangentis, ad interceptam inter eandem ordinatim applicatam & centrum ſectionis.

Sit AΓ Axis Hyperbolæ vel Ellipſeos, cujus centrum Θ; tangat autem ſectionem recta BΔ in puncto B, & ſit BE ordinatim applicata ad diametrum ΓAE; ac ſit ΘH ipſi BΔ parallela, æqualis vero ſemidiametro conjugatæ cum diametro illâ quæ per puuctum contactûs B ducitur. Dico quadratum ex BΔ eſſe ad quadratum ex ΘH ſicut ΔE ad EΘ.



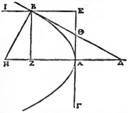
Per punctum B ducatur diameter BΘZ, ac ſint rectæ AΛ, ΔK ipſi BE parallelæ, & fiat recta quædam M ad BΔ ſicut OB ad BA: erit igitur recta M dimidium lateris recti, ſive illius juxta quam poſſunt ordinatim ductæ ad diametrum BΘ; rectangulis, quæ eidem adjacent, excedentibus quidem in Hyperbolà, *deficientibus vero in Ellipſi*, figuris ſimilibus conteutæ ſub duplo ipſius M & diametro ZB (uti conſtat ex 50um primi). Recta autem ΘH dimidium eſt diametri conjugatæ cum diametro ZB: erit igitur rectangulum ſub ΘB & M (per 15um primi & 20um ſecundi) æquale quadrato ex ΘH. Verum OB eſt ad BA ſicut M ad BΔ, hoc eſt ut BΔ ad BK; quare rectangulum ſub M & BK æquale eſt quadrato ex BΔ. Sed rectangulum ſub M & BK eſt ad rectangulum ſub M & BΘ ut BK ad BΘ: eſt igitur quadratum ex BΔ ad rectangulum ſub BΘ & M ſicut BK ad BΘ; hoc eſt ſicut

ΕΔ ad ΕΘ. Rectangulum autem ſub ΒΘ & Μ demonſtravimus æquale eſſe quadrato ex ΘΗ: quapropter quadratum ex ΒΔ eſt ad quadratum ex ΘΗ nt ΔΕ ad ΕΘ. Q. E. D.

PROPOSITIO V.

SI in Parabola ſumatur diameter quævis, à cujus vertice demittatur ad Axem normalis: erit recta illa juxta quam poterunt ordinatim applicatæ à ſectione ad diametrum illam ductæ, nempe latus rectum ſumptæ diametri, æqualis lateri recto Axis una cum quadrupla interceptæ inter normalem & Verticem principalem ſectionis.

Sit Parabolæ Axis ΑΗ, ac ſit ΒΙ aliqua alia è diametris ejus, ſitque ΑΓ ea juxta quam poſſunt ordinatim applicatæ ad Axem ΑΗ, ſive latus rectum Axis; ac de puncto Β demittatur ad Axem normalis ΒΖ. Dico rectas à ſectione ad diametrum ΒΙ ordinatim ductas, ſive ipſi ΒΔ ſectionis Tangenti in puncto Β parallelas, poſſe rectangula adjacentia rectæ ΑΓ qnadrupla ipſius ΑΖ auctæ.



Ducatur ΑΕ Axi normalis, ac producatur ΒΙ ad Ε; rectæ autem ΒΔ, ſectionem tangenti in puncto Β, ad rectos angulos inſiſtat recta ΒΗ. Erit igitur triangulum ΒΔΗ ſimile triangulo ΒΘΕ, adeoque ΒΘ ad ΒΕ erit nt ΗΔ ad ΔΒ; unde (per 49^am primi) ΔΗ erit dimidium lateris recti diametri ΒΙ. Sed rectangulum ſub ΔΖ, ΖΗ æquale eſt qnadrato ex ΒΖ, ob angulum ΔΒΗ rectum & ΒΖ perpendicularem; ac quadratum ex ΒΖ æquale eſt rectangulo ΓΑΖ: quare rectangulum ΔΖΗ æquale eſt rectangulo ΓΑΖ. Verum (per 35^am primi) recta ΔΖ dupla eſt ipſius ΑΖ, unde & ΑΓ dupla erit ipſius ΖΗ: quadrupla igitur ipſius ΑΖ dupla eſt rectæ ΔΖ. Quocirca ΑΓ una cum quadrupla ipſius ΑΖ ſimul, æqualis erit duplæ ipſarum ΔΖ, ΖΗ ſimul, ſive dnpla ipſius ΔΗ. Demonſtravimus autem ΔΗ dimidium eſſe lateris recti ad diametrum ΒΙ: latus igitur rectum ad diametrum ΒΙ æquale eſt ipſi ΑΓ, lateri recto Axis, una cum quadruplà ipſius ΑΖ. Q. E. D.

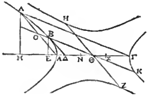
PROPOSITIO VI.

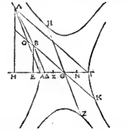
SI ponantur in Axe Hyperbolæ rectæ duæ, utrique Axis termino adjacentes, & illi quam Homologam *diximus æquales ſimiliterque ſitæ; ac ſi ducantur quælibet duæ ſectionis diametri conjugatæ, ut & à Vertice principali ad occurſum ſectionis recta ipſi diametro ὀρθία parallela; & de puncto occurſûs demittatur normalis ad Axem: erit potentià diameter tranſverſa ex his conjugatis ad diametrum ejus ὀρθίαν, ſicut intercepta inter normalem & terminum rectæ* Homologæ *Vertici remotiori* adjacentis *ad interceptam inter eandem normalem & terminum* Homologæ *Vertici propiori adjacentis: longitudine autem ratio diametri tranſverſæ ad latus ejus rectum, ſive ad eam juxta quam poſſunt ordinatim ductæ, hoc eſt diametro ὀρθία ſive ſecundæ parallelæ, eadem erit quam habent interceptæ modo dictæ inter ſe.*

Sit Hyperbolæ Axis ΓΑΜ, Axis autem tranſverſus ſectionis ΑΓ & centrum Θ; ſitque utraque ΑΝ, ΓΞ æqualis rectæ Homologæ, ac per punctum Θ ducantur diametri

metri conjugatæ ZH, BK; ipſique ZH parallela ſit AΔ, & ad Axem AM demittatur normalis AM. Dico quadratum diametri tranſverſæ BK eſſe ad quadratum diametri ὀρθίας ſive ſecundæ ZH ſicut ΞM ad MN.

Jungatur ΓA & è puncto B demittatur normalis BE, & ex eodem ducatur recta BΔ ipſi ZH parallela, quæ proinde ſectionem continget. Quoniam vero ΓΘ ipſi ΘA æqualis eſt, & AO ipſi OA; erit ΓA ipſi BΘ parallela: adeoqne ob ſimilia triangula, ΔE erit ad EΘ ſicut AM ad MΓ. Sed & Δa eſt ad EΘ (per 4^{tam} hujus) ſicut quadratum ex ΔB ad quadratnm ex ΘH. Cum autem, ob ſimilia triangula, quadratum ex ΘB eſt ad quadratum ex BΔ ut quadratum ex ΓA ad quadratum ex AΔ; ac quadratum ex BΔ eſt ad quadratum ex ΘH ſicut AM ad MΓ; componetur ratio quadrati ex Θa ad quadratum ex ΘH ex ratione quadrati ex ΓA ad quadratum ex AΔ & ratione AM ad MΓ. Sed ratio quadrati ex ΓA ad quadratum ex AΔ componitur ex rationibus quadrati ex ΓA ad rectangulum ΓMΞ, & rectanguli ΓMΞ ad rectangulum AMN, & rectanguli AMN ad quadratum ex AΔ. Compoſita eſt igitur ratio quadrati ex ΘB ad quadratum ex ΘH ex rationibus quadrati ex ΓA ad rectangulum ΓMΞ, & rectanguli ΓMΞ ad rectangulum AMN, & rectanguli AMN ad quadratum ex AΔ & ratione ipſius AM ad MΓ. Quadratum autem ex ΓA (per a^{dam} hujus) eſt ad rectangulum ΓMΞ ſicut AΓ ad AΞ; &, per ean-





dem, rectangulum AMN eſt ad quadratum ex AΔ ſicut ΓN ad AΓ. Verum ratio rectanguli ΓMΞ ad rectangulum AMN componitur ex ratione MΞ ad MN & ratione ΓM ad MA: ratio igitur quadrati ex ΘB ad quadratum ex ΘH componitur ex rationibus AΓ ad AΞ, ΓN ad AΓ, MΞ ad MN, ΓM ad MA, & ratione AM ad MΓ. Ratio antem ex his omnibus conflata æqualis eſt rationi MΞ ad MN. Nam ratio ΓN ad AΓ conjuncta cum ratione AΓ ad AΞ fit ratio ΓN ad AΞ; ac ΓN æqualis eſt ipſi AΞ: Ratio autem ΓM ad MA compoſita cum ratione AM ad MΓ, fit ratio ipſius MΓ ad ſeipſam. Quare ratio ex his omnibus compoſita æqualis erit rationi reliquæ, nempe rationi MΞ ad MN. Eſt igitur quadratnm ex ΘB ad quadratum ex ΘH ſicut MΞ ad MN; adeoque quadratum ex BK ad quadratnm ex ZH eſt ut MΞ ad MN. Porro quadratum ex BK (per 21^{mum} primi) eſt ad quadratum ex ZH, ſicut Ka ad rectam juxta quam poſſunt ductæ à ſectione ad diametrum KB, ipſi ZH parallelæ: erit igitur KB ad latus rectum ejus, ſive ad eam juxta quam poſſunt ordinatim ad eandem applicatæ, ſicut MΞ ad MN. Q. E. D.

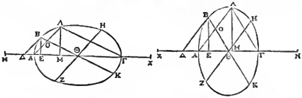
PROPOSITIO VII.

SI adjaceant utrique Axis Ellipſeos Vertici rectæ æquales illi quam Homologam *diximus, & habeantur in ſectione quælibet diametri duæ conjugatæ; & ſi ducatur de ſectionis Vertice recta alteri conjugatarum parallela, & ab occurſu ejus cum ſectione demittatur normalis ad Axem: erit potentiâ diameter ea cui non ducitur parallela ad alteram quæ ejuſdem conjugata eſt, ſicut intercepta*

cepta inter normalem & terminum rectæ Homologæ *Vertici alteri adjacentis ad interceptam inter eandem normalem & terminum* Homologæ *Vertici, à quo ducta eſt parallela, adjacentis: ſive fuerint* Homologæ *in Axe majore extra ſectionem, ſive in Axe minore ſuper Axem ipſum. Erit quoque diameter iſta ad eam juxta quam poſſunt ordinatim ductæ, ſive alteri diametro parallelæ, in ratione dictarum interceptarum.*

Sit Ellipſeos Axis ΑΓ, ac rectæ duæ Homologæ ΑΝ, ΓΞ; ſintque diametri duæ conjugatæ ΒΚ, ΖΗ. Ducatur recta ΑΛ diametro ΖΗ parallela, & de puncto in ſectione Λ demittatur normalis ad Axem, ut ΛΜ. Dico quadratum ex ΒΚ eſſe ad quadratum ex ΖΗ ſicut ΜΞ ad ΜΝ: & in eadem eſſe ratione ΚΒ ad rectam juxta quam poſſunt ordinatim applicatæ ad diametrum ΚΒ ſive ipſi ΖΗ parallelæ; nempe ΚΒ ad latus ejus rectum eſſe ut ΜΞ ad ΜΝ.

Jungatur ΓΛ & de puncto Β demittatur cathetus ad Axem ΒΕ, & per idem Β ducatur ΒΔ ipſi ΖΗ parallela, quæ proinde ſectionem continget. Quoniam autem ΓΘ ipſi ΘΑ æqualis eſt, & ΑΟ ipſi ΟΛ æqualis, erit ΓΛ ipſi ΒΘ parallela: unde, ob ſimilia triangula, ΔΕ erit ad ΕΘ ſicut ΑΜ ad ΜΓ. Sed & ΔΕ eſt ad ΕΘ (per 4[tam] hujus) ſicut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΘΗ; adeoque ΑΜ eſt ad ΜΓ ſicut quadratum ex ΒΔ ad quadratum ex ΘΗ. Quoniam vero, ob ſimilia triangula, quadratum ex ΒΘ eſt ad quadratum ex ΒΔ ſicut quadratum ex ΓΛ ad quadratum ex ΑΛ; ac quadratum ex ΒΔ eſt ad quadratum ex ΘΗ ſicut ΑΜ ad ΜΓ



erit quadratum ex ΒΘ ad quadratum ex ΘΗ in ratione compoſitâ ex ratione quadrati ex ΓΛ ad quadratum ex ΑΛ & ratione ΑΜ ad ΜΓ. Ratio autem quadrati ex ΓΛ ad quadratum ex ΑΛ componitur ex ratione quadrati ex ΓΛ ad rectangulum ΓΜΞ, & ratione rectanguli ΓΜΞ ad rectangulum ΑΜΝ, & ratione rectanguli ΑΜΝ ad quadratum ex ΑΛ: quare ratio quadrati ex ΒΘ ad quadratum ex ΘΗ componitur ex rationibus quadrati ex ΓΛ ad rectangulum ΓΜΞ, & rectanguli ΓΜΞ ad rectangulum ΑΜΝ, & rectanguli ΑΜΝ ad quadratum ex ΑΛ, una cum ratione ΑΜ ad ΜΓ. Eſt autem quadratum ex ΓΛ ad rectangulum ΓΜΞ (per tertiam hujus) ſicut ΑΓ ad ΑΞ; ac, per eandem, rectangulum ΑΜΝ eſt ad quadratum ex ΑΛ ſicut ΓΝ ad ΑΓ. Ratio autem rectanguli ΓΜΞ ad rectangulum ΑΜΝ componitur ex ratione ΓΜ ad ΑΜ & ΜΞ ad ΜΝ: quapropter ratio quadrati ex ΒΘ ad quadratum ex ΘΗ componitur ex rationibus ΑΓ ad ΑΞ, ΓΝ ad ΑΓ, ΓΜ ad ΑΜ & ΜΞ ad ΜΝ, & ex ratione ΑΜ ad ΜΓ. Eſt autem ratio ex his omnibus compoſita eadem ac ratio ΜΞ ad ΜΝ: nam ratio ΓΝ ad ΑΓ conjuncta cum ratione ΑΓ ad ΑΞ fit ratio ΓΝ ad ΑΞ, quæ quidem æqualitatis eſt; ac ratio compoſita ex ratione ΓΜ ad ΑΜ & ratione ΑΜ ad ΜΓ fit ratio ipſius ΓΜ ad ſeipſam: ratio igitur ex his omnibus compoſita erit ratio reliqua, nempe ΜΞ ad ΜΝ. Quocirca quadratum ex ΘΒ eſt ad quadratum ex ΘΗ ut ΜΞ ad ΜΝ. Quinetiam cum quadratum ex ΒΚ eſt ad quadratum ex ΖΗ ſicut ΒΚ ad illam juxta quam poſſunt rectæ ipſi ΖΗ parallelæ, à ſectione ad diametrum ΒΚ ductæ; erit ΒΚ ad rectam illam, nempe ad latus rectum ejus, ſicut ΜΞ ad ΜΝ. Q. E. D.

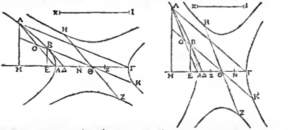
Hinc manifeſtum eſt, quod ſi normalis de puncto Λ cadat ſuper centrum ſectionis, diameter ΚΒ æqualis erit diametro ΖΗ, quia ΜΞ ipſi ΜΝ æqualis eſt.

PROPO-

PROPOSITIO VIII.

Iſdem poſitis quæ in Propoſitionibus ſextâ & ſeptimâ præcedentibus, tam in Hyperbolâ quam in Ellipſi. Dico quadratum Axis tranſverſi ΑΓ eſſe ad quadratum ex utraque ΒΚ, ΖΗ ſimul ſumptâ & in directum productâ, ut rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex utrâque ΜΞ & eâ quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ ſimul ſumptâ.

Fiat ΞΙ media proportionalis inter ipſas ΜΝ, ΜΞ. Jam quadratum ex ΑΓ eſt ad quadratum ex ΒΚ ſicut quadratum ex ΛΘ ad quadratum ex ΘΒ; quadratum autem ex ΛΘ (per 37um primi) æquale eſt rectangulo ΔΘΕ: quare quadratum ex ΑΓ eſt ad quadratum ex ΒΚ ſicut rectangulum ΔΘΕ ad quadratum ex ΘΒ. Rectangulum autem ΔΘΕ eſt ad quadratum ex ΘΒ ſicut rectangulum ΛΓΜ ad quadratum ex ΓΛ, propter rectas ΔΒ, ΒΘ ipſis ΛΑ, ΛΓ parallelas, *per Lemma* IX. *in Lib. ſecundum*: quapropter rectangulum ΛΓΜ eſt ad quadratum ex ΓΛ ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΚ. Sumatur ΓΜ in communem altitudinem, ac erit ut ΓΛ ad ΓΝ ita rectangulum ΛΓΜ ad rectangulum ΜΓΝ. Quadratum autem ex ΓΛ eſt ad rectangulum ΞΜΓ (per 2^{dam} & 3^{am} hujus) ſicut ΑΓ ad ΑΞ; ac ΓΝ ipſi ΑΞ eſt æqualis, quia rectæ ſunt Homologæ: rectangulum igitur ΛΓΜ eſt ad rectangulum ΜΓΝ ſicut quadratum ex ΓΛ ad rectangulum ΞΜΓ, ac permutando rectangulum ΛΓΜ erit ad quadratum ex ΓΛ ut rectangulum ΜΓΝ ad rectangulum ΓΜΞ.



Demonſtravimus autem rectangulum ΛΓΜ eſſe ad quadratum ex ΓΛ ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΒΚ; quare quadratum ex ΑΓ eſt ad quadratum ex ΒΚ ſicut rectangulum ΜΓΝ ad rectangulum ΓΜΞ ſive ut ΓΝ ad ΜΞ. At vero ut ΓΝ ad ΜΞ ita rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΞ; *adeoque quadratum ex* ΑΓ *eſt ad quadratum ex* ΑΚ *ut rectangulum ſub* ΓΝ, ΜΞ *ad quadratum ex* ΜΞ. Jam ex duabus Propoſitionibus præcedentibus conſtat quadratum ex ΒΚ eſſe ad quadratum ex ΞΗ ut ΞΜ ad ΜΝ; adeoque ΒΚ eſt ad ΖΗ ſicut ΞΜ ad ΞΙ mediam proportionalem inter ΞΜ & ΜΝ: unde ΒΚ erit ad ΒΚ, ΞΗ ſimul ſicut ΜΞ ad ΜΙ ſive ΜΞ, ΞΙ ſimul; ac quadratum ex ΒΚ erit ad quadratum ex ΒΚ, ΖΗ ſimul ſumptis ut quadratum ex ΜΞ ad quadratum ex ΜΙ. Verum jam oſtenſum eſt quadratum ex ΑΓ eſſe ad quadratum ex ΒΚ ſicut rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΞΜ: ex æquo igitur quadratum ex ΑΓ erit ad quadratum ex ΒΚ, ΖΗ ſimul ut rectangulum ſub ΓΝ, ΞΜ ad quadratum ex ΜΙ. Sed ΜΙ æqualis eſt ipſi ΜΞ una cum ea quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ: quadratum igitur Axis ΑΓ eſt ad quadratum ſummæ duarum diametrorum conjugatarum ΒΚ, ΖΗ ſimul, ſicut rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΙ; quæ ſcilicet æqualis eſt utrique ΜΞ & ΞΙ ſimul, quarum ΞΙ poteſt rectangulum ΝΜΞ. Q. E. D.

PROPOSITIO IX.

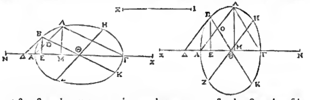
Iſdem manentibus ac in ſextâ & ſeptimâ præcedentibus. Dico quadratum ex ΑΓ eſſe ad quadratum differentiæ inter ΒΚ, ΞΗ ſicut rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum differentiæ inter ΜΞ & ΞΙ, ſive illam quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ.

Quoniam KB eſt ad ZH ſicut MΞ ad ΞI, uti patet ex demonſtratione Propoſitionis ultimæ; erit quadratum ex KB ad quadratum differentiæ inter BK & ZH ut quadratum ex MΞ ad quadratum differentiæ ipſarum MΞ, ΞI. Quadratum autem ex AΓ eſt ad quadratum ex BK ſicut rectangulum ſub ΓN, MΞ ad quadratum ex MΞ, per eandem præcedentis octavæ demonſtrationem: quare ex æquo quadratum ex AΓ erit ad quadratum differentiæ ipſarum BK, ZH ſicut rectangulum ſub ΓN, MΞ ad quadratum differentiæ inter ipſas MΞ, ΞI. Sed recta ΞI poteſt rectangulum NMΞ: quadratum igitur ex AΓ eſt ad quadratum differentiæ inter conjugatas diametros BK, ZH ut rectangulum ſub NΓ, MΞ ad quadratum differentiæ inter MΞ & illam quæ poteſt rectangulum NMΞ, hoc eſt ΞI. Q. E. D.

PROPOSITIO X.

Iiſdem manentibus. Dico quadratum ex AΓ eſſe ad rectangulum ſub BK, ZH ſicut NΓ ad illam quæ poteſt rectangulum NMΞ.

Quoniam enim quadratum ex AΓ eſt ad quadratum ex BK (per demonſtrata in 8va hujus) ſicut ΓN ad MX; & ex eâdem conſtat quadratum ex BK eſſe ad rectangulum ſub BK, ZH ſicut MΞ ad ΞI, quia MΞ eſt ad ZI ſicut BK ad ZH: ex æquo igitur quadratum ex AΓ erit ad rectangulum ſub BK, ZH ſicut ΓN ad ΞI quæ



poteſt rectangulum NMΞ: quocirca quadratum ex AΓ eſt ad rectangulum ſub diametris conjugatis BK, ZH ſicut NΓ ad illam quæ poteſt rectangulum NMΞ Q. E. D.

PROPOSITIO XI.

Iiſdem manentibus quæ in Hyperbolâ deſcripſimus ad Propoſitionem ſextam hujus. Dico quadratum ex AΓ eſſe ad quadrata ex BK & ZH ſimul ut ΓN ad utramque NM, MΞ ſimul ſumptam.

Quoniam enim (per 8^{vam} hujus) quadratum ex AΓ eſt ad quadratum ex BK ſicut ΓN ad MΞ, ac quadratum ex BK eſt ad quadrata ex BK, ZH ſimul ſicut MΞ ad utramque MΞ, MN ſimul; per ſextam enim hujus conſtat quadratum ex BK eſſe ad quadratum ex ZH ſicut MΞ ad MN: ex æquo igitur quadratum ex AΓ erit ad ſummam quadratorum ex diametris conjugatis BK, ZH ſicut ΓN ad utramque NM, MΞ ſimul ſumptam. Q. E. D.

PROPOSITIO XII.

IN omni Ellipſi quadrata ex quibuſvis diametris conjugatis ſimul ſumpta æqualia ſunt quadratis Axium ſimul ſumptis.

Adhibeatur Schema quo uſi ſumus in Propoſitione ſeptima hujus, & ſit alter Axium AΓ, ac diametri conjugatæ BK, ZH; rectæ autem duæ Homologæ ſint AN, ΓΞ.

Quoniam quadratum ex AΓ eſt ad quadratum Axis alterius Ellipſeos (per 15^{am} primi) ſicut Axis tranſverſus AΓ ad latus ejus rectum; & AΓ eſt ad latus ejus rectum ſicut ΓN ad NA, quia recta AN Homologa eſt; & AN ipſi ΓΞ æqualis eſt: quadratum igitur ex AΓ eſt ad quadratum alterius Axis ſicut NΓ ad ΓΞ, unde componendo quadratum ex AΓ erit ad quadratum ex AΓ una cum quadrato alterius Axis ſicut NΓ ad NΞ. Sed quadratum ex AΓ eſt ad quadratum ex BK (per demonſtrata in 8va hujus) ſicut NΓ ad MΞ: ac quadratum ex BK eſt ad quadrata ex BK, ZH ſimul

ſicut

Digitized by Google

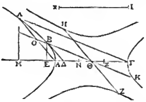
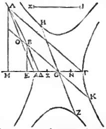
ſicut ΜΞ ad ΜΞ, ΜΝ ſimul ſumptas, quia (in ſeptima hujus) oſtendimus quadratum ex ΒΚ eſſe ad quadratum ex ΖΗ ſicut ΜΞ ad ΜΝ; atque ſunt ΜΞ, ΜΝ ſimul ſumptæ æquales ipſi ΝΞ: quare ex æquo quadratum ex ΑΓ eſt ad quadrata ex ΒΚ, ΖΗ ſimul ſicut ΝΓ ad ΝΞ. Sed jam demonſtratum eſt ΝΓ eſſe ad ΝΞ ut quadratum Axis ΑΓ ad quadrata ex utroque Axe ſimul: quadrata igitur Axium æqualia ſunt quadratis quarumvis diametrorum conjugatarum Ellipſeos, ΒΚ, ΖΗ: Q. E. D.

PROPOSITIO XIII.

In omni Hyperbola differentia inter quadrata Axium æqualis eſt differentiæ inter quadrata ex diametris quibuſvis conjugatis ſectionis.

Adhibeatur figura Hyperbolæ quâ uſi ſumus in ſextâ hujus, in quâ ΑΓ eſt alter Axium, ac ΒΚ, ΖΗ diametri conjugatæ, rectæque duæ Homologæ ſunt ΑΝ, ΓΞ.

Quoniam quadratum ex Axe ΑΓ eſt ad quadratum alterius Axis Hyperbolæ (per 16^am^ primi) ſicut ΑΓ ad latus ejus rectum; & ΑΓ eſt ad latus rectum ejus ſicut ΓΝ ad ΝΑ, quia ΑΝ Homologa eſt; eadem autem eſt ipſi ΓΞ æqualis: erit igitur quadratum ex ΑΓ ad differentiam quadratorum utriuſque Axis ſicut ΓΝ ad ΝΞ. Quadratum autem ex ΑΓ eſt ad quadratum ex ΒΚ (per 8^vam^ hujus) ſicut ΓΝ ad ΜΞ,

ac (per 6um hujus) quadratum ex ΒΚ eſt ad quadratum ex ΖΗ ſicut ΜΞ ad ΜΝ; adeoque per converſionem rationis quadratum ex ΒΚ eſt ad differentiam quadratorum ex ΒΚ & ΖΗ ſicut ΜΞ ad ΞΝ: ex æquo igitur quadratum ex ΑΓ eſt ad differentiam quadratorum ex ΒΚ, ΖΗ ſicut ΓΝ ad ΝΞ. Sed jam demonſtratum eſt quadratum ex ΑΓ eſſe ad differentiam quadratorum utriuſque Axis ſectionis in eadem ratione ac ΓΝ ad ΝΞ: quapropter differentia inter quadrata Axium ſectionis æqualis eſt differentiæ quadratorum diametrorum quarumvis conjugatarum ΒΚ, ΖΗ. Q. E. D.

PROPOSITIO XIV.

Quinetiam manente figura Ellipſeos quâ in Propoſitione ſeptimâ hujus uſi ſumus. Dico quadratum Axis ΑΓ eſſe ad differentiam quadratorum diametrorum conjugatarum ΒΚ, ΖΗ ſicut ΝΓ ad duplam ipſius ΜΘ; poſito quod ΑΛ fuerit diametro ΖΗ parallela, ac ΛΜ normalis ad Axem demiſſa.

Quoniam enim (per octavam hujus) quadratum ex ΑΓ eſt ad quadratum ex ΒΚ ſicut ΓΝ ad ΜΞ, ac (per hujus ſeptimam) quadratum ex ΒΚ eſt ad quadratum ex ΖΗ ſicut ΜΞ ad ΜΝ; unde, per converſionem rationis, quadratum ex ΒΚ erit ad differentiam quadratorum ex ΒΚ & ΖΗ ſicut ΜΞ ad differentiam inter ΜΞ & ΜΝ. Differentia autem ipſarum ΜΞ, ΜΝ dupla eſt rectæ ΜΘ: ex æquo igitur quadratum ex ΑΓ erit ad differentiam quadratorum ex ΒΚ, ΖΗ ſicut ΓΝ ad duplam ipſius ΜΘ. Q. E. D.

PROPOSITIO XV.

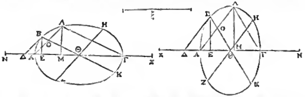
Manentibus Schematis tum Hyperbolæ tum Ellipſeos in Prop. ſexta & ſeptima hujus deſcriptis. Dico quadratum ex ΑΓ eſſe ad quadratum ejus quæ cum ΒΚ continet figuram ſectionis, hoc eſt ad quadratum lateris recti ad diametrum ΒΚ, ſicut rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΝ.

Fiat ΒΚ ad ξ ſicut ΜΞ ad ΜΝ. Cumque ΜΞ eſt ad ΜΝ (per 6^{am} & 7^{am} hujus) ſicut ΚΒ ad latus ejus rectum: recta ξ continebit cum diametro ΚΒ figuram ſectionis. Eſt autem quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΚΒ ſicut rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΞ, per demonſtrsta in octava hujus; & quadratum ex ΒΚ eſt ad quadratum lateris recti ξ ſicut quadratum ex ΜΞ ad quadratum ex ΜΝ: erit igitur ex æquo quadratum ex ΑΓ ad quadratum lateris recti ξ ſicut rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΝ. Q. E. D.

PROPOSITIO XVI.

Iiſdem manentibus ac in ſextâ & ſeptimâ hujus, ſit ξ latus rectum diametri ΒΚ. Dico quadratum ex ΑΓ eſſe ad quadratum differentiæ inter ipſas ΒΚ & ξ ut rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum differentiæ inter ipſas ΜΝ, ΜΞ.

Quoniam enim (per 6^{am} & 7^{am} hujus) ΒΚ eſt ad ξ ſicut ΜΞ ad ΜΝ; erit, per converſionem rationis, ΒΚ ad differentiam inter ΒΚ & ξ ſicut ΜΞ ad differentiam



inter eam & ΜΝ, ac proinde earundem quadrata: nempe quadratum ex ΒΚ erit ad quadratum differentiæ inter ΒΚ & ξ ſicut quadratum ex ΜΞ ad quadratum differentiæ inter ΜΞ, ΜΝ. Sed quadratum ex ΑΓ eſt ad quadratum ex ΒΚ (per 8^{vam} hujus) ſicut rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΞ: eſt igitur ex æquo quadratum ex ΑΓ ad quadratum differentiæ inter ΒΚ & ξ ſicut rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum differentiæ inter ΜΞ & ΜΝ. Q. E. D.

PROPOSITIO XVII.

Iiſdem manentibus quæ in ſextâ & ſeptimâ hujus deſcripſimus. Dico quadratum ex ΑΓ eſſe ad quadratum ſummæ diametri ΒΚ & lateris ejus recti ξ ſicut rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ſummæ ipſarum ΜΞ, ΜΝ ſimul ſumptarum.

Quoniam enim (per dictas 6^{tam} & 7^{mam}) ΒΚ eſt ad ξ ſicut ΜΞ ad ΜΝ, erit componendo quadratum ex ΒΚ ad quadratum utriuſque ΒΚ & ξ ſimul ſumptæ, ſicut quadratum ex ΜΞ ad quadratum ex ipſis ΜΞ, ΜΝ ſimul ſumptis. Eſt autem quadratum ex ΑΓ (per 8^{vam} hujus) ad quadratum ex ΒΚ ut rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΞ: quocirca ex æquo quadratum ex ΑΓ erit ad quadratum ſummæ ipſarum ΒΚ & ξ ſicut rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ipſis ΜΞ, ΜΝ ſimul ſumptis. Q. E. D.

PROPOSITIO XVIII.

Iiſdem etiam manentibus. Dico quadratum Axis ΑΓ eſſe ad rectangulum ſub diametro ΒΚ & latus ejus rectum ξ ſicut ΝΓ ad ΜΝ.

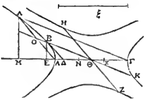
Quoniam enim quadratum ex ΑΓ (per 8^{vam} hujus) eſt ad quadratum ex ΒΚ ſicut ΝΓ ad ΜΞ; & quadratum ex ΒΚ eſt ad rectangulum ſub ΒΚ & ξ ſicut ΒΚ ad ξ, hoc eſt (per 6^{tam} & 7^{mam} hujus) ſicut ΜΞ ad ΜΝ: erit ex æquo quadratum ex ΑΓ ad rectangulum ſub ΒΚ, ξ ſicut ΝΓ ad ΜΝ. Q. E. D.

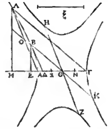
PROPO-

PROPOSITIO XIX.

Iſdem etiam manentibus. Dico quadratum ex ΑΓ eſſe ad quadrata ex utraque ΒΚ & ξ ſimul ſumpta ſicut rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ ad quadrata ex utraque ΜΝ, ΜΞ ſimul ſumpta.

Quoniam enim quadratum ex ΑΓ eſt ad quadratum ex ΒΚ (per 8^{vam} hujus) ſicut rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΞ; & quadratum ex ΒΚ eſt ad ſummam quadratorum ex ΒΚ & ξ ſicut quadratum ex ΜΞ ad quadrata ex utraque ΜΝ, ΜΞ ſimul ſumpta; nam per demonſtrata in ſexta & ſeptima hujus, ΒΚ eſt ad ξ ut ΜΞ ad ΜΝ: erit igitur ex æquo quadratum ex ΑΓ ad utrumque quadratum ex ΒΚ & ξ ſimul ſicut rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ ad quadrata ex utraque ΜΝ, ΜΞ ſimul ſumpta. Q. E. D.





PROPOSITIO XX.

Iſdem etiam manentibus. Dico quadratum ex ΑΓ eſſe ad differentiam quadratorum ex ΒΚ & ξ ſicut rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ ad differentiam quadratorum ex ΜΝ, ΜΞ.

Quoniam enim (per 8^{vam} hujus) quadratum ex ΑΓ eſt ad quadratum ex ΒΚ ſicut rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΞ; ac (per ſextam & ſeptimam hujus) ΒΚ eſt ad ξ ſicut ΜΞ ad ΜΝ: erit quadratum ex ΒΚ ad differentiam quadratorum ex ΒΚ & ξ ſicut quadratum ex ΜΞ ad differentiam quadratorum ex ΜΞ & ΜΝ. Ex æquo igitur erit quadratum ex ΑΓ ad differentiam quadratorum ex ΒΚ & ξ ut rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ ad differentiam quadratorum ex ΜΝ, ΜΞ. Q. E. D.

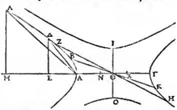
PROPOSITIO XXI.

IN Hyperbola ſi fuerit Axis tranſverſus major Axe recto: diameter omnis tranſverſa, è diametris conjugatis ſectionis, major erit diametro ejus ὀρθίᾳ: & ratio Axis majoris ad minorem major erit ratione cujuſvis alterius diametri tranſverſæ ad diametrum ὀρθίαν conjugatam: ac ratio cujuſvis diametri tranſverſæ Axi majori propioris, ad diametrum cum eâ conjugatam major erit ratione diametri tranſverſæ ab Axe remotioris ad diametrum ὀρθίαν cum eadem conjugatam.

Sint Hyperbolæ Axes ΑΓ, ΙΟ, ac ſint diametri duæ tranſverſæ ΒΚ, ΖΗ: ſit autem ΑΓ major quam ΙΟ. Dico diametrum ΒΚ majorem eſſe diametro ὀρθίᾳ cum eadem conjugatâ, pariterque ΖΗ majorem eſſe diametro ejus ὀρθίᾳ: rationem autem ΑΓ ad ΙΟ majorem eſſe ratione ΒΚ ad diametrum ὀρθίαν cum eâ conjugatam, vel ratione ΖΗ ad conjugatam ejus: denique rationem diametri ΒΚ Axi propioris ad conjugatam ejus majorem eſſe ratione diametri ΖΗ ad ὀρθίαν cum eadem conjugatam.

Digitized by Google

Fiat utraque ΓΝ ad ΑΝ & ΑΞ ad ΓΞ ſicut Axis ΑΓ ad latus ejus rectum: & proinde ΑΝ, ΓΞ erunt rectæ quas Homologas voco. Ducatur ΑΔ parallela rectæ quæ contingit ſectionem in puncto Β, ac ſit ΑΛ parallela tangenti ſectionem in puncto Ζ, & demittantur normales ad Axem majorem ut ΔΕ, ΛΜ: erit igitur quadratum ex ΒΚ (per 6^{am} hujus) ad quadratum diametri ὀρθίας cum eadem conjugatæ ſicut ΞΕ ad ΕΝ; pariterque quadratum ex ΖΗ erit ad quadratum conjugatæ ejus ut ΞΜ ad ΜΝ. Quapropter ΒΚ major eſt ὀρθίᾳ ejus conjugatâ, ut & ΖΗ major conjugatâ cum eadem. Eſt autem ΑΓ ad latus ejus rectum ſicut ΓΝ ad ΑΝ, vel ΑΞ ad ΞΓ; quia ΓΝ, ΑΞ æquales ſunt, & ratio utriuſque ad ΑΝ eadem eſt: ratio autem ΞΕ ad ΕΝ minor eſt ratione ΞΑ ad ΑΝ; ac proinde ratio ΞΑ ad ΓΞ major eſt ratione ΞΕ ad ΕΝ. Ac pari modo probabitur rationem ΞΑ ad ΓΞ majorem eſſe ratione ΞΜ ad ΜΝ. Verum ΞΑ eſt ad ΓΞ ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΙΟ, quia utraque ratio (per 16^{am} primi) eadem eſt ac ratio ipſius ΑΓ ad latus ejus rectum: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΙΟ major eſt ratione ΞΕ ad ΕΝ, vel ratione ΞΜ ad ΜΝ. Eſt autem ΞΕ ad ΕΝ ut quadratum ex ΒΚ ad quadratum diametri ὀρθίας cum eadem conjugatæ, & ΜΞ eſt ad ΜΝ ut quadratum ex ΖΗ ad quadratum ex coujugatâ illius: quapropter ratio quadrati ex ΑΓ ad quadratum ex ΙΟ major eſt ratione quadrati ex ΒΚ ad quadratum diametri cum eadem conjugatæ; ac major ratione quadrati ex ΖΗ ad quadratum conjugatæ cum eadem: unde & laterum, ſive ratio ΑΓ ad ΙΟ major eſt ratione ΒΚ ad ſuam conjugatam, vel ratione ΖΗ ad ſuam. Cum autem ratio ΞΕ ad ΕΝ, ſive quadrati ex ΒΚ ad quadratum conjugatæ ejus, major ſit ratione ΞΜ ad ΜΝ, ſive quadrati ex ΖΗ ad quadratum conjugatæ ejus; erit ratio diametri ΒΚ ad ejuſdem conjugatam major ratione diametri ΖΗ ad conjugatam ejus. Q. E. D.



PROPOSITIO XXII.

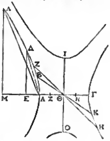
SI vero Axis tranſverſus Hyperbolæ minor ſit Axe ὀρθίῳ: erit quælibet diameter tranſverſa minor diametro ὀρθίᾳ cum eadem conjugatâ; ac ratio axis minoris ad majorem minor erit ratione cujuſvis diametri tranſverſæ ad ſuam ὀρθίαν conjugatam; & ratio diametri Axi minori propioris ad ſuam conjugatam minor erit ratione diametri remotioris ab eadem ad ſuam conjugatam.

Sint Hyperbolæ Axes ΑΓ, ΟΙ, & centrum Θ; ſintque ΒΚ, ΖΗ duæ quælibet diametri: minor autem ſit ΑΓ quam ΙΟ. Dico utramque ΒΚ, ΖΗ minorem eſſe diametro ὀρθίᾳ cum illis reſpective conjugatâ; ac rationem ΑΓ ad ΙΟ minorem eſſe ratione ΒΚ ad diametrum cum illâ conjugatam, ut & ratioue ΖΗ ad conjugatam ſuam: & rationem ipſius ΒΚ ad ſuam conjugatam minorem eſſe ratione diametri ΖΗ ad ſnam conjugatam.

Fiat ΓΝ ad ΝΑ ſicut Axis ΑΓ ad latus ejus rectum, & in eadem ratione capiatur ΑΞ ad ΞΓ; & erunt ΞΓ, ΑΝ rectæ quas Homologas vocamus: dncatur etiam ΑΔ parallela rectæ quæ contingit ſectionem in puncto Β, ut & ΑΛ parallela tangenti ſectiouis iu puncto Ζ; & de punctis Δ, Λ Axi normales ſint ΔΕ, ΛΜ. Jam quadratum diametri ΒΚ eſt ad quadratum diametri ὀρθίας cum eadem conjugatæ (per 6^{am} hujus) ſicut ΞΕ ad ΕΝ; pariterque quadratum ex ΖΗ ad quadratum conjugatæ ejus eſt ut ΞΜ ad ΜΝ: nude manifeſtum eſt diametrum ΒΚ minorem eſſe diametro ὀρθίᾳ cum eadem conjugatâ, ac diametrum ΖΗ minorem eſſe conjugatâ ejus. Quinetiam quia ΓΑ eſt ad latus ejus rectum ſicut ΓΝ ad ΝΑ, ac ΞΑ eſt ad ΓΞ in eadem ratione; erit ΓΝ ipſi ΑΞ æqualis, eademque erit utriuſque ratio ad

rectam

rectam ΑΝ. Ratio autem ΞΕ ad ΕΝ major eſt ratione ΞΑ ad ΑΝ, adeoque ratio ΞΕ ad ΕΝ major eſt ratione ΓΝ ad ΝΑ. Sed ΒΕ eſt ad ΕΝ (per 6^{tam} hujus) ut quadratum ex ΒΚ ad quadratum conjugatæ ejus; ac ΓΝ eſt ad ΝΑ (per 16^{am} primi) ut quadratum Axis tranſverſi ΑΓ ad quadratum Axis ὀρθίας: ratio igitur ipſius ΑΓ ad Axem ὀρθίαν conjugatum minor eſt ratione diametri ΒΚ ad diametrum cum eadem conjugatam; ac pari argumento minor erit ratione ΖΗ ad diametrum rectam cum eadem conjugatam. Quoniam vero ratio ΞΕ ad ΕΝ minor eſt ratione ΣΜ ad ΜΝ; ac ΞΕ eſt ad ΕΝ ut quadratum ex ΒΚ ad quadratum conjugatæ ejus; & ΕΜ eſt ad ΜΝ ut quadratum ex ΖΗ ad quadratum diametri cum eadem conjugatæ: erit ratio diametri ΚΒ ad ſuam ὀρθίαν conjugatam minor ratione diametri ΖΗ ad conjugatam ejus. Q. E. D.



PROPOSITIO XXIII.

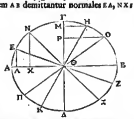
SI vero Axes Hyperbolæ fuerint æquales, diametri quoque omnes conjugatæ erunt inter ſe æquales.

Manente enim Schemate Propoſitionis 21^{mæ}, ſi fuerit ΑΓ ipſi ΟΙ æqualis, erit etiam ΑΓ (per 16^{am} primi) æqualis lateri recto. Eſt autem ΑΘ ipſi ΘΓ æqualis, quarum quoque utraque recta eſt Homologa, quia ſunt inter ſe ſicut diameter tranſverſa ΑΓ ad latus ejus rectum: quadratum vero ex ΒΚ eſt ad quadratum diametri ὀρθίας cum eadem conjugatæ ſicut ΘΕ ad ΕΘ, ſive ut æqualis ad æqualem; quadratum quoque ex ΖΗ eſt ad quadratum conjugatæ ejus ut ΘΜ ad ΜΘ. Utraque igitur diameter ΒΚ, ΖΗ æqualis eſt conjugatæ ſuæ, ac proinde lateri ejus recto. Q. E. D.

PROPOSITIO XXIV.

SI ducantur diametri quævis conjugatæ in Ellipſi: erit ratio diametri majoris ad conjugatam ſuam minorem, minor ratione Axis longioris ad Axem minorem; ac ratio diametri majoris, Axi ſectionis longiori propioris, ad diametrum conjugatam ejus minorem, major erit ratione diametri majoris ab Axe longiore remotioris ad conjugatam ſuam.

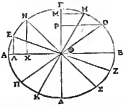
Sit ΑΒ Axis longior Ellipſeos, ac ΓΔ Axis minor; ac ſint ſectionis diametri conjugatæ ΕΖ, ΗΚ; ΞΝ, ΠΟ, quarum ΕΖ major ſit conjugatâ ejus ΗΚ, ac ΞΝ major conjugatâ ΟΠ: & de punctis Ε, Ν ad Axem ΑΒ demittantur normales ΕΛ, ΝΧ; & de punctis Η, Ο ducantur ad Axem ΓΔ normales ΗΜ, ΟΡ. Jam rectangulum ΑΘΒ (per 21^{em} primi) eſt ad quadratum ex ΘΓ ſicut rectangulum ΑΛΒ ad quadratum ex ΛΕ; rectangulum autem ΑΘΒ majus eſt quadrato ex ΘΓ: adeoque rectangulum ΑΛΒ majus eſt quadrato ex ΛΕ; unde ΑΘ major erit quam ΘΕ. [*Nam ſi fiat quadratum ex* ΘΛ *commune, rectangulum* ΑΛΒ *una cum quadrato ex* ΘΛ, *hoc eſt quadratum ex* ΘΑ, *majus erit quadratis ex* ΕΛ, ΛΘ *ſimul ſumptis, ſive quadrato ex* ΘΕ,] ac ΑΒ major erit quam ΖΕ. Rectangulum etiam ΓΘΔ eſt ad quadratum ex ΘΒ ſicut rectangulum ΓΜΔ ad quadratum ex ΜΗ, & rectangulum ΓΘΔ minus eſt quadrato ex ΘΒ; quare



 rectan-

rectangulum ΓMΔ minus eſt quadrato ex MH, ac proinde ΘΔ minor erit quam ΘH ac ΓΔ minor quam HK. Eſt autem AB major quam EZ, adeoque ratio AB ad ΓΔ major eſt ratione EZ ad HK, ac diameter EZ conjugata eſt cum diametro HK, quæ nempe parallela eſt rectæ ſectionem contingenti in puncto E.

Diameter autem OΠ conjugata eſt cum diametro NΞ, ſive *parallela* rectæ ſectionem tangenti in puncto N; diameter igitur OΠ propior eſt Axi majori AB quam KH: ac rectangulum AΛB eſt ad rectangulum AXB (per 21^{am} primi) ut quadratum ex ΛE ad quadratum ex NX; & rectangulum AXB majus eſt rectangulo AΛB; quare quadratum ex NX majus eſt quadrato ex EΛ, & exceſſus rectanguli AXB ſupra rectangulum AΛB major eſt exceſſu quadrati ex NX ſupra quadratum ex EΛ. Conſtat etiam rectangulum AXB majus eſſe quadrato ex NX. Exceſſus autem rectanguli AXB ſupra rectangulum AΛB æqualis eſt exceſſui quadrati ex ΘΛ ſupra quadratum ex ΘX; exceſſus igitur quadrati ex ΘΛ ſupra quadratum ex ΘX major eſt exceſſu quo quadratum ex NX ſuperat quadratum ex EΛ; adeoque quadrata ex ΘΛ, ΛE ſimul ſumpta majora ſunt quadratis ex ΘX, XN ſimul; ac proinde ΘE major eſt quam ΘN, ac diameter EZ major diametro NΞ. Pari argumento rectangulum ΓPΔ eſt ad rectangulum ΓMΔ (per 21^{am} primi) ſicut quadratum ex OP ad quadratum ex HM, & rectangulum ΓPΔ minus eſt quadrato *ex* OP, *uti rectangulum* ΓMΔ *minus eſt quadrato* ex HM; quare exceſſus quo rectangulum ΓPΔ ſuperat rectangulum ΓMΔ minor eſt exceſſu quadrati ex OP ſupra quadratum ex HM. Exceſſus autem rectanguli ΓPΔ ſupra rectangulum ΓMΔ æqualis eſt exceſſui quadrati ex ΘM ſupra quadratum ex ΘP; quare exceſſus quadrati ex ΘM ſupra quadratum ex ΘP minor eſt exceſſu quadrati ex OP ſupra quadratum ex HM; atque adeo quadrata ex ΘM, MH ſimul ſumpta minora ſunt quadratis ex ΘP, PO ſimul ſumptis: quapropter recta ΘH minor eſt quam ΘO, diameterque HK minor diametro OΠ. Quoniam vero diameter EZ conjugata cum HK major eſt diametro ΞN conjugatâ cum OΠ, ac HK minor eſt quam OΠ; erit ratio diametri EZ ad conjugatam ejus HK major ratione diametri ΞN ad conjugatam ejus OΠ.



Hinc etiam manifeſtum eſt exceſſum Axis AB ſupra Axem ΓΔ majorem eſſe exceſſu diametri EZ ſupra HK, exceſſumque ipſius EZ ſupra HK majorem eſſe exceſſu diametri ΞN ſupra OΠ. Exceſſus quoque quadrati ex AB ſupra quadratum ex ΓΔ major erit exceſſu quadrati ex EZ ſupra quadratum ex HK, qui major eſt exceſſu quadrati ex ΞN ſupra quadratum ex OΠ.

Dico quoque illam quæ cum AB continet figuram ſectionis minorem eſſe eâ quæ cum EZ continet figuram ſectionis; illam etiam quæ cum EZ continet figuram ſectionis minorem eſſe eâ quæ cum ΞN ejuſdem figuram continet: ut & illam quæ cum ΞN continet figuram ejus minorem eſſe eâ quæ cum Axe breviore ΓΔ ſectionis figuram continet. Nam Axis AB major eſt quam OΠ, & OΠ quam HK, & HK quam ΓΔ; ac ΞN minor eſt quam EZ, & EZ quam AB: quadratum autem ex AB æquale eſt rectangulo ſub ΓΔ & eâ quæ cum ΓΔ continet figuram ſectionis, per 15^{am} primi; & quadratum ex OΠ æquale eſt figuræ ſectionis quæ fit ſuper ΞN; *& quadratum ex* HK *æquale eſt figuræ ſectionis ſuper* EZ factæ; uti quadratum ex ΓΔ æquale eſt figuræ ſuper Axe AB factæ *Figura igitur major applicata ad rectam minorem producit altitudinem majorem, quam quæ producitur applicatione figuræ minoris ad majorem.* Ergo conſtat Propoſitio.

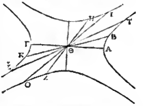
PROPOSITIO XXV.

IN Hyperbola ſumma duorum Axium minor eſt ſummâ duarum quarumvis diametrorum conjugatarum: & diameter omnis tranſverſa, quæ propior eſt Axi tranſverſo ſectionis, una cum ſuâ

conjugatâ

conjugatâ ſimul ſumpta, minor eſt diametro quavis tranſverſâ ab Axe magis remotâ una cum conjugata ejus ſimul ſumptâ.

Sit Hyperbolæ Axis tranſverſus ΑΓ, & centrum Θ: aliæ vero diametri conjugatæ ſint ΒΚ, ΗΖ; Τξ, ΙΟ. Axis autem ΑΒ vel æqualis erit Axi ὀρθίῳ, vel non erit eidem æqualis. Si vero æqualis fuerit ei, erunt (per 23[am] hujus) diametri ΚΒ, ΗΖ æquales, pariterque diameter Τξ æqualis erit diametro ΙΟ. Sed diameter ΚΒ major eſt Axe ΓΑ, ac diameter Τξ major diametro ΚΒ. Ergo conſtat Propoſitio.

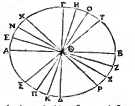


Si vero Axis ΑΓ non fuerit æqualis alteri ſectionis Axi, erit differentia quadratorum Axis ΑΓ & alterius Axis ſectionis æqualis differentiæ quadratorum ex diametris conjugatis ΚΒ, ΖΗ, per 13[am] hujus: recta igitur utrique Axi æqualis minor erit rectâ utriſque ΚΒ, ΖΗ æquali. Quoniam autem differentia quadratorum ex ΒΚ, ΖΗ æqualis eſt differentiæ quadratorum ex Τξ, ΙΟ, *ac* Τξ *major eſt quam* ΒΚ; erit recta æqualis utrique diametro ΒΚ, ΖΗ minor rectâ utrique diametro Τξ, ΙΟ æquali. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVI.

IN Ellipſi axes duo ſimul ſumpti minores ſunt quibuſvis aliis duabus diametris conjugatis ſectionis ſimul ſumptis: diametrique duæ conjugatæ Axibus propiores ſimul ſumptæ minores ſunt diametris conjugatis ab iiſdem remotioribus ſimul: diametri autem conjugatæ, quæ ſunt inter ſe æquales, ſimul ſumptæ majorem efficiunt ſummam quam diametri quævis aliæ conjugatæ.

Sit Ellipſeos Axis major ΑΒ, minor ΓΔ: ſint etiam ΖΕ, ΚΗ; ΝΞ, ΟΠ; Τξ, ΧΡ diametri conjugatæ; ac ſit ΕΖ major quam ΚΗ, & ΝΞ major quam ΟΠ; ΧΡ vero æqualis ſit diametro Τξ. Dico rectam utrique Axi ΑΒ, ΓΔ æqualem minorem eſſe rectâ diametris ΕΖ, ΗΚ æquali; ut & rectâ utriſque ΝΞ, ΟΠ æquali: omnium autem maximam ſummam eſſe diametrorum æqualium ΧΡ, Τξ.



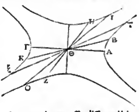
Quoniam enim ratio ΑΒ ad ΓΔ (per 24[am] hujus) major eſt ratione ΕΖ ad ΚΗ, erit ratio ſummæ quadratorum ex ipſis ΑΒ, ΓΔ ad quadratum rectæ compoſitæ ex utrâque ΑΒ, ΓΔ (*per Lemm.* VIII. *Abdol.*) major ratione ſummæ quadratorum ex ΕΖ, ΚΗ ad quadratum ipſarum ΕΖ, ΚΗ ſimul ſumptarum. Quadrata autem ex ΕΖ, ΚΗ ſimul ſumpta (per 12[am] hujus) æqualia ſunt utrique quadrato ex ΑΒ, ΓΔ ſimul: quadratum igitur compoſitæ ex ΑΒ, ΓΔ ſimul minus eſt quadrato compoſitæ ex ipſis ΖΕ, ΚΗ. Summa igitur Axium ΑΒ, ΓΔ minor eſt recta æquali diametris ΕΖ, ΚΗ ſimul ſumptis. Pari modo demonſtrabitur ſummam ipſarum ΕΖ, ΚΗ minorem eſſe *diametris* ΝΞ, ΟΠ *ſimul ſumptis*; *ipſaſque* ΝΞ, ΟΠ *ſimul* minores eſſe diametris æqualibus conjugatis ΧΡ, Τξ ſimul ſumptis. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVII.

IN omni Ellipſi vel Hyperbola, cujus Axes ſunt inæquales, exceſſus Axis majoris ſupra minorem major eſt exceſſu cujuſvis alterius diametri ſupra conjugatam ſuam: & exceſſus diametri

Axi majori propioris ſupra ſuam conjugatam major eſt exceſſu remotioris ab eadem ſupra diametrum cum eadem conjugatâ.

Hoc antem in Ellipſi manifeſtum eſt per demonſtrata in 24ta hujus. In Hyperbola vero hunc in modum probabitur. Sit AΓ Axis Hyperbolæ in qua ſint diametri conjugatæ KB, ZH; ΞT, IO. Dico differentiam inter AΓ & Axem alterum ſectionis majorem eſſe differentia inter KB & ZH; & differentiam inter KB, ZH majorem eſſe differentia inter ΞT & IO.

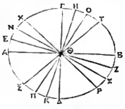


Quoniam enim differentia inter quadratum ex AΓ & quadratum alterius Axis ſectionis (per 13^am hujus) æqualis eſt differentiæ inter quadrsta ex KB & ZH, ac diameter KB major eſt Axe: erit differentia inter AΓ & Axem cum eodem conjugatam major differentia inter KB & ZH. Eodemque modo probabitur differentism inter KB & ZH majorem eſſe differentiâ inter ΞT & IO. Q. E. D.

PROPOSITIO XXVIII.

In omni Hyperbola vel Ellipſi, rectangulum ſub Axibus contentum minus erit contento ſub quibuſlibet aliis diametris conjugatis: contentaque ſub diametris conjugatis, quæ propiores ſunt ſectionis Axibus, minora erunt contentis ſub conjugatis remotioribus ab iiſdem.

Hoc antem in Hyperbola ex præcedentibus manifeſtum eſt; nam Axis uterque minor eſt qualibet aliâ diametro eidem adjacente: In Ellipſi vero hunc in modum demonſtrabitur. Sit AB Axis major & ΓΔ Axis minor ſectionis; ſintque diametri ejus conjngatæ EZ, KH; NΞ, OΠ; *conjugatæ vero æquales* XP, TΞ. Dico rectangulum ſub AB, ΓΔ minus eſſe rectangulo ſub EZ, KH; & rectangulum ſub ΞN, OΠ minus eſſe rectangulo contento ſub XP, TΞ.



Quoniam enim Axes AB, ΓΔ ſimul ſumpti (per 26^am hujus) minores ſunt diametris conjugatis EZ, KH ſimul; quadrstum etiam ſummæ ipſarum AB, ΓΔ minus erit quadrato ex EZ, KH ſimul ſumptis. Quadrata antem ex AB & ΓΔ ſimul (per 12^mam hujus) æqualia ſunt ſummæ quadratorum ex EZ, KH: quibus utrinque ſnblatis, duplum rectangulum ſub AB, ΓΔ minus erit dupln rectangulo ſub EZ, KH; adeoqne rectangulum ſub AB, ΓΔ minus eſt rectangulo ſub EZ, KH. Pari argumento conſtabit rectangulum ſnb EZ, KH minus eſſe contento ſub NΞ, OΠ, ac rectangulum ſub NΞ, OΠ minus eſſe rectangulo ſub *æqualibus conjugatis* XP TΞ contento; *quod proinde rectangulum maximum eſt.* Q. E. D.

PROPOSITIO XXIX.

In Hyperbola, differentia inter figuram ſectionis ſuper diametrum quamlibet factam & ejuſdem diametri quadratum ubique æqualis eſt. Vide figuram Prop. XXVII.

Sit Hyperbolæ Axis AΓ & centrum Θ; ſint autem in eâ diametri conjugatæ BK, ZH; ΞT, OI. Dico differentiam inter figuram ſectionis ſuper AΓ factam & quadratum ex AΓ æqualem eſſe differentiæ inter figuram ſectionis ſuper BK factam

&

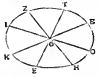
& quadratum ex BK; ut & differentiæ inter quadratum ex ΞT & figuram ſuper ΞT factam.

Quoniam enim differentia inter quadratum ex AΓ & quadratum alterius Axis ſectionis æqualis eſt differentiæ inter quadrata ex KB & ZH; atque etiam (per 13am hujus) differentiæ inter quadrata ex ΞT & OI: ac figura ſectionis ſuper AΓ facta æqualis eſt quadrato alterius Axis (per 16mam primi) ſicut figura ſectionis ſuper KB facta æqualis eſt quadrato ex ZH; & figura ſectionis ſuper ΞT æqualis eſt quadrato ex OI: differentia igitur inter figuram ſectionis ſuper AΓ factam & quadratum ejuſdem AΓ æqualis eſt differentiæ inter figuram ſectionis ſuper BK factam & quadratum ex BK; eademque æqualis eſt differentiæ inter figuram ſuper ΞT factam & quadrstum ipſius ΞT. Q. E. D.

PROPOSITIO XXX.

IN Ellipſi vero, ſi adjiciatur figuræ ſuper quamvis diametrum factæ quadratum ejuſdem diametri, fiet ſumma ſemper æqualis.

Sit centrum Ellipſeos Θ, & diametri ejus conjugatæ BK, ZH; ΞT, OI. Dico figuram ſectionis ſuper BK factam una cum quadrato ex BK æqualem eſſe figuræ ſectionis ſuper ΞT factæ una cum quadrato ex ΞT.

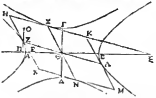


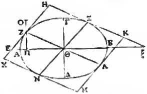
Quoniam enim quadratum ex BK una cum quadrato ex ZH (per 12mam hujus) æquale eſt quadrato ex ΞT una cum quadrato ex OI; ac figura ſectionis ſuper BK facta æqualis eſt quadrato ex ZH, uti & quadratum ex OI (per 15am primi) æqualis eſt figuræ ſectionis ſuper ΞT factæ: figura igitur ſuper BK facta una cum quadrato ex BK æqualis eſt figuræ ſuper ΞT factæ una cum quadrato ex ΞT. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXI.

SI ducantur diametri quævis conjugatæ in Ellipſi, vel inter ſectiones oppoſitas conjugatas; erit parallelogrammum contentum ſub his diametris æquale rectangulo ſub ipſis Axibus facto: modo anguli ejus æquales ſint angulis ad centrum ſectionis à diametris conjugatis comprehenſis.

Sit Ellipſeos vel Sectionum oppoſitarum conjugatarum centrum Θ, Axes autem ſint AB, ΓΔ, ac diametri quævis conjugatæ ZΛ, ΞN. Per puncta Z, Λ; Ξ, N ducantur tangentes HX, KM; HK, XM; erunt igitur HX, KM diametro ΞN parallelæ, ut rectæ HK, XM (per 6am & 20mam ſecundi) diametro ZΛ parallelæ ſunt: erit quoque HM parallelogrammum, cujus anguli æquales ſunt angulis à diametris conjugatis ZΛ, ΞN ad centrum Θ contentis. Dico ideo parallelogrammum HM æquale eſſe rectangulo ſub Axibus AB, ΓΔ contento.

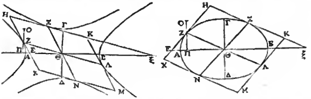




Occurrant Axi tranſverſo AB *parallelæ* HX, HK *in punctis* E & Ξ; & de puncto Z demittatur ad Axem AΘB normalis ZΠ; ac fiat ΠO media proportionalis inter

ipſas

ipſas ΕΠ, ΠΘ: & erit (per 37am primi) quadratum ex ΑΘ ad quadratum ex ΘΓ ſicut rectangulum ΘΠΕ ad quadratum ex ΖΠ. Rectangulum autem ΘΠΕ æquale eſt quadrato ex ΟΠ; quare quadratum ex ΑΘ eſt ad quadratum ex ΘΓ ut quadratum ex ΠΟ ad quadratum ex ΖΠ: unde etiam ΑΘ eſt ad ΘΓ ſicut ΠΟ ad ΖΠ. Sed ΑΘ eſt ad ΘΓ ut quadratum ex ΑΘ ad rectangulum ΑΘΓ; ac ΟΠ eſt ad ΠΖ ſicut rectangulum ſub ΟΠ, ΘΕ ad rectangulum ſub ΠΖ, ΘΕ: quadratum igitur ex ΑΘ eſt ad rectangulum ΑΘΓ ut rectangulum ſub ΟΠ, ΘΕ ad rectangulum ſub ΠΖ, ΘΕ; ac permutando erit quadratum ex ΑΘ ad rectangulum ſub ΟΠ, ΘΕ ſicut rectangulum ΑΘΓ ad rectangulum ſub ΖΠ, ΘΕ. Quadratum autem ex ΑΘ (per trigeſimam ſeptimam primi) æquale eſt rectangulo ΕΘΠ; quare rectangulum ΕΘΠ eſt ad rectangulum ſub ΟΠ, ΘΕ ut rectangulum ΑΘΓ ad rectangulum ſub ΖΠ, ΘΕ. Verum recta ΘΞ parallela eſt ipſi ΖΕ, adeoque (per quartam hujus) quadratum ex ΖΕ eſt ad quadratum ex ΘΞ ſicut ΕΠ ad ΠΘ: atque triangulum ΘΖΕ eſt ad triangulum ΘΞξ ut quadratum ex ΖΕ ad quadratum ex ΘΞ, ob ſimilia triangula; adeoque triangulum ΘΖΕ eſt ad triangulum ΘΞξ, atque eorundem dupla, in ratione ΕΠ ad ΠΘ. Parallelogrammum autem ΞΘΖΗ medium proportionale eſt inter duplum trianguli ΘΖΕ & duplum trianguli ΞΘξ: [duplum enim trianguli ΘΖΕ ad planum ΘΗ eſt ut ΕΖ ad ΖΗ, ſive ut ΕΘ ad Θξ; ac



planum ΘΗ eſt ad duplum trianguli ΞΘξ ſicut ΗΞ ad Ξξ, ſive ut ΘΕ ad Θξ.] Porro cum ΟΠ media proportionalis ſit inter ΕΠ & ΠΘ; erit duplum trianguli ΘΖΕ ad parallelogrammum ΗΘ ut ΟΠ ad ΠΘ. Verum ΟΠ eſt ad ΠΘ ut rectangulum ſub ΟΠ, ΘΕ ad rectangulum ΠΘΕ: ac jam demonſtravimus rectangulum ſub ΟΠ, ΘΕ eſſe ad rectangulum ΠΘΕ ſicut rectangulum ſub ΠΖ, ΘΕ ad rectangulum ΑΘΓ: duplum igitur trianguli ΘΖΕ *eſt ad parallelogrammum* ΘΗ ſicut rectangulum ſub ΖΠ, ΘΕ ad rectangulum ΑΘΓ. Sed duplum trianguli ΘΖΕ æquale eſt rectangulo ſub ΖΠ, ΘΕ: quapropter parallelogrammum ΘΗ æquale eſt rectangulo ΑΘΓ; ac quadruplum plani ΘΗ, nempe parallelogrammum ΗΜ, æquale eſt quadruplo rectanguli ΑΘΓ, hoc eſt rectangulo contento ſub Axibus ΑΒ, ΓΔ. Q. E. D.

Demonſtravimus itaque, in præcedentibus Propoſitionibus, quod in omni Hyperbola quadrata Axium ſimul ſumpta minora ſunt quadratis ex quibuſvis aliis diametris conjugatis ſectionis: quodque quadrata diametrorum conjugatarum Axibus propiorum minora ſunt quadratis diametrorum conjugatarum ab Axibus remotiorum: quodque in omni Ellipſi differentia inter quadrata Axium major eſt differentia quadratorum quarumvis diametrorum conjugatarum: quodque differentia inter quadrata diametrorum conjugatarum Axibus propiorum major eſt differentia quadratorum ex diametris conjugatis ab iiſdem remotioribus: quodque in Hyperbola, ſi Axis, ſive latus tranſverſum figuræ ſectionis ſuper Axem factæ, major fuerit latere ejus recto, latus tranſverſum figuræ ſuper diametrum quamvis aliam factæ majus erit latere recto ejuſdem: quodque ratio Axis tranſverſi ad ejuſdem latus rectum major erit ratione cujuſvis alterius diametri tranſverſæ ad latus rectum ejuſdem: quodque ratio hæc, in figuris ſuper diametros Axi propiores factis, major eſt ratione eâ in figuris ſuper remotiores ab Axe factis. Si vero Axis, ſive latus tranſverſum figuræ ſectionis, minor fuerit latere ejus recto; cæteræ diametri tranſverſæ minores erunt earundem lateribus rectis; ac ratio Axis tranſ-

verſi

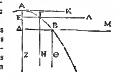
verſi ad latus ejus rectum minor erit ratione cujuſvis alterius diametri tranſverſæ ad latus rectum figuræ ſuper eandem diametrum factæ: atque hæc ratio, in figuris ſuper diametros tranſverſas Axi propiores factis, *minor* erit eâ quam habet latus tranſverſum ad latus rectum in figuris ſuper diametros ab Axe remotiores factis. Quod ſi figura ſectionis ſuper Axem facta æquilatera fuerit, figuræ cæteræ ſuper reliquas diametros factæ erunt quoque æquilateræ.

Demonſtratum etiam eſt, quod in omni Ellipſi, latus tranſverſum figuræ ſectionis, ſuper diametrum quamlibet inter Axem majorem & diametros conjugatas æquales intermediam factæ, majus eſt latere recto ejuſdem diametri: ac ratio quam habet diameter ad latus ejus rectum major eſt in iis quæ Axi majori propius adjacent, quam in iis quæ ab eodem longius abſunt. E contrario vero latus tranſverſum figuræ ſectionis factæ ſuper diametrum quamlibet, inter Axem minorem & diametros conjugatas æquales jacentem, minus eſt latere ejus recto: ac diametri quæ propiores ſunt Axi minori, minores habent rationes ad latera ſua recta, quam quæ remotiores ſunt ab eodem. Hæc autem Corollaria ſunt ad ea quæ demonſtravimus in Propoſitionibus de diametris & figuris Sectionum.

PROPOSITIO XXXII.

IN omni Parabola latus rectum, ſive ea juxta quam poſſunt ordinatim ad Axem applicatæ, minus eſt latere recto cujuſvis alterius diametri; ac diametri ſectionis quæ Axi propiores ſunt minora habent latera recta quam quæ longius diſtant ab eodem.

Sit A B Parabola, cujus Axis A Z, diametri autem aliæ ſint B Θ, Γ H; latera vero recta, ſive juxta quas poſſunt ordinatim ad eas applicatæ, ſint A K, Γ Λ, B M. Dico A K minorem eſſe quam Γ Λ, ac Γ Λ minorem quam B M.

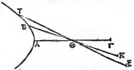


De punctis B, Γ demittantur ad Axem normales B Δ, Γ E; & recta Γ Λ (per quintam hujus) æqualis erit ipſi A K una cum quadruplo ipſius A E. Pariter B M æqualis erit ipſi A K cum quadruplo ipſius A Δ. Quare A K minor eſt quam Γ Λ, ac Γ Λ quam B M. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIII.

IN Hyperbola, ſi latus tranſverſum figuræ ſectionis ſuper Axem factæ non ſit minus latere ejus recto; erit latus illud rectum figuræ ſuper Axem minus latere recto cujuſvis alterius figuræ ſuper aliam quamvis diametrum ſectionis factæ: & latus rectum figuræ ſuper diametrum Axi propiorem factæ minus erit latere recto figuræ ſuper remotiorem ab Axe factæ.

Sit Hyperbolæ Axis A Γ & centrum Θ; diametri antem aliæ ſint K B, T Ξ. Dico latus rectum figuræ ſectionis ſuper A Γ factæ minus eſſe latere recto figuræ ſuper B K factæ; & latus rectum ſuper B K factæ minus eſſe latere recto figuræ ſectionis ſuper T Ξ factæ.



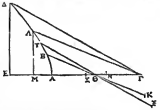
Ponatur imprimis Axis A Γ æqualis lateri recto figuræ ſectionis ſuper A Γ factæ; & erit B K æqualis lateri recto figuræ ſuper illam factæ, per 23^tiam hujus & 16^mam primi. Sed A Γ minor eſt quam B K: latus igitur rectum Axis A Γ minus eſt latere recto diametri B K. Quoniam etiam diameter T Ξ æqualis eſt lateri recto figuræ ſuper eam factæ; ac diameter K B minor eſt diametro Ξ T: latus rectum diametri K B minus erit latere recto ad diametrum Ξ T.

Si vero Axis ΑΓ major fuerit latere recto figuræ ſuper Axem factæ, erit ratio ipſius ΑΓ ad latus ejus rectum (per 21[am] hujus & 16[mam] primi) major ratione diametri ΚΒ ad latus rectum ejuſdem ΚΒ: ac pari argumento ratio ΚΒ ad latus ejus rectum major erit ratioue Τξ ad latus rectum ejus. Sed ΑΓ minor eſt quam ΚΒ, ac ΚΒ minor quam Τξ. Quapropter latus rectum diametri ΑΓ minus eſt latere recto diametri ΚΒ; & latus rectum diametri ΚΒ miuus latere recto diametri Τξ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIV.

Quinetiam ſi Axis ΑΓ minor fuerit latere recto figuræ ſuper Axem factæ, non tamen minor dimidio ejuſdem lateris recti. Dico quoque latus rectum figuræ ſuper Axem factæ minus eſſe latere recto figuræ ſuper ΚΒ factæ: ac latus rectum figuræ diametri ΚΒ miuus eſſe latere recto figuræ diametri Τξ.

Fiat ΓΝ ad ΝΑ, ut & ΑΞ ad ΞΓ, ſicut ΑΓ ad latus rectum figuræ Axis ΑΓ; & è puncto Γ educantur rectæ, ΓΛ ipſi ΚΒ parallela & ΓΔ ipſi ξΤ parallela; & de punctis Δ, Λ demittantur normales ad Axem ΔΕ, ΛΜ. Cum autem ΓΝ eſt ad ΝΑ, ſicut & ΑΞ ad ΧΓ, iu ratione Axis ΑΓ ad latus rectum figuræ ejus; erit ΓΝ ipſi ΑΞ æqualis, ut & ΓΞ ipſi ΑΝ; ac proiude quadratum ex ΑΓ erit ad quadratum lateris recti ejus ut rectangulum ſub ΓΝ, ΑΞ ad quadratum ex ΑΝ. Sed Axis ΑΓ minor eſt latere recto ejus, at uou minor dimidio lateris recti; quare ΑΝ major eſt quam ΑΞ, at non major duplo ejus. Verum rectæ ΜΝ, ΝΑ ſimul ſumptæ majores ſunt duplo ipſius ΑΝ; unde rectangulum ſub ΜΝ, ΝΑ ſimul & ΑΞ majus eſt quadrato ex ΑΝ; [*quia ratio ipſarum* ΜΝ, ΝΑ *ſimul ſumptarum ad rectam* ΑΝ *major eſt ratione ipſius* ΑΝ *ad* ΑΧ:] rectangulum igitur ſub ΜΝ, ΝΑ ſimul & ΑΜ ad rectangulum ſub ΜΝ, ΝΑ ſimul & ΑΞ, hoc eſt ΜΑ ad ΑΞ, eſt in minore ratione quam couteutum ſub ΜΝ, ΝΑ ſimul & ΑΜ ad quadratum ex ΑΝ: ac *componendo* ratio ΜΞ ad ΞΑ minor erit ratione rectanguli ſub ΜΝ, ΝΑ ſimul & ΑΜ una cum quadrato ex ΑΝ ad quadratum ex ΑΝ. Eſt autem rectangulum ſub ΜΝ, ΝΑ ſimul & ΑΜ una cum quadrato ex ΑΝ æquale quadrato ex ΜΝ, *per* 6. II. *Elem.*: quare ratio ΜΞ ad ΞΑ minor eſt ratione quadrati ex ΜΝ ad quadratum ex ΑΝ. Cum autem ΜΞ eſt ad ΞΑ ut rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum ſub ΓΝ, ΑΞ; erit ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum ſub ΓΝ, ΑΞ minor ratione quadrati ex ΜΝ ad quadratum ex ΑΝ; ac permutando ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΝ minor erit ratione rectanguli ſub ΓΝ, ΑΞ ad quadratum ex ΑΝ. Sed rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ (per 15[am] hujus) eſt ad quadratum ex ΜΝ, ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum lateris recti diametri ΚΒ: ac rectaugulum ſub ΓΝ, ΑΞ eſt ad quadratum ex ΑΝ (per jam demonſtrata) ſicut quadratum Axis ΑΓ ad quadratum lateris recti figuræ Axis; ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad quadratum lateris recti diametri ΚΒ minor eſt ratioue ejuſdem quadrati ex ΑΓ ad latus rectum figuræ Axis: quare latus rectum Axis ΑΓ minus eſt latere recto diametri ΚΒ.



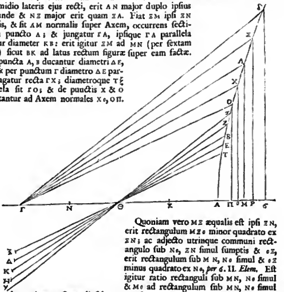
Quinetiam cum ΑΝ non ſit major duplo ipſius ΑΞ, erit ΜΝ minor duplo rectæ ΜΞ; ipſæ autem ΕΝ, ΝΜ ſimul ſumptæ majores ſuut duplo rectæ ΜΝ; quare rectangulum ſub ΜΞ & ΕΝ, ΝΜ ſimul majus eſt quadrato ex ΜΝ. Hinc ratio rectanguli ſub ΝΕ, ΜΝ ſimul & ΜΕ ad rectangulum ſub ΝΕ, ΜΝ ſimul & ΜΞ minor eſt ratione rectanguli ſub ΝΕ, ΜΝ ſimul & ΜΕ, *ad quadratum ex* ΜΝ; *adeoque ratio* ΜΕ *ad* ΜΞ *minor eſt ratione rectanguli ſub* ΝΕ, ΜΝ *ſimul &* ΜΕ *ad quadratum ex* ΜΝ; *ac componendo ratio* ΕΧ *ad* ΜΞ *minor erit ratione rectanguli ſub* ΕΝ, ΝΜ *ſimul &* ΕΜ uua cum quadrato ex ΜΝ, *hoc eſt* (*per* 6. II. *Elem.*) *quadrati ex* ΕΝ, ad quadratum ex ΜΝ: ratio itaque ΕΞ ad ΞΜ minor eſt ratione quadrati ex ΕΝ ad quadratum ex ΜΝ. Sed ΕΞ eſt ad ΞΜ ut rectangulum ſub ΓΝ, ΞΕ ad rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ; quare ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΞΕ ad rectangulum ſub ΓΝ, ΞΜ minor

minor eſt ratione quadrati ex ΕΝ ad quadratum ex ΜΝ. Permutando autem ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΧΕ ad quadratum ex ΕΝ minor eſt ratione rectanguli ſub ΓΝ, ΞΜ ad quadratum ex ΜΝ. Verum rectangulum ſub ΓΝ, ΞΕ (per 15^{tam} hujus) eandem habet rationem ad quadratum ex ΕΝ quam habet quadratum ex Axe ΑΓ ad quadratum lateris recti diametri ξΤ; ac, per eandem, rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ eſt ad quadratum ex ΜΝ ut idem quadratum ex ΑΓ ad quadratum lateris recti diametri ΒΚ. Ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad quadratum lateris recti diametri ξΤ minor eſt ratione ejuſdem ad quadratum lateris recti diametri ΒΚ: proinde latus rectum diametri ΒΚ minus eſt latere recto diametri ξΤ, uti latus rectum Axis ΑΓ minus eſt latere recto diametri ΚΒ. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXV.

SI vero Axis Hyperbolæ minor fuerit dimidio lateris recti figuræ ſuper Axem factæ. Dico ab utraque Axis parte reperiri diametrum, cujus latus rectum diametri duplum eſt; atque hoc latus rectum minus eſſe quovis alio latere recto cujuſcunque diametri ad idem ſectionis latus ductæ; latera etiam recta diametrorum reliquarum his duabus utrinque propiorum minora eſſe lateribus rectis remotiorum ab iiſdem.

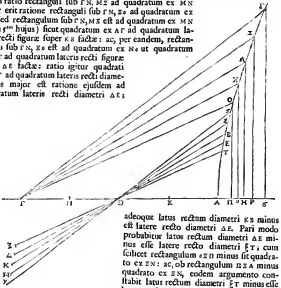
Dividatur recta ΑΓ in punctis Ξ, Ν, ita ut ΑΞ ſit ad ΞΓ ſicut Axis ΑΓ ad latus ejus rectum; ac ſit ΓΝ ad ΝΑ in eadem ratione. Cum autem Axis ΑΓ minor eſt dimidio lateris ejus recti, erit ΑΝ major duplo ipſius ΑΞ; unde & ΝΞ major erit quam ΞΑ. Fiat ΞΜ ipſi ΞΝ æqualis, & ſit ΛΜ normalis ſuper Axem, occurrens ſectioni in puncto Λ; & jungatur ΓΛ, ipſique ΓΛ parallela ducatur diameter ΚΒ: erit igitur ΞΜ ad ΜΝ (per ſextam hujus) ſicut ΒΚ ad latus rectum figuræ ſuper eam factæ. Inter puncta Α, Β ducantur diametri ΔΕ, Τξ; & per punctum Γ diametro ΔΕ parallela agatur recta ΓΧ; diametroque Τξ parallela ſit ΓΟ; & de punctis Χ & Ο demittantur ad Axem normales Χϑ, ΟΠ.



Quoniam vero ΜΞ æqualis eſt ipſi ΞΝ, erit rectangulum ΜΞϑ minor quadrato ex ΞΝ; ac adjecto utrinque communi rectangulo ſub Νϑ, ΞΝ ſimul ſumptis & ϑΞ, erit rectangulum ſub ΜΝ, Νϑ ſimul & ϑΞ minus quadrato ex Νϑ, *per* 6. II. *Elem.* Eſt igitur ratio rectanguli ſub ΜΝ, Νϑ ſimul & Μϑ ad rectangulum ſub ΜΝ, Νϑ ſimul & Ξϑ major ratione rectanguli ſub ΜΝ, Νϑ ſimul & Μϑ ad quadratum ex Νϑ. Sed rectangulum ſub ΜΝ, Νϑ ſimul & Μϑ eſt ad rectangulum ſub ΜΝ, Νϑ ſimul & Ξϑ

 ſicut

ſicut Μο ad Ξο; quare ratio Μο ad Ξο major eſt ratione rectanguli ſub ΜΝ, Νο ſimul & Μο ad quadratum ex Νο; ac componendo ratio ΜΞ ad Ξο major erit ratione rectanguli ſub ΜΝ, Νο ſimul & Μο una cum quadrato ex Νο ad quadratum ex Νο. Verum (*per* 6. II.) rectangulum ſub ΜΝ, Νο ſimul & Μο una cum quadrato ex Νο æquale eſt quadrato ex ΜΝ; quare ΜΞ eſt ad Χο in majori ratione quam quadratum ex ΜΝ ad quadratum ex Νο. Eſt autem ΜΞ ad Ξο ſicut rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum ſub ΓΝ, Ξο; adeoque ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum ΓΝ, Ξο major erit ratione quadrati ex ΜΝ ad quadratum ex Νο: permutando autem ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΝ major erit ratione rectanguli ſub ΓΝ, Ξο ad quadratum ex Νο. Sed rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ eſt ad quadratum ex ΜΝ (per 15^am hujus) ſicut quadratum ex ΑΓ ad quadratum lateris recti figuræ ſuper Κa factæ: ac, per eandem, rectangulum ſub ΓΝ, Ξο eſt ad quadratum ex Νο ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum lateris recti figuræ ſuper ΔΕ factæ: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad quadratum lateris recti diametri ΚΒ major eſt ratione ejuſdem ad quadratum lateris recti diametri ΔΕ;



adeoque latus rectum diametri ΚΒ minus eſt latere recto diametri ΔΕ. Pari modo probabitur latus rectum diametri ΔΕ minus eſſe latere recto diametri ξΤ; cum ſcilicet rectangulum οΞΠ minus ſit quadrato ex ΞΝ: ac, ob rectangulum ΠΞΑ minus quadrato ex ΞΝ, eodem argumento conſtabit latus rectum diametri ξΤ minus eſſe latere recto Axis ΑΓ.

Porro ſi ducantur diametri ΖΗ, τγ remotiores ab Axe quam ΚΒ. Dico latus rectum diametri ΚΒ minus eſſe latere recto diametri ΖΗ; ac latus rectum diametri ΖΗ minus eſſe latere recto diametri τγ. Per punctum Γ ducantur ipſis ΖΗ, τγ parallelæ, ut ΓΣ, Γδ; & de punctis Σ, δ demittantur normales ad Axem ΣΡ, δσ: erit igitur rectangulum ΡΞΜ majus quadrato ex ΝΞ; ac, procedendo juxta modum nuper traditum, demonſtrabitur rationem rectanguli ſub ΓΝ, ΞΡ ad quadratum ex ΝΡ minorem eſſe ratione rectanguli ſub ΓΝ, ΞΜ ad quadratum ex ΝΜ; unde manifeſtum eſt latus rectum diametri ΖΗ majus eſſe latere recto diametri ΚΒ. Cumque rectangulum σΞΡ majus eſt quadrato ex ΞΝ, erit latus rectum diametri τγ majus latere recto diametri ΖΗ. Q. E. D.

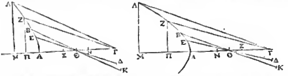
PROPOSITIO XXXVI.

SI in Hyperbola latera figuræ ſectionis ſuper Axem factæ fuerint inæqualia; differentia laterum figuræ Axis major erit differentiâ laterum figuræ ſuper quamvis aliam diametrum factæ: ac differentia hæc laterum figuræ major eſt in diametris Axi propioribus quam in remotioribus.

Sit

Sit Hyperbolæ Axis ΑΓ, ac centrum Θ; ac ſint aliæ quælibet diametri ΔΕ, ΒΚ: Dico differentiam inter latera figuræ Axis ΑΓ majorem eſſe differentiâ inter latera figuræ diametri ΔΕ; ac differentiam laterum figuræ diametri ΔΕ majorem eſſe differentiâ inter latera figuræ diametri ΒΚ.

Ducantur ΓΖ, ΓΛ ipſis ΔΕ, ΒΚ parallelæ; & de punctis Ζ, Λ cadant normales ΖΠ, ΛΜ ad Axem: ac fiant ΓΝ ad ΝΑ; ΑΞ ad ΞΓ in ratione Axis ΑΓ ad latus rectum figuræ ejus. Hinc quadratum ex ΑΓ erit ad quadratum differentiæ inter ΑΓ & latus ejus rectum ut rectangulum ſub ΓΝ, ΑΞ ad quadratum ex ΞΝ. Recta vero ΓΖ parallela eſt diametro ΔΕ, ac ΖΠ normalis eſt ſuper Axem; erit igitur rectangulum ſub ΓΝ, ΞΠ ad quadratum differentiæ inter ΞΠ & ΠΝ (per 16ᵃᵐ hujus) ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum differentiæ inter ΔΕ & latus rectum figuræ ſuper ΔΕ factæ. Differentia autem inter ΞΠ, ΠΝ eſt recta ΞΝ; quare quadratum



ex ΑΓ eſt ad quadratum differentiæ inter diametrum ΔΕ & latus rectum ejus, ut rectangulum ſub ΓΝ, ΞΠ ad quadratum ex ΞΝ. Ratio autem rectanguli ſub ΓΝ, ΞΠ ad quadratum ex ΞΝ major eſt ratione rectanguli ſub ΓΝ, ΑΞ ad quadratum ex ΞΝ; quare ratio quadrati Axis ΑΓ ad quadratum differentiæ inter ΔΕ & latus ejus rectum major eſt ratione ejuſdem quadrati ex ΑΓ ad quadratum differentiæ inter ΑΓ & latus ejus rectum: ac proinde differentia inter ΔΕ & latus ejus rectum minor eſt differentiâ inter ΑΓ & latus rectum figuræ ejus.

Pari modo cum ΓΛ parallela ſit diametro ΚΒ, ac ΛΜ normalis ſit ſuper Axem, rectangulum ſub ΓΝ, ΞΜ erit ad *quadratum* differentiæ inter ΜΞ, ΜΝ (*ſive ad quadratum ex* ΞΝ) ſicut quadratum ex ΑΓ ad quadratum differentiæ inter ΒΚ & latus rectum ejus, per 16ᵃᵐ hujus. Sed ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΞΝ major eſt ratione rectanguli ſub ΓΝ, ΞΠ ad idem quadratum ex ΞΝ; quare ratio quadrati ex ΑΓ ad quadratum differentiæ inter ΚΒ & ejus latus rectum major eſt ratione quadrati ex ΑΓ ad quadratum differentiæ *inter* ΔΕ & latus ejus rectum. Quapropter differentia inter ΒΚ & latus ejus rectum minor eſt differentiâ *inter* ΔΕ *& latus ejus rectum; & differentia inter* ΔΕ *& latus ejus rectum minor eſt differentia* inter ΑΓ & latus ejus rectum. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVII.

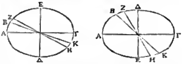
IN omni Ellipſi, ſi figuræ ſectionis fiant ſuper diametros lateribus ſuis rectis majores: erit differentia laterum figuræ ſuper Axem majorem factæ major differentiâ laterum figuræ ſuper quamvis aliam ex diametris illis factæ; ac differentia hæc in diametris Axi propioribus major erit quam in remotioribus: differentia autem laterum figuræ, in diametris lateribus ſuis rectis minoribus, maxima ſit inter Axem minorem & latus ejus rectum: quæque Axi minori propiores ſunt diametri majorem habent hanc differentiam quam ab eodem remotiores: differentia etiam inter latera figuræ Axis minoris major *eſt quam inter latera figuræ Axis majoris.*

Sit Ellipſeos Axis major ΑΓ, minor vero ΔΕ; ac ſint diametri aliæ ΚΒ, ΖΗ, quarum utraque major ſit latere ſuo recto. Dico differentiam inter ΑΓ & latus ejus rectum majorem eſſe differentia inter ΒΚ & latus ejus rectum; differentiam

vero inter ΒΚ & latus ejus rectum majorem eſſe differentia inter ΖΗ & latus ejus rectum.

Quoniam enim ΑΓ major eſt latere ejus recto, & ΚΒ major latere ejus recto; ac latus rectum diametri ΚΒ (per 24^am hujus) majus eſt latere recto figuræ Axis ΑΓ; erit differentia inter ΑΓ & latus ejus rectum major differentiâ inter ΒΚ & latus ejus rectum. Eodem modo probabitur differentiam inter ΒΚ & latus ejus rectum majorem eſſe differentiâ inter ΖΗ & latus rectum ejus.

Similiter ſi utræque ΒΚ, ΖΗ minores ſuerint quam latera ſua recta. Dico differentiam inter ΔΕ & latus ejus rectum majorem eſſe differentiâ inter ΖΗ & latus rectum ejus: ac differentiam inter ΖΗ & latus ejus rectum majorem eſſe differentia inter ΒΚ & latus ejus rectum.



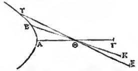
Quia Axis ΔΕ minor eſt quam ΖΗ, ac latus ejus rectum majus eſt latere recto diametri ΖΗ, per 24^am hujus; erit differentia inter ΔΕ & latus ejus rectum major differentia inter ΖΗ & latus ejus rectum: ac pari argumento differentia inter ΖΗ & latus ejus rectum major erit differentia inter ΚΒ & latus ejus rectum.

Porro cum latus rectum figuræ Axis minoris ΔΕ (per 15^am primi) ſit ad ΔΕ ſicut ΑΓ ad latus rectum figuræ Axis ΑΓ; ac, per eandem, latus rectum figuræ Axis ΔΕ majus ſit quam ΑΓ; erit differentia inter ΔΕ & latus ejus rectum *major* differentia inter ΑΓ & latus ejus rectum. [*Per converſionem enim rationis latus rectum Axis ΔΕ eſt ad differentiam inter ΔΕ & latus ejus rectum ſicut ΑΓ ad differentiam inter latera figuræ Axis ΑΓ, ac permutando.*] Q. E. D.

PROPOSITIO XXXVIII.

SI in Hyperbolâ latus tranſverſum figuræ Axis non minus fuerit tertiâ parte lateris ejus recti: ſumma utriuſque lateris figuræ ſectionis, ſuper quamlibet diametrum præter Axem factæ, major erit ſummâ laterum figuræ Axis ſimul ſumptorum; ac ſumma laterum figuræ ſuper diametrum Axi propiorem factæ minor erit quam latera figuræ diametri remotioris ſimul ſumpta.

Sit ΑΓ Hyperbolæ Axis, qui non ſit minor tertiâ parte lateris ejus recti; ac ſint ΚΒ, ΞΥ diametri duæ quævis aliæ. Dico quod latera duo figuræ Axis ΑΓ ſimul ſumpta minora ſunt lateribus figuræ diametri ΚΒ ſimul ſumptis, quodque latera figuræ ipſius ΚΒ minora ſunt lateribus figuræ diametri ΞΥ.



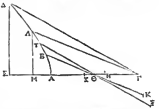
Primum ſit ΑΓ non minor latere ejus recto: & diameter ΚΒ major erit Axe ΑΓ, & diameter ΞΥ major diametro ΚΒ; latus etiam rectum diametri ΞΥ (per 33um hujus) majus erit latere recto diametri ΚΒ; & latus rectum diametri ΚΒ majus erit latere recto Axis ΑΓ: diameter igitur ΞΥ una cum latere ejus recto major erit diametro ΚΒ unà cum latere ejus recto: ac diameter ΚΒ unà cum latere ejus recto major erit Axe ΑΓ unà cum latere ejus recto. Latera igitur, figuram ſuper diametrum ΞΥ factam continentia, ſimul ſumpta majora ſunt lateribus figuræ diametri ΚΒ: atque hæc latera majora ſunt utroque latere figuræ ſuper ΑΓ factæ ſimul ſumpto. Q. E. D.

PROPO-

PROPOSITIO XXXIX.

VErum ſi Axis ΑΓ minor fuerit latere ejus recto, ſed non minor tertiâ parte ejuſdem lateris recti. Fiat ΓΝ ad ΝΑ & ΑΞ ad ΞΓ in ratione Axis ΑΓ ad latus ejus rectum; ac per punctum Γ ducantur utrique diametro Τξ, ΚΒ parallelæ, ut ΓΔ, ΑΓ; & de punctis Δ, Α demittantur ad Axem normales ΔΕ, ΑΜ.

Quoniam vero ΑΓ eſt ad latus ejus rectum ſicut ΑΞ ad ΞΓ, ac ΑΓ non eſt minor tertiâ parte lateris ejus recti; erit ΑΞ non minor tertiâ parte ipſius ΑΝ: unde etiam recta ΑΞ non minor erit quartâ parte ipſarum ΑΝ, ΑΞ ſimul ſumptarum, & rectangulum ſub ΑΝ, ΑΞ ſimul in quadruplum ipſius ΑΞ non minus erit quadrato ex ipſis ΑΝ, ΑΞ ſimul; adeoque ratio quadrupli rectanguli ſub ΝΑ, ΑΞ ſimul & ΑΜ ad quadruplum rectangulum ſub ΝΑ, ΑΞ ſimul & ΑΞ non major erit ratione quadrupli rectanguli ſub ΝΑ, ΑΞ ſimul & ΑΜ ad quadratum ex ipſis ΝΑ, ΑΞ ſimul ſumptis; ac componendo ratio ΜΞ ad ΞΑ non major erit ratione quadrupli rectanguli ſub ΝΑ, ΑΞ ſimul & ΑΜ una cum quadrato ex utrâque ΝΑ, ΑΞ ſimul ad quadratum ex ΝΑ, ΑΞ ſimul. Sed quater rectangulum ſub ΝΑ, ΑΞ ſimul & ΑΜ cum quadrato ex ΝΑ, ΑΞ ſimul (*per Lemm.*I. *Abdol.*) minus eſt quadrato ex ΞΜ, ΜΝ ſimul: adeoque ratio ΜΞ ad ΞΑ minor eſt ratione quadrati ex ΜΝ, ΜΞ ſimul ad quadratum ex ipſis ΝΑ, ΑΞ ſimul ſumptis. Sed ΜΞ eſt ad ΞΑ ut rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum ſub ΓΝ, ΞΑ; quare ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum ſub ΓΝ, ΞΑ minor eſt ratione quadrati ex ΜΝ, ΜΞ ſimul ad quadratum ex ΝΑ, ΑΞ: ac permutando, ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ex ΜΝ, ΜΞ ſimul minor eſt ratione facti ſub ΓΝ, ΞΑ ad quadratum ex ΝΑ, ΑΞ ſimul. Verum rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ (per 17^{am} hujus) eſt ad quadratum ex ΜΝ, ΜΞ ſimul, ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum diametri ΚΒ unà cum latere ejus recto ſimul ſumptæ; ac rectangulum ſub ΓΝ, ΑΞ



eſt ad quadratum ex ΝΑ, ΑΞ ſimul, ſicut quadratum Axis ΑΓ ad quadratum ex ΑΓ una cum latere ejus recto ſimul ſumpto: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad quadratum ſummæ laterum figuræ diametri ΚΒ minor eſt ratione ejuſdem quadrati ex ΑΓ ad quadratum ſummæ laterum figuræ ſuper Axem ΑΓ factæ; ac proinde ſumma laterum figuræ diametri ΚΒ major eſt ſummâ laterum figuræ Axis ΑΓ.

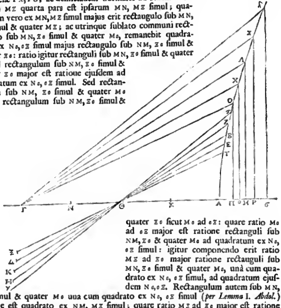
Quinetiam cum ΜΞ major ſit quartâ parte ipſarum ΜΝ, ΜΞ ſimul ſumptarum, erit quadruplum rectanguli ſub ΜΝ, ΜΞ *ſimul & ΜΞ* majus quadrato ex ΜΝ, ΜΞ ſimul ſumptis: unde argumento ſupra uſitato probabitur, rationem rectanguli ſub ΓΝ, ΞΕ ad quadratum ex ΝΕ, ΕΞ ſimul minorem eſſe ratione rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad quadratum ipſarum ΜΝ, ΜΞ ſimul. Sed rectangulum ſub ΓΝ, ΞΕ (per 17^{am} hujus) eſt ad quadratum ex ΝΕ, ΕΞ ſimul, ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ſummæ laterum figuræ diametri ξΤ; ac rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ eſt ad quadratum ex ipſis ΜΝ, ΜΞ ſimul, ſicut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ſummæ laterum figuræ diametri ΒΚ: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad quadratum ſummæ laterum figuræ diametri ξΤ minor eſt ratione ejuſdem ad quadratum ſummæ laterum figuræ diametri ΚΒ. Quapropter latera figuræ ſuper diametrum ξΤ factæ ſimul ſumpta majora ſunt lateribus figuræ ſuper diametrum ΚΑ factæ ſimul; prout latera figuræ ſuper ΚΒ majora ſunt lateribus figuræ Axis ſimul ſumptis. Q. E. D.

PROPOSITIO XL.

SI vero in Hyperbolâ Axis tranſverſus minor fuerit tertiâ parte lateris ejus recti datur: ab utrâque Axis parte diameter una tertiæ parti lateris ſui recti æqualis, cujus latera figuræ ſimul

ſumpta minorem efficiunt ſummam quam latera figuræ cujuſvis alterius diametri ad eandem Axis partem ductæ; latera quoque figuræ, ſuper diametrum huic utrinque propiorem factæ, ſimul ſumpta minora ſunt lateribus figuræ ſuper remotiorem ab eadem factæ.

Repetatur figura in Propoſitione 35ª adhibita, ac ſit AΞ jam minor tertiâ parte ipſius AN, unde & minor erit dimidio ipſius ΞN. Fiat MΞ æqualis dimidio ipſius ΞN; & erectâ MΛ normali ſuper Axem jungatur ΓΛ, ipſique ΓΛ parallela ducatur ſectionis diameter KB. Eſt autem (per 6ᵃᵐ hujus) MΞ ad MN ſicut KB ad latus rectum figuræ ejus, ac MΞ eſt pars tertia ipſius MN; quare & KB tertia pars eſt lateris ejus recti. Ducantur inter A & B diametri quælibet ut ΔE, ξT, iiſdemque parallelæ ΓX, ΓO; ac demittantur normales ad Axem Xo, OΠ.



Jam MΞ quarta pars eſt ipſarum MN, MΞ ſimul; quadratum vero ex MN, MΞ ſimul majus erit rectangulo ſub MN, Ξo ſimul & quater MΞ; ac utrinque ſublato communi rectangulo ſub MN, Ξo ſimul & quater Mo, remanebit quadratum ex No, oΞ ſimul majus rectangulo ſub NM, Ξo ſimul & quater Ξo: ratio igitur rectanguli ſub MN, Ξo ſimul & quater Mo ad rectangulum ſub NM, Ξo ſimul & quater Ξo major eſt ratione ejuſdem ad quadratum ex No, oΞ ſimul. Sed rectangulum ſub NM, Ξo ſimul & quater Mo eſt ad rectangulum ſub NM, Ξo ſimul & quater Ξo ſicut Mo ad oΞ: quare ratio Mo ad oΞ major eſt ratione rectanguli ſub NM, Ξo & quater Mo ad quadratum ex No, oΞ ſimul: igitur componendo erit ratio MΞ ad Ξo major ratione rectanguli ſub MN, Ξo ſimul & quater Mo, unà cum quadrato ex No, oΞ ſimul, ad quadratum ejuſdem No, oΞ. Rectangulum autem ſub MN, Ξo ſimul & quater Mo una cum quadrato ex No, oΞ ſimul (*per Lemma* I. *Abdol.*) æquale eſt quadrato ex NM, MΞ ſimul; quare ratio MΞ ad Ξo major eſt ratione quadrati ex NM, MΞ ſimul ad quadratum ex No, oΞ ſimul. Verum MΞ eſt ad Ξo ſicut rectangulum ſub ΓN, MΞ ad rectangulum ſub ΓN, Ξo; quare ratio rectanguli ſub ΓN, MΞ ad rectangulum ſub ΓN, Ξo major eſt ratione quadrati ex MN, MΞ ſimul ad quadratum ex No, oΞ: ac permutando ratio rectanguli ſub ΓN, MΞ ad quadratum ex MN, MΞ ſimul major eſt ratione rectanguli ſub ΓN, Ξo ad quadratum ex No, oΞ ſimul. Eſt autem rectangulum ſub ΓN, MΞ ad quadratum ex MN, MΞ ſimul (per 17ᵃᵐ hujus) ſicut quadratum ex AΓ ad quadratum ſummæ laterum figuræ diametri KB: ac (per eandem 17ᵃᵐ) rectangulum ſub ΓN, Ξo eſt ad quadratum ex No, oΞ ſimul ſicut quadratum ex AΓ ad quadratum ſummæ laterum figuræ diametri ſectionis ΔE. Ratio igitur quadrati ex AΓ ad quadratum ſummæ

diametri

laterum figuræ diametri ΚΒ major eſt ratione ejuſdem ad qoadratum laterum figuræ diametri ΔΕ ſimul ſumptorum. Quocirca latera figuræ diametri ΚΒ minora ſunt lateribus figuræ diametri ΔΕ.

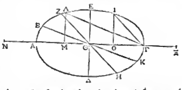
Porro cum quadratum ipſarum Νθ, θΞ ſimul ſumptarum majus eſt rectangulo ſub Νθ, ΞΠ ſimul & quater ΞΠ; eodem, quo præcedentia demonſtravimus, modo probabitur latera figuræ diametri ΔΕ minora eſſe lateribus figuræ diametri ξΤ ſimul ſumptis. Nec abſimili argumento, cum rectangulum ſub ΝΠ, ΞΑ & quater ΑΞ minus ſit quadrato ex ΝΠ, ΠΞ ſimul, conſtabit latera figuræ diametri ξΤ minora eſſe lateribus figuræ Axis ΑΓ ſimul ſumptis.

Ducantur jam diametri aliæ remotiores ab Axe quam ΚΒ, ſicut ΖΗ, τγ; iiſdemque parallelæ ſint ΓΣ, Γδ; ac de punctis Σ, δ demittantur normales ad Axem ut ΣΡ, δσ: ac erit rectangulum ſub ΡΝ, ΜΞ ſimul & quater ΜΞ majus quadrato ex ΜΝ, ΜΞ ſimul. Adjecto autem communi rectangulo ſub ΡΝ, ΜΞ ſimul & quater ΡΜ, *erit rectangulum ſub* ΡΝ, ΜΞ *ſimul & quater* ΡΞ *majus quadrato ex* ΝΡ, ΡΞ *ſimul*; & eâdem argumentandi methodo, qua in præcedentibus uſi ſumus, manifeſtum erit latera figuræ diametri ΖΗ majora eſſe lateribus figuræ diametri ΒΚ. Pari modo demonſtrabitur latera figuræ diametri τγ majora eſſe lateribus figuræ diametri ΖΗ, ex eo quod rectangulum ſub σΝ, ΡΞ ſimul & quater ΡΞ majus eſt quadrato ex ΡΝ, ΞΡ ſimul. Q. E. D.

PROPOSITIO XLI.

IN omni Ellipſi latera figuræ Axis majoris ſimul ſumpta minora ſunt lateribus figuræ cujuſcunque alterius diametri: ac latera figuræ diametri Axi majori propioris minora ſunt lateribus figuræ diametri remotioris ab eodem: latera vero figuræ Axis minoris ſimul ſumpta majora ſunt lateribus figuræ ſuper quamlibet aliam diametrum factæ.

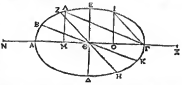
Sit ΑΓ Axis major Ellipſeos, minor vero ΔΕ; diametri autem aliæ ſint ΚΒ, ΖΗ, quibus parallelæ ducantur ΓΛ, ΓΙ; & ad Axem demittantur normales ΛΜ, ΙΟ; ac fiat ΓΝ ad ΝΑ, ut & ΑΞ ad ΞΓ, ſicut Axis ΑΓ ad latus rectum figuræ Axis: & erit quadrstum ex ΑΓ ad quadratum rectæ ipſi ΑΓ una cum latere ejus recto ſimul æqualis, ſicut quadratum ex ΝΓ, ſive rectangulum ſub ΝΓ, ΑΞ, ad quadratum ex ΝΞ. Sed quadratum ex ΑΓ eſt ad quadratum ex ΔΕ ſicut ΝΓ ad ΓΞ, quia (per 15^{am} primi) demonſtratum eſt quadratum ex ΑΓ eſſe ad quadratum ex ΔΕ ſicut ΑΓ ad latus ejus rectum; ΝΓ autem eſt ad ΓΞ ſicut rectangulum ſub ΝΓ, ΓΞ ad quadratum ex ΓΞ: quadratum etiam ex ΔΕ eſt ad quadratum rectæ æqualis utriſque ΔΕ & lateri recto ejuſdem ſimul, ut quadratum ex ΓΞ eſt ad quadratum ex ΝΞ, per eandem 15^{am} primi: ex æquo igitur quadratum ex ΑΓ eſt ad quadratum ex utrâque ΔΕ & latere recto ejuſdem, ſicut rectangnlum ſub ΝΓ, ΓΞ ad quadratum ex ΝΞ. Sed rectangulum ſub ΝΓ, ΑΞ eſt ad quadratum ex ΝΞ ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum compoſitæ ex ΑΓ & latere ejus recto: ratio igitur



Axis ΑΓ ad ΑΓ nna cum latere ejns recto ſimol major eſt ratione ipſius ΑΓ ad ΔΕ una cum latere recto ejuſdem ΔΕ ſimul. Latera igitur figuræ Axis majoris ΑΓ minora ſunt lateribus figuræ Axis minoris ΔΕ ſimul ſumptis.

Jam rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ eſt ad quadratum ex ΝΞ (per 17^{am} hujus) ſicut quadratum ex ΑΓ ad quadratum diametri ΚΒ una cum latere ejus recto; quare ratio ipſius ΑΓ ad ΑΓ una cum latere ejus recto major eſt ratione ejuſdem ΑΓ ad ΚΒ cum latere ejus recto ſimul: ac proinde latera figuræ ſuper ΑΓ factæ minora ſunt lateribus figuræ diametri ΚΒ. Quioetiam cum rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ eſt

ad quadratum ex ΝΞ ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum diametri ΚΒ una cum latere ejus recto; ac rectangulum ΝΓ, ΞΟ eſt ad quadratum ex ΝΞ (per eandem 17^{am}) ſicut quadratum ex ΑΓ ad quadratum diametri ΖΗ una cum latere ejus recto ſimul: erit igitur ratio ΑΓ ad ΚΒ una cum latere ejus recto major ratione ejuſdem ad ΖΗ una cum latere ejus recto: proinde latera figuræ diametri ΚΒ ſimul minora ſunt lateribus figuræ diametri ΖΗ. Quoniam vero rectangulum ſub ΓΝ, ΞΟ eſt ad quadratum ex ΝΞ ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum diametri ΖΗ una cum latere ejus recto; ac, per nuper demonſtrata, rectangulum ſub ΝΓ, ΓΞ eſt ad quadratum ex ΝΞ ut quadratum ex ΑΓ ad quadratum Axis minoris ΔΕ una cum latere ejus recto ſimul; erit ratio ΑΓ ad ΖΗ & latus ejus rectum ſimul major ratione ejuſdem ad ΔΕ una cum latere ejus recto. Unde latera figuræ diametri ΖΗ ſimul minora ſunt lateribus figuræ Axis ΔΕ ſimul ſumptis. Q. E. D.

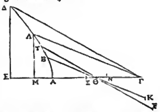


PROPOSITIO XLII.

Figura Axis, in ſectione Hyperbolica, minor eſt figura cujuſvis alterius diametri; ac diametri Axi propiores minores habent figuras quam quæ ab eodem remotiores ſunt.

Sit Hyperbolæ Axis ΑΓ, diametri autem quævis aliæ ΚΒ, ξΤ. Dico figuram ſuper ΑΓ factam minorem eſſe factâ ſuper quamlibet aliam diametrum præter Axem: ac figuram diametri ΚΒ minorem eſſe figura diametri ξΤ.

Ducantur rectæ ΓΛ, ΓΔ diametris ΚΒ, ξΤ parallelæ; ac demittantur normales ad Axem ΛΜ, ΔΕ; ac fiat ΓΝ ad ΝΑ ſicut ΑΓ ad latus rectum figuræ ſuper ΑΓ factæ: erit igitur ΓΝ ad ΝΑ ut quadratum ex ΑΓ ad figuram ſectionis ſuper Axem factam; ac ΓΝ eſt ad ΝΜ (per 18^{vam} hujus) ſicut quadratum ex ΑΓ ad figuram diametri ΚΒ. Ratio autem ΓΝ ad ΝΑ major eſt ratione ejuſdem ad ΝΜ; quare ratio quadrati ex ΑΓ ad figuram ſuper ΑΓ factam major eſt ratione ejuſdem ad figuram ſuper ΚΒ factam: adeoque figura Axis ΑΓ minor eſt figura diametri ΚΒ. Porro (per 18^{vam} hujus) ΓΝ eſt ad ΝΕ ſicut quadratum ex ΑΓ ad figuram ſuper ξΤ factam, ac ΓΝ eſt ad ΝΜ ſicut quadratum ex ΑΓ ad figuram diametri ΚΒ; ratio autem ΓΝ ad ΝΜ major eſt ratione ejuſdem ad ΝΕ: erit igitur ratio quadrati ex ΑΓ ad figuram diametri ΚΒ major ratione ejuſdem ad figuram diametri ξΤ; ac proinde figura ſuper ΚΒ facta major eſt factâ ſuper ξΤ. Q. E. D.



PROPOSITIO XLIII.

Figura Axis majoris in Ellipſi minor eſt figurâ cujuſlibet alterius diametri; maxima autem figura ea eſt quæ fit ſuper Axem minorem: figura quoque diametri Axi majori propioris minor eſt factâ ſuper remotiorem ab eodem. Vide figuram Prop. XLI.

Sit Ellipſeos Axis major ΑΓ, minor ΔΕ, ac aliæ quævis diametri ΚΒ, ΖΗ. Dico figuram Axis ΑΓ minorem eſſe figurâ diametri ΚΒ; ac figuram ipſius ΚΒ minorem eſſe factâ ſuper diametrum ΖΗ: denique figuram ipſius ΖΗ minorem eſſe figurâ ſuper Axem minorem ΔΕ factâ.

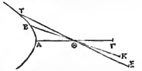
Ducantur

Ducantur ΓΛ, ΓΙ ipſis ΚΒ, ΖΗ parallelæ, ac demittantur ad Axem normales ΛΜ, ΙΟ; fiat etiam ΓΝ ad ΝΑ ſicut ΑΓ ad latus ejus rectum: unde quadratum ex Axe ΑΓ erit ad figuram ſuper Axe factam ſicut ΓΝ ad ΝΑ. Sed quadratum ex ΑΓ (per 15[tam] primi) æquale eſt figuræ Axis minoris ΔΕ; quare figura Axis ΑΓ minor eſt factâ ſuper Axe minore ΔΕ. Quoniam vero ΓΝ eſt ad ΝΜ (per 18[vam] hujus) ſicut quadratum ex ΑΓ ad figuram diametri ΚΒ; pariterque ΓΝ eſt ad ΝΟ ut quadratum ex ΑΓ ad figuram diametri ΖΗ; ut eſt ΓΝ ad ΝΓ ſicut quadratum ex ΑΓ ad figuram Axis ΔΕ: ΑΝ autem minor eſt quam ΝΜ, ac ΝΜ quam ΝΟ, ac ΝΟ quam ΝΓ: erit igitur figura Axis ΑΓ minor figura diametri ΚΒ; & figura ſuper ΚΒ facta minor erit figura diametri ΖΗ; ac figura diametri ΖΗ minor erit figura Axis ΔΕ. Q. E. D.

PROPOSITIO XLIV.

IN Hyperbola, ſi vel latus tranſverſum figuræ Axis non minus fuerit latere ejus recto; vel ſi minus fuerit eo, quadratum vero ejus non minus fuerit dimidio quadrati differentiæ inter latera figuræ: erunt quadrata è lateribus figuræ Axis ſimul ſumpta minora quadratis laterum figuræ, ſuper quamlibet aliam ſectionis diametrum factæ, ſimul ſumptis.

Sit Hyperbolæ Axis ΑΓ, ac quælibet aliæ diametri ΚΒ, ΞΤ; ac ſive ΑΓ non minor fuerit latere ejus recto, vel ſi minor fuerit eo, modo quadratum ex ΑΓ non minus fuerit dimidio quadrati differentiæ inter Axem & latus ejus rectum. Dico ſummam quadratorum laterum figuræ Axis minorem eſſe quadratis laterum figuræ diametri ΚΒ ſimul ſumptis; quadrata vero laterum figuræ ſuper ΚΒ factæ ſimul minora eſſe quadratis laterum figuræ diametri ΞΤ.



Imprimis autem ſit ΑΓ non minor latere ejus recto; ac (per 33[tam] hujus) erit latus rectum diametri ΚΒ majus latere recto Axis ΑΓ; & (per eandem) latus rectum diametri ΞΤ majus erit latere recto diametri ΚΒ; ΑΓ autem minor eſt quam ΚΒ, ac ΚΒ quam ΞΤ: proinde quadrata laterum figuræ Axis ΑΓ minora ſunt quadratis laterum figuræ diametri ΚΒ; ac quadrata laterum figuræ diametri ΚΒ minora ſunt quadratis laterum figuræ ΞΤ ſimul ſumptis. Q. E. D.

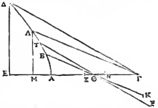
PROPOSITIO XLV.

SI vero Axis minor fuerit quam latus ejus rectum, quadratum autem ejus non minus dimidio quadrati differentiæ inter Axem & latus ejus rectum. Dico eadem etiam conſequi quæ in proximâ Propoſitione demonſtravimus.

Maneat figura Propoſitionis XLII. præcedentis; ac fiat ΓΝ ad ΝΑ ut & ΑΞ ad ΞΓ in ratione ipſius ΑΓ ad latus ejus rectum: duplum igitur quadrati ex ΑΞ non minus erit quadrato ex ΝΞ (quia ΑΞ ipſi ΓΝ æqualis eſt, ac ΑΓ eſt ad latus ejus rectum ſicut ΑΞ ad ΞΓ; ac quadratum ex ΑΓ non minus eſt dimidio quadrati differentiæ inter ΑΓ & latus ejus rectum.) Ductis autem ſectionis diametris ΚΒ, ΞΤ, parallelæ agantur rectæ ΓΔ, ΓΛ; & demittantur ad Axem normales ΔΕ, ΛΜ.

Quoniam vero ΑΓ eſt ad latus ejus rectum ſicut ΓΝ ad ΝΑ, atque etiam ut ΑΞ ad ΞΓ; ac duplum quadrati ex ΑΞ non minus eſt quadrato ex ΞΝ: duplum rectangulum ſub ΜΞ, ΑΞ majus erit quadrato ex ΞΝ. Adjiciatur utrinque duplum rectangulum ſub ΝΑ, ΑΞ; & duplum rectangnlum ſub ΜΝ, ΑΞ ſimul & ΑΞ majus erit duplo rectangulo ſub ΝΑ, ΑΞ una cum quadrato ex ΞΝ ſimul: hoc eſt, majus erit quadratis ex ΝΑ, ΑΞ ſimul, *per* 7. II. *El.* Quocirca ratio dupli rectanguli ſub ΝΜ, ΑΞ

& ΜΑ ad duplum rectangulum ſub ΝΜ, ΑΞ & ΞΑ minor eſt ratione ejuſdem ad quadrata ex ΝΑ, ΑΞ ſimul. Sed duplum rectangulum ſub ΜΝ, ΑΞ ſimul & ΑΜ eſt ad duplum rectangulum ſub ΜΝ, ΑΞ ſimul & ΑΞ, ſicut ΑΜ ad ΑΞ; quare ratio ΑΜ ad ΑΞ minor eſt ratione dupli rectanguli ſub ΜΝ, ΑΞ ſimul & ΜΑ ad quadrata ex ΝΑ, ΑΞ ſimul. Quadrata autem ex ΝΜ, ΜΞ ſimul (*per Lemma* II. *Abdolm.*) *æqualia* ſunt quadratis ex ΝΑ, ΑΞ ſimul una cum duplo rectangulo ſub ΝΜ, ΑΞ ſimul & ΑΜ: *componendo* igitur ratio ΜΞ ad ΞΑ minor erit ratione quadratorum ex ΝΜ & ΜΞ ſimul ad quadrata ex ΝΑ & ΑΞ ſimul. Sed ΜΞ eſt ad ΞΑ ut rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum ſub ΓΝ, ΞΑ; quare ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum ſub ΓΝ, ΞΑ minor eſt ratione quadratorum ex ΝΜ & ΜΞ ſimul ad quadrata ex ΝΑ & ΑΞ ſimul. Permutando autem ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad quadrata ex ΝΜ & ΜΞ ſimul minor eſt ratione rectanguli ſub ΓΝ, ΑΞ ad quadrata ex ΝΑ & ΑΞ ſimul. Verum rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ (per 19^am hujus) eſt ad quadrata ex ΝΜ & ΜΞ ſimul, ut quadratum ex ΑΓ ad quadrata laterum figuræ diametri ΚΒ ſimul; ac rectangulum ſub ΓΝ, ΞΑ, *ſive quadratum ex* ΞΑ, eſt ad quadrata ex ΝΑ & ΑΞ ſimul, ſicut quadratum ex ΑΓ ad quadrata laterum figuræ Axis ΑΓ; ut manifeſtum eſt ex præmiſſis: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad ſummam quadratorum laterum figuræ diametri Κa minor eſt ratione ejus ad ſummam quadratorum laterum figuræ Axis ΑΓ: quadrata igitur laterum figuræ ſuper Κa factæ ſimul majora ſunt quadratis laterum figuræ Axis ſimul ſumptis. Quoniam vero duplum quadrati ex ΜΞ majus eſt quadrato ex ΞΝ, ac duplum rectangulum ſub ΕΞ, ΞΜ majus eſt quadrato ex ΝΞ; modo in præcedentibus uſurpato, probabitur quadrata laterum figuræ diametri ξΤ majora eſſe quadratis laterum figuræ diametri Κa. Q. E. D.



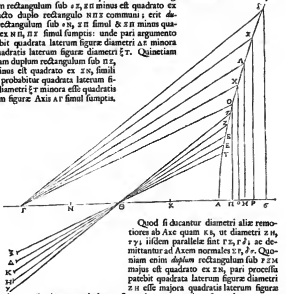
PROPOSITIO XLVI.

SI vero quadratum Axis tranſverſi minus fuerit dimidio quadrati differentiæ inter Axem & latus ejus rectum: ab utrâque parte Axis reperietur diameter cujus quadratum æquatur dimidio quadrati differentiæ inter ipſam & latus ejus rectum; ac ſumma quadratorum laterum figuræ ejus minor erit quadratis laterum figuræ cujuſcunque alterius diametri ab utrôque ejus parte ſumendæ: ſumma quoque quadratorum laterum figuræ ſuper diametrum huic propiorem factæ minor erit ſummâ quadratorum laterum figuræ diametri remotioris ab eâdem.

Sint ΓΝ ad ΝΑ, ſicut ΑΞ ad ΞΓ, in eadem ratione quam habet ΑΓ ad latus ejus rectum; ac ſit duplum quadrati ex ΑΞ minus quadrato ex ΝΞ. Fiat duplum quadrati ex ΜΞ æquale quadrato ex ΝΞ, & ad punctum Μ erigatur Axi normalis ΜΛ, ac junctâ ΓΛ eidem parallela ducatur diameter ΚΘa: erit igitur ΜΞ ad ΜΝ (per 6^am hujus) ſicut Κa ad latus rectum ejuſdem, adeoque quadratum ex ΚΒ æquale erit dimidio quadrati differentiæ inter eam & latus ejus rectum.

Ducantur jam inter puncta Λ, a aliæ quævis diametri ut ΔΕ, ξΤ, iiſdemque parallelæ ΓΧ, ΓΟ; & Axi normales ſint Χφ, ΟΠ. Quoniam autem duplum quadrati ex ΜΞ æquale eſt quadrato ex ΞΝ, erit duplum rectangulum ſub ΜΞ, Ξφ minus quadrato ex ΞΝ; ac, facto duplo rectangulo ſub φΝ, Ξφ communi, erit duplum rectanguli ſub ΜΝ, Ξφ ſimul & Ξφ minus *duplo rectangulo ſub* φΝ, Ξφ *& quadrato ex* ΞΝ *ſimul; hoc eſt* (*per* 7. II. *El.*) quadratis ex φΝ, Ξφ. Unde eodem omnino argumentandi modo, quo uſi ſumus in Propoſitione præcedente, manifeſtum erit quadrata laterum figuræ

figuræ diametri ΚΒ minora eſſe quadratis laterum figuræ diametri ΔΕ. Cumque duplum rectangulum ſub ΘΞ, ΞΠ minus eſt quadrato ex ΞΝ, facto duplo rectangulo ΝΠΞ communi; erit *duplum* rectangulum ſub ΘΝ, ΞΠ ſimul & ΞΠ minus quadratis ex ΝΠ, ΠΞ ſimul ſumptis: unde pari argumento conſtabit quadrata laterum figuræ diametri ΔΕ minora eſſe quadratis laterum figuræ diametri ξΤ. Quinetiam quoniam duplum rectangulum ſub ΠΞ, ΞΛ minus eſt quadrato ex ΞΝ, ſimili modo probabitur quadrata laterum figuræ diametri ξΤ minora eſſe quadratis laterum figuræ Axis ΑΓ ſimul ſumptis.



Quod ſi ducantur diametri aliæ remotiores ab Axe quam ΚΒ, ut diametri ΖΗ, τγ; iiſdem parallelæ ſint ΓΣ, Γδ; ac demittantur ad Axem normales ΣΡ, δσ. Quoniam enim *duplum* rectangulum ſub ΡΞΜ majus eſt quadrato ex ΞΝ, pari proceſſu patebit quadrata laterum figuræ diametri ΖΗ eſſe majora quadratis laterum figuræ diametri ΚΒ. Denique cum *duplum* rectangulum σΞΡ majus eſt quadrato ex ΞΝ, eodem modo demonſtrabitur quadrata laterum figuræ diametri τγ majora eſſe quadratis laterum figuræ diametri ΖΗ. Q. E. D.

PROPOSITIO XLVII.

IN Ellipſi, ſi quadratum lateris tranſverſi figuræ Axis majoris non majus fuerit dimidio quadrati ſummæ laterum figuræ ejus: erunt quadrata laterum figuræ Axis majoris ſimul ſumpta minora quadratis laterum figuræ cujuſcunque alterius diametri; ac quadrata laterum figuræ diametri Axi propioris ſimul ſumpta minora erunt quadratis laterum figuræ diametri remotioris ab eodem; maxima autem quadratorum ſumma fiet ex lateribus figuræ Axis minoris.

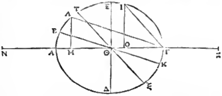
Sit Ellipſeos Axis major ΑΓ, minor vero ΔΕ; ſitque quadratum Axis ΑΓ non majus dimidio quadrati ſummæ laterum figuræ ejus: ſint etiam aliæ ſectionis diametri ΚΒ, ξΤ, quibus ducantur parallelæ ΓΛ, ΓΙ; ac demittantur ad Axem normales ΛΜ, ΙΟ.

Fiat ΓΝ ad ΝΑ & ΑΞ ad ΞΓ in ratione Axis ΑΓ ad latus ejus rectum; ac rectangulum ſub ΝΓ, ΑΞ, *ſive quadratum ex* ΑΞ, erit ad quadrata ex ΝΓ, ΓΞ ſimul ut quadratum ex ΑΓ ad quadrata laterum figuræ ſuper ΑΓ factæ. Latus autem rectum figuræ Axis minoris ΔΕ eſt ad ΔΕ ſicut ΓΝ ad ΓΞ: quia ΓΝ eſt ad ΓΞ, ſicut ΑΓ ad latus ejus rectum, ac ΑΓ eſt ad latus ejus rectum (per 15^{am} primi) ut

 latus

latus rectum Axis ΔΕ ad ipſam ΔΕ. Verum latus rectum Axis ΔΕ (per eandem 15^{tam} primi) eſt ad ipſam ΔΕ ſicut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΔΕ; ac ΝΓ eſt ad ΓΞ ſicut rectangulum ΝΓΞ ad quadratum ex ΓΞ: erit igitur rectangulum ΝΓΞ ad quadratum ex ΓΞ ſicut quadratum ex ΑΓ ad quadratum ex ΔΕ. Quadratum autem ex ΓΞ eſt ad ſummam quadratorum ex ΝΓ & ΓΞ ſicut quadratum Axis ΔΕ ad ſummam quadratorum ex lateribus figuræ ſuper ΔΕ factæ: ex æquo igitur rectangulum ΝΓΞ erit ad ſummam quadratorum ex ΝΓ & ΓΞ ſicut quadratum ex ΑΓ ad ſummam quadratorum laterum figuræ ſuper ΔΕ factæ. Rectangulum autem ſub ΝΓ & ΑΞ eſt ad quadrata ex ΝΓ, ΓΞ ſimul ſicut quadratum ex ΑΓ ad quadrata laterum figuræ ipſius ΑΓ.

Quadratum autem ex ΑΓ non majus eſt dimidio quadrati ſummæ laterum figuræ ejus: duplum igitur rectanguli ſub ΝΓ, ΑΞ non erit majus quadrato ex ΝΞ; ac proinde quod fit ſub ΝΓ, ΜΞ bis minus erit quadrato ex ΝΞ. Sublato itaque utrinque communi rectangulo ΝΜ, ΜΞ bis; erit reſiduum rectangulum ſub ΜΓ, ΜΞ bis minus quadratis ex ΝΜ, ΜΞ ſimul: ratio igitur dupli rectanguli ſub ΑΜ, ΜΓ ad duplum rectangulum ſub ΜΓ, ΜΞ, ſive ratio ΑΜ ad ΜΞ, major erit ratione rectanguli dupli ſub ΑΜ, ΜΓ ad quadrata ex ΝΜ, ΜΞ ſimul. Sed duplum rectangulum ſub ΑΜ, ΜΓ una cum quadratis ex ΝΜ, ΜΞ ſimul (*per Lemma* III. *Abdolm.*) æqualia ſunt quadratis ex ΝΓ, ΓΞ, ob æquales ΑΝ, ΓΞ: quare componendo erit ratio ΑΞ ad ΞΜ major ratione quadratorum ex ΝΓ & ΓΞ ad quadrata ex ΝΜ, ΜΞ ſimul; adeoque ratio rectanguli ſub ΝΓ, ΑΞ ad rectangulum ſub ΝΓ, ΞΜ major erit ratione quadratorum ex ΝΓ, ΓΞ ad quadrata ex ΝΜ, ΜΞ. Permutando autem ratio rectanguli ſub ΝΓ, ΑΞ ad quadrata ex ΝΓ, ΓΞ ſimul major erit ratione rectanguli ſub ΝΓ, ΜΞ ad quadrata ex ΝΜ, ΜΞ ſimul: atque ſupra demonſtratum eſt rectangulum ſub ΝΓ, ΑΞ eſſe ad quadrata ex ΝΓ, ΓΞ ſimul ſicut quadratum ex ΑΓ ad ſummam quadratorum laterum figuræ ejus. Sed & (per 19^{am} hujus) rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ eſt ad ſummam quadratorum ex ΝΜ, ΜΞ, ſicut quadratum ex ΑΓ ad ſummam quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad quadrata laterum figuræ ejus ſimul major eſt ratione ejuſdem ad quadrata laterum figuræ diametri ΚΒ; adeoque quadrata laterum figuræ Axis majoris ΑΓ minora ſunt quadratis laterum figuræ diametri ΚΒ ſimul ſumptis.



Jam vero ΜΝ vel minor erit quam ΟΞ, vel non minor erit eâ. Imprimis autem ſit minor eâ. Unde quadrata ex ΜΝ, ΜΞ ſimul majora erunt quadratis ex ΝΟ, ΟΞ ſimul; ac quadrata ex ΝΟ, ΟΞ ſimul majora ſunt rectangulo ſub ΟΞ & dupla differentia ipſarum ΟΞ, ΜΝ; quare ratio rectanguli ſub ΜΟ & dupla differentia inter ΟΞ & ΜΝ ad rectangulum ſub ΟΞ & dupla differentia inter ΟΞ & ΜΝ major eſt ratione ejuſdem ad ſummam quadratorum ex ΝΟ, ΟΞ; ac proinde ratio ΜΟ ad ΟΞ major erit ratione rectanguli ſub ΜΟ & dupla differentia ipſarum ΟΞ, ΜΝ ad quadrata ex ΝΟ, ΟΞ ſimul. Sed rectangulum ſub ΜΟ & dupla differentia ipſarum ΟΞ, ΜΝ unà cum quadratis ex ΝΟ, ΟΞ ſimul (*per Lemma* IV. *Abdolm.*) æquale eſt quadratis ex ΜΝ, ΜΞ ſimul; quia differentia inter quadrata ex ΜΝ, ΜΞ & quadrata ex ΝΟ, ΟΞ ſimul æqualis eſt duplæ differentiæ inter quadrata ex ΜΘ, ΘΟ: componendo igitur ratio ΜΞ ad ΞΟ major erit ratione quadratorum ex ΜΝ & ΜΞ ſimul ad quadrata ex ΝΟ & ΟΞ ſimul. Sed ut ΜΞ ad ΞΟ ita rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum ſub ΓΝ, ΞΟ; quare ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum ΓΝ, ΞΟ major eſt ratione ſummæ quadratorum ex ΜΝ, ΜΞ ad ſummam quadratorum ex ΝΟ, ΟΞ: ac permutando ratio rectanguli ſub ΝΓ, ΜΞ ad ſummam quadratorum ex ΜΝ, ΜΞ major eſt ratione rectan-

guli

guli NΓ, ΞO ad ſummam quadratorum ex NO, OΞ. Sed rectangulum ſub NΓ, MΞ eſt ad ſummam quadratorum ex MN, MΞ (per 19^{am} hujus) ſicut quadratum ex AΓ ad ſummam quadratorum laterum figuræ diametri KB; ac, per eandem, rectangulum ſub NΓ, ΞO eſt ad quadrata ex NO, OΞ ſimul ut quadratum ex AΓ ad ſummam quadratorum laterum figuræ diametri ξT: ratio itaque quadrati ex AΓ ad ſummam quadratorum laterum figuræ diametri KB major eſt ratione ejuſdem ad ſummam quadratorum laterum figuræ diametri ξT; ac proinde quadrata laterum figuræ diametri KB minora ſunt quadratis laterum figuræ diametri ξT.

Si vero MN non minor fuerit quam ΞO, ſumma quadratorum ex MN, MΞ non major erit ſumma quadratorum ex NO, OΞ; ac proveniet ratio rectanguli ſub NΓ, MΞ ad quadrata ex NM, MΞ ſimul major ratione rectanguli ſub NΓ, ΞO ad ſummam quadratorum ex NO, OΞ: unde, modo nuper oſtenſo, manifeſtum erit quadrata laterum figuræ diametri KB minora eſſe quadratis laterum figuræ diametri ξT. Hæc autem ita ſe habebunt, ſive cadat normalis de puncto I demiſſa inter puncta Θ & M, vel ſuper ipſum Θ, vel etiam inter Θ, Γ; modo ſegmentum MN minus fuerit intercepta NO. Eſt autem rectangulum ſub NΓ, ΓΞ ad quadrata ex NΓ, ΓΞ ſimul ut quadratum ex AΓ ad ſummam quadratorum laterum figuræ Axis minoris ΔE, per demonſtrata in principio hujus Propoſitionis; ac rectangulum ſub NΓ, OΞ eſt ad quadrata ex NO & OΞ ſimul (per 19^{am} hujus) ut quadratum ex AΓ ad ſummam quadratorum laterum figuræ diametri ξT: unde, conſimili argumento, probabitur ſummam quadratorum laterum figuræ diametri cujuſcunque ξT minorem eſſe quadratis laterum figuræ Axis ΔE ſimul ſumptis. Q. E. D.

PROPOSITIO XLVIII.

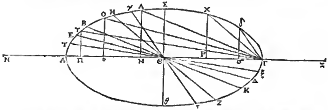
SI vero in Ellipſi quadratum Axis majoris majus fuerit dimidio quadrati ſummæ laterum figuræ Axis: dabitur ab utraque Axis parte diameter, cujus quadratum æquale eſt dimidio quadrati ſummæ laterum figuræ ejus: ac ſumma quadratorum laterum figuræ hujus diametri minor erit ſumma quadratorum laterum figuræ cujuſcunque alterius diametri ad eundem ſectionis quadrantem ducendæ: quadrata etiam laterum figuræ diametri huic utrinque propioris minora ſunt quadratis laterum figuræ ſuper diametrum remotiorem factæ.

Deſcribatur Schema præcedenti ſimile: ac eodem modo conſtabit duplum quadratum ex AΞ majus eſſe quadrato ex NΞ. Fiat duplum quadrati ex MΞ æquale quadrato ex NΞ, & ad punctum M erigatur Axi normalis AM occurrens ſectioni in A; & jungatur ΓA, eidemque parallela ducatur ſectionis diameter KB: erit igitur MΞ ad ΞN (per 7^{mam} hujus) ſicut diameter KB ad latera figuræ ejus ſimul ſumpta; ac proinde quadratum ex MΞ ad quadratum ex ΞN ſicut quadratum ipſius KB ad quadratum ſummæ laterum figuræ ejus. Sed quadratum ex MΞ dimidium eſt quadrati ex ΞN; quare quadratum ex KB dimidium eſt quadrati ſummæ laterum figuræ ejus.

Ducantur jam diametri ΔE, ξT inter A & B; & per punctum Γ iiſdem parallelæ ſint ΓO, ΓT; ac demittantur ad Axem normales OΦ, TΠ. Quoniam vero quadratum ex MΞ dimidium eſt quadrati ex ΞN, ac rectangulum ſub NΞ, ΞΘ etiam dimidium eſt quadrati ex ΞN; erit rectangulum ſub NΞ, ΞΘ æquale quadrato ex MΞ: unde NΞ erit ad MΞ ſicut MΞ ad ΞΘ; ac auferendo antecedentes à conſequentibus, erit reſiduum MN ad reſiduum MΘ ſicut NΞ ad MΞ. Hinc rectangulum ſub NΞ, MΘ æquale erit rectangulo ſub MN, MΞ. Eſt igitur rectangulum ſub NΞ, MΘ majus rectangulo ſub NΦ, MΞ; ac duplum rectanguli ſub NΞ, MΘ majus rectangulo duplo ſub NΦ, MΞ: rectangulum igitur ſub MΘ, ΘΞ quater majus eſt duplo rectangulo ſub NΦ, MΞ: Adjiciatur commune duplum rectangulum ſub MΦ, MΞ; & quadruplum rectangulum ſub MΘ, ΘΞ unà cum duplo rectangulo ſub MΦ, MΞ majus erit duplo rectangulo ſub MN, MΞ. Addatur inſuper quater quadratum ex ΘM

utrinque; & erit quadruplum rectangulum ſub MΘ, ΘΞ, unà cum duplo rectangulo ſub Mo, MΞ & quater quadrato ex ΘM ſimul, majus quam duplum rectangulum ſub MN, MΞ unà cum quadruplo quadrato ex ΘM. Verum quadruplum rectangulum ſub MΘ, ΘΞ, una cum duplo rectangulo ſub Mo, MΞ & quater quadrato ex ΘM ſimul (*per Lemma* V. *Abdolm.*) æquale eſt duplo rectangulo ſub Θo, ΘM ſimul & MΞ; ac duplum rectangulum ſub NM, MΞ unà cum quadrato ex ΘM quater (*per Lemma* VI. *Abdolm.*) æquale eſt quadratis ex NM, MΞ ſimul: rectangulum igitur duplum ſub Θo, ΘM ſimul & MΞ majus eſt quadratis ex NM, MΞ ſimul. Unde ratio dupli rectanguli ſub Θo, ΘM ſimul & Mo ad duplum rectangulum ſub Θo, ΘM ſimul & MΞ minor eſt ratione dupli rectanguli ſub Θo, ΘM ſimul & Mo ad ſummam quadratorum ex MN, MΞ: id eſt, ratio Mo ad MΞ minor eſt ratione dupli rectanguli ſub Θo, ΘM & Mo ad ſummam quadratorum ex MN, MΞ. Quadrata autem ex No & oΞ ſimul majora ſunt quadratis ex MN, MΞ, exceſſu rectanguli dupli ſub Mo & Θo, ΘM ſimul, *per Lemma* IV. *Abdolm.* componendo igitur ratio oΞ ad MΞ minor erit ratione quadratorum ex No & oΞ ſimul ad quadrata ex MN, MΞ ſimul. Hinc, modo in Propoſitione præcedente uſurpato, demonſtrabitur quadrata laterum figuræ diametri KB minora eſſe quadratis laterum figuræ diametri ΔE. Cumque duplum rectangulum ſub NΞ, oΘ majus eſt duplo rectangulo ſub NΠ, oΞ; eodem argumento probabitur quadrata laterum figuræ diametri ΔE minora eſſe quadratis laterum figuræ diametri ξT.

Quoniam etiam duplum rectangulum ſub NΞ, ΠΘ majus eſt duplo rectangulo ſub NA, ΠΞ; pari modo patebit rationem AΞ ad ΞΠ minorem eſſe ratione quadratorum ex NA & AΞ ſimul ad quadrata ex NΠ, ΠΞ ſimul ſumpta: unde pari ratiocinio conſtabit quadrata laterum figuræ ξT minora eſſe quadratis laterum figuræ Axis AΓ.



Ducantur jam, in iiſdem Ellipſeos quadrantibus, diametri aliæ remotiores ab Axe majore quam KB, ut ZH, τγ; & per punctum Γ his diametris parallelæ ſint ΓX, Γδ: ac demittantur ad Axem normales XP, δσ. Et, argumento prædictis conſimili, manifeſtum fiet quadrata laterum figuræ diametri KB minora eſſe quadratis laterum figuræ diametri ZH: atque hæc quoque minora eſſe quadratis laterum figuræ diametri τγ; ſive puncta P, σ ceciderint utraque inter Θ & M, ſive eorum unum fuerit in centro & alterum inter Θ & M vel inter Θ & Γ; vel denique ſi utrumque fuerit inter Θ & Γ. Quadrata igitur laterum figuræ diametri KB, cujus quadratum dimidium eſt quadrati ſummæ laterum figuræ ejus, minora ſunt quadratis laterum figuræ cujuſcunque alterius diametri in Ellipſeos quadrantibus AΣ, Γθ ducendæ: ac quadrata laterum figuræ diametri huic utrinque propioris, in iiſdem quadrantibus ductæ, minora ſunt quadratis laterum figuræ diametri ab eadem remotioris. Conſequitur etiam quadrata laterum figuræ Axis minoris Σθ majora eſſe quadratis è lateribus figuræ cujuſcunque alterius diametri ſectionis ſimul ſumptis. Q. E. D.

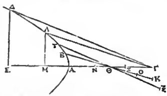
PROPOSITIO XLIX.

SI in Hyperbola latus tranſverſum figuræ Axis majus fuerit latere ejus recto: erit differentia quadratorum laterum figuræ Axis

Digitized by Google

Axis minor differentia quadratorum laterum figuræ cujuſlibet alterius diametri: ac differentia quadratorum laterum figuræ diametri Axi propioris minor erit differentia quadratorum laterum figuræ diametri ab eodem remotioris: differentia autem inter quadrata laterum figuræ cujuſcunque diametri ſectionis præter Axem, major erit differentia inter quadratum Axis & figuram ejuſdem; ſed minor duplo ejus.

Sit Axis Hyperbolæ ΑΓ, & centrum Θ; & ſit ΑΓ major latere ejus recto: fiat ΓΝ ad ΝΑ & ΑΞ ad ΞΓ in ratione ipſius ΑΓ ad latus ejus rectum, ac ducantur diametri ΚΒ, ξΤ. Dico differentiam inter quadratum ex ΑΓ & quadratum lateris ejus recti minorem eſſe differentiâ inter quadratum diametri ΚΒ & quadratum lateris recti ejuſdem ΚΒ: ac differentiam inter quadrata ex ΚΒ & ex latere ejus recto minorem eſſe differentia inter quadrata ex ξΤ & ex latere ejus recto.



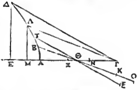
Ducantur ΓΛ, ΓΔ diametris ΚΒ, ξΤ parallelæ; ac demittantur ad Axem normales ΛΜ, ΔΕ. Quoniam vero ΑΓ eſt ad latus ejus rectum ut ΓΝ ad ΝΑ ſive ut ΑΞ ad ΞΓ; erit rectangulum ſub ΓΝ, ΞΑ ad differentiam quadratorum ex ΑΞ & ΑΝ ſicut quadratum ex ΑΓ ad differentiam quadratorum ex ΑΓ & ex latere ejus recto. Ratio autem ΜΞ ad ΞΑ minor eſt ratione ΜΝ ad ΝΑ; adeoque ratio ΜΞ ad ΞΑ minor eſt ratione ipſarum ΜΞ, ΜΝ ſimul ad ipſas ΞΑ, ΑΝ ſimul: ac proinde minor eſt ratione rectanguli ſub ΞΜ, ΜΝ ſimul & ΞΝ ad rectangulum ſub ΞΑ, ΑΝ ſimul & ΞΝ. Verum rectangulum ſub ΞΜ, ΜΝ ſimul & ΞΝ (*per* 6. II. *Elem.*) differentia eſt inter quadrata ex ΞΜ & ΜΝ, ac rectangulum ſub ΞΑ, ΑΝ ſimul & ΞΝ differentia eſt inter quadrata ex ΞΑ, ΑΝ: quare ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad rectangulum ſub ΓΝ, ΞΑ minor eſt ratione differentiæ quadratorum ex ΞΜ & ΜΝ ad differentiam quadratorum ex ΞΑ & ΑΝ: ac permutando ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΜΞ ad differentiam quadratorum ex ΞΜ & ΜΝ minor erit ratione rectanguli ſub ΓΝ, ΞΑ ad differentiam quadratorum ex ΞΑ, ΑΝ. Sed rectangulum ſub ΓΝ, ΜΞ eſt ad differentiam quadratorum ex ΞΝ, ΜΝ (per 20[mam] hujus) ſicut quadratum ex ΑΓ ad differentiam quadratorum è lateribus figuræ diametri ΚΒ; ac rectangulum ſub ΓΝ, ΑΞ eſt ad differentiam quadratorum ex ΞΑ & ΑΝ ut quadratum ex ΑΓ ad differentiam quadratorum ex Axe ΑΓ & ex latere ejus recto: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad differentiam quadratorum è lateribus figuræ diametri ΚΒ minor eſt ratione ejuſdem ad differentiam quadratorum laterum figuræ Axis ΑΓ. Quocirca differentia quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ major eſt differentia quadratorum laterum figuræ Axis.

Similiter, quoniam ratio ΕΞ ad ΞΜ minor eſt ratione ΕΝ ad ΝΜ, erit ratio ΕΞ ad ΞΜ minor ratione ipſarum ΕΞ, ΝΕ ſimul ad ΞΜ, ΜΝ ſimul; unde modo nuper adhibito probabitur differentiam quadratorum laterum figuræ diametri ξΤ majorem eſſe differentiâ quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ. Quinetiam ſi fiat ΒΟ æqualis lateri recto figuræ diametri ΚΒ; erit differentia inter quadrata ex ΒΚ & ΒΟ æqualis duplo rectangulo ſub ΒΟ, ΟΚ una cum quadrato ex ΟΚ; quæ proinde major erit rectangulo ſub ΒΚ, ΚΟ, minor vero duplo ejuſdem. Verum rectangulum ſub ΒΚ, ΚΟ æquale eſt differentiæ inter quadratum ex ΒΚ & figuram ſuper ΒΚ factam; quæ quidem differentia (per 29[um] hujus) æqualis eſt differentiæ inter quadratum Axis ΑΓ & figuram ejuſdem: differentia igitur inter quadratum diametri ΒΚ & quadratum lateris ejus recti major eſt differentia inter quadratum Axis ΑΓ & figuram ejuſdem; minor vero eſt duplo iſtius differentiæ. Q. E. D.

PROPOSITIO L.

SI vero in Hyperbola latus tranſverſum figuræ ſectionis minus fuerit latere ejus recto: erit differentia inter quadrata laterum figuræ Axis major differentia inter quadrata laterum figuræ cujuſcunque alterius diametri: ac differentia quadratorum laterum figuræ factæ ſuper diametrum Axi propiorem major erit differentiâ quadratorum laterum factæ ſuper remotiorem: differentia autem inter quadratum cujuſvis diametri & quadratum lateris ejus recti major erit duplo differentiæ inter quadratum Axis & figuram ſuper Axem factam.

Sit ſectionis Axis AΓ, ac fiat ΓN ad NA ut & AΞ ad ΞΓ in ratione AΓ ad latus ejus rectum; & quoad cætera ſit Schema idem ac in Propoſitione præcedente: erit igitur rectangulum ſub ΓN, AΞ ad differentiam inter quadrata ex AN & ex AΞ, ſicut quadratum ex Axe AΓ ad differentiam inter quadratum iſtud & quadratum lateris recti figuræ Axis. Ratio autem MΞ ad ΞA major eſt ratione MN ad NA; adeoque ratio MΞ ad ΞA major eſt ratione ipſarum MΞ, MN ſimul ad ΞA, AN ſimul, ac ratio rectanguli ſub ΓN, MΞ ad rectangulum ſub ΓN, ΞA major erit ratione ipſarum MΞ, MN ad AΞ, AN ſimul. Sed rectæ MΞ, MN ſimul ſunt ad AΞ, AN ſimul ſicut rectangulum ſub MΞ, MN ſimul & NΞ ad rectangulum ſub ΞA, AN ſimul & NΞ: ratio igitur rectanguli ſub ΓN, MΞ ad rectangulum ſub ΓN, ΞA major eſt ratione rectanguli ſub MΞ, MN ſimul & NΞ ad rectangulum ſub ΞA, AN ſimul & NΞ. *Sed rectangulum ſub* MΞ, MN *ſimul &* NΞ *æquale eſt differentiæ quadratorum ex* MN, MΞ; *ac rectangulum ſub* ΞA, AN *ſimul &* NΞ *æquale eſt differentiæ quadratorum ex* ΞA *&* AN: quare, eodem modo quo præcedentia, demonſtrabitur differentiam quadratorum diametri KB laterisque recti ejuſdem minorem eſſe differentiâ quadrati Axis AΓ & lateris ejus recti: pariterque differentiam quadratorum diametri ξT & lateris ejus recti minorem eſſe differentia quadratorum laterum figuræ diametri KB.



Fiat autem BO æqualis lateri recto diametri KB, ac rectangulum ſub BK, KO (per 29^{am} hujus) æquale erit differentiæ inter quadratum Axis AΓ & figuram ſuper Axem factam. Duplum autem rectanguli ſub BK, KO una cum quadrato ex KO, *hoc eſt differentia quadratorum ex* BK *&* BO, majus eſt duplo rectangulo ſub BK, KO: differentia igitur quadratorum laterum figuræ cujuſcunque diametri KB major erit duplâ differentiâ *inter quadratum Axis* AΓ *ejuſdemque figuram.* Q. E. D.

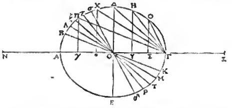
PROPOSITIO LI.

DIfferentia quadratorum laterum figuræ Axis majoris, in Ellipſi, major eſt differentia quadratorum laterum figuræ cujuſlibet alterius diametri, quæ major eſt latere ſuo recto: ac differentia quadratorum laterum figuræ factæ ſuper diametrum Axi majori propiorem major eſt differentia quadratorum laterum figuræ diametri remotioris ab eodem: differentia autem quadratorum laterum figuræ Axis minoris major eſt differentia quadratorum laterum figuræ cujuſvis alterius diametri, quæ minor eſt latere ſuo recto: ac differentia quadratorum laterum figuræ diametri Axi minori propioris major erit differentia quadratorum laterum figuræ ſuper remotiorem factæ.

Sit

Sit Ellipſeos Axis major ΑΓ, minor vero ΔΕ; ac ſit ξΤ altera e diametris conjugatis æqualibus. Ducantur inter puncta Α & ξ diametri ΚΒ, ΛΜ, ac iiſdem parallelæ ΓΠ, ΓΧ; & ad Axem demittantur normales Πγ, Χθ: atque fiant reliqua omnia prout in Schemate Hyperbolæ Propoſitionis proximæ. Dico exceſſum quadrati ex ΑΓ ſupra quadratum lateris ejus recti majorem eſſe exceſſu *quadrati ex* ΚΒ ſupra quadratum lateris recti ejuſdem; atque hunc quoque exceſſum majorem eſſe exceſſu quadrati ex ΛΜ ſupra quadratum lateris ejus recti.

Quoniam enim ratio ΑΞ ad Ξγ minor eſt ratione ΑΘ ad Θγ, erit ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΑΞ ad rectangulum ſub ΓΝ, Ξγ minor ratione dupli rectanguli ſub ΞΝ, ΑΘ ad duplum rectangulum ſub ΞΝ, Θγ. Sed duplum rectangulum ſub ΞΝ, ΑΘ (*per Lem.* VII. *Abd.*) æquale eſt differentiæ quadratorum ex ΞΑ, ΑΝ; ac duplum rectangulum ſub ΞΝ, Θγ æquale eſt differentiæ quadratorum ex Ξγ, γΝ: ratio igitur rectanguli ſub ΓΝ, ΑΞ ad rectangulum ſub ΓΝ, Ξγ minor eſt ratione differentiæ quadratorum ex ΞΑ & ΑΝ ad differentiam quadratorum ex Ξγ, γΝ. Permutando autem ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΞΑ ad differentiam quadratorum ex ΞΑ, ΑΝ minor eſt ratione rectanguli ſub ΓΝ, Ξγ ad differentiam quadratorum ex Ξγ, γΝ. Verum rectangulum ſub ΓΝ, ΞΑ eſt ad differentiam quadratorum ex ΞΑ, ΑΝ ſicut quadratum ex Axe ΑΓ ad differentiam quadratorum laterum figuræ ejuſdem Axis, (quia ΓΝ eſt ad ΑΝ ut & ΑΞ ad ΞΓ in ratione Axis ad latus ejus rectum; atque adeo utraque ΑΝ, ΓΞ ſunt rectæ quas Homologas vocamus) ac rectangulum ſub ΓΝ, Ξγ (per 20mam hujus) eſt ad differentiam quadratorum ex Ξγ, γΝ ſicut quadratum ex ΑΓ ad differentiam quadratorum diametri ΚΒ laterisque recti ejuſdem: ratio igitur quadrati ex ΑΓ ad differentiam quadratorum laterum figuræ ejus minor eſt ratione ejuſdem quadrati ex ΑΓ ad differentiam quadratorum diametri ΚΒ & lateris ejus



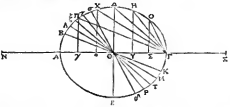
recti: quapropter differentia quadratorum laterum figuræ Axis ΑΓ major eſt differentiâ quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ. Eodemque modo demonſtrabitur rationem rectanguli ſub ΓΝ, Ξγ ad rectangulum ſub ΓΝ, Ξθ minorem eſſe ratione differentiæ quadratorum ex Ξγ, γΝ ad differentiam quadratorum ex Ξθ, θΝ: ac permutando rationem rectanguli ſub ΓΝ, Ξγ ad differentiam quadratorum ex Ξγ, γΝ minorem eſſe ratione rectanguli ſub ΓΝ, Ξθ ad differentiam quadratorum ex Ξθ, θΝ. Unde manifeſtum fiet differentiam quadratorum laterum figuræ diametri ΚΒ majorem eſſe differentiâ quadratorum laterum figuræ diametri ΛΜ.

Ducantur jam aliæ diametri inter ξ & Δ, ſicut σδ, τρ; ac per punctum Γ agantur parallelæ illis rectæ ΓΗ, Γυ; & demittantur ad Axem normales ΗΥ, ΟΣ. Dico differentiam quadratorum laterum figuræ Axis minoris ΔΕ majorem eſſe differentia inter quadratum diametri σδ & quadratum lateris recti ejus; atque hanc differentiam majorem eſſe differentiâ quadratorum laterum figuræ diametri τρ.

Quoniam enim ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΞΥ ad rectangulum ſub ΓΝ, ΞΣ major eſt ratione ΥΘ ad ΘΣ, (quia ΞΥ major eſt quam ΞΣ ac ΥΘ minor quam ΘΣ) ac ΥΘ eſt ad ΘΣ ut duplum rectangulum ſub ΝΞ & ΥΘ ad duplum rectangulum ſub ΝΞ, ΘΣ; duplum autem rectangulum ſub ΞΝ, ΥΘ æquale eſt differentiæ quadratorum ex ΝΥ, ΥΞ, uti duplum rectangulum ſub ΞΝ, ΘΣ æquale eſt differentiæ

 quadra-

quadratorum ex ΝΣ, ΣΞ: ratio igitur rectanguli ſub ΓΝ, ΞΥ ad rectangulum ſub ΓΝ, ΞΣ major eſt ratione differentiæ quadratorum ex ΝΥ, ΥΞ ad differentiam quadratorum ex ΝΣ, ΣΞ: permutando autem ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΞΥ ad differentiam quadratorum ex ΝΥ, ΥΞ major erit ratione rectanguli ſub ΓΝ, ΞΣ ad differentiam quadratorum ex ΝΣ, ΣΞ. Unde, eodem quo in præcedentibus uſi ſumus argumento, conſtabit rationem quadrati ex ΑΓ ad differentiam quadratorum diametri τρ & lateris ejus recti majorem eſſe ratione ejuſdem quadrati ex ΑΓ ad differentiam quadratorum laterum figuræ diametri σδ: ac proinde differentiam quadratorum laterum figuræ diametri σδ majorem eſſe differentiâ inter quadratum diametri τρ & quadratum lateris recti ejus.



Denique cum ratio ΣΞ ad ΞΓ major eſt ratione ΣΘ ad ΘΓ (quia ΣΞ major eſt quam ΞΓ & ΣΘ minor quam ΘΓ) erit ratio rectanguli ſub ΓΝ, ΣΞ ad rectangulum ΓΝ, ΞΓ major ratione dupli rectanguli ſub ΝΞ, ΣΘ ad duplum rectangulum ſub ΝΞ, ΘΓ: quocirca, modo in præcedentibus uſurpato, demonſtrabitur differentiam quadratorum laterum figuræ Axis minotis ΔΕ majorem eſſe differentia inter quadratum diametri σδ & quadratum lateris recti figuræ ejuſdem. Q. E. D.

APOL-

APOLLONII PERGÆI CONICORUM

LIBER OCTAVUS RESTITUTUS:

SIVE

DE PROBLEMATIS DETERMINATIS DIVINATIO.

Halleius Aldrichio S. P.

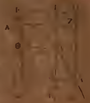
CUM de Apollonio *edendo tecum agerem, non mediocriter nos angebat, quod in Codicibus etiam* Arabicis *ultimus Conicorum liber deſideraretur. Tu tamen, qua es ingenii felicitate, ſtatim ſenſiſti, pro re deplorata non habendum eſſe, ſed forte quadantenus reſtitui poſſe, indicio ex eo facto quod in* Pappi Collectionibus Mathematicis *eadem ipſa tradantur* Lemmata *Conicorum Octavo pariter ac Septimo demonſtrando inſervientia; quæ tamen in cæteros libros diverſos diverſa reperiuntur. Hinc Tibi pro comperto fuit, utriuſque libri argumenta conjunctiſſima fuiſſe; ac Problemata Octavi à Theorematis Septimi* διορισμοὺς *ſuas ſortiri determinationes. Illud quidem mihi, re probe perpenſa, cum conjectura probabile tum veſtigiis quibuſdam indicari videbatur: quo factum ut, Te viam monſtrante, jacturæ iſti, quantum in me eſt, reſarciendæ memet accingerem. Quæſo igitur hoc, quicquid eſt conaminis, benigne accipias. Vale.*

PROPOSITIO I. PROBL.

D*Ato in Parabola data cujuſlibet diametri latere recto; exhibere latus rectum cujuſcunque alterius diametri.*

Quoniam (per $5^{tæ}$ VII^{mi}) demonſtratum eſt, latus rectum cujuſlibet alterius diametri Parabolæ excedere latus rectum Axis, quadruplâ interceptæ inter normalem ad Axem demiſſam & verticem principalem ſectionis: manifeſtum eſt quod, ſi ſupra verticem Axis capiatur punctum quod quartâ parte lateris ejus recti diſtet à vertice, portio Axis, inter punctum illud & normalem à vertice cujuſvis alterius diametri demiſſam, erit quarta pars lateris recti iſtius diametri.

Sit itaque Parabolæ ΑΒΓ vertex Β, Axis ΒΔ, & latus rectum ΒΖ, producaturque Axis ad Ε, ita ut ΕΒ ſit quarta pars lateris recti Axis; & per punctum quodvis ſectionis ducatur Axi parallela ΓΗ, quæ proinde (per 46. 1. hujus) diameter erit; ac demittatur ad Axem normalis ΓΘ. Dico latus rectum diametri ΓΗ quadruplum eſſe interceptæ ΘΕ.



Quod ſi diameter data non fuerit Axis, ut ΓΗ, producatur ΓΗ ſupra verticem ad Κ, ita ut ΓΚ ſit quarta pars lateris recti datæ diametri, ad quam demittatur normalis de puncto quovis ſectionis Α, ut ΑΜ. erit latus rectum diametri ΑΝ quadruplum interceptæ ΚΜ. Hæc autem omnia liquido patent ex quintâ ſeptimi hujus.

PROPOSITIO II. PROBL.

Viciſſim dato in Parabola cujuſlibet diametri latere recto, invenire diametrum quæ habeat latus ſuum rectum rectæ datæ æquale.

Sit data Parabola ΑΒΓ, datæ autem diametri ΓΗ ſit latus rectum datum. producatur ΓΗ ad Κ, ita ut ΓΚ ſit quarta pars lateris recti diametri iſtius, ac fiat ΚΜ æqualis quartæ parti alicujus alterius lateris recti; & per Μ ipſi ΓΗ normalis erigatur ΑΜ, occurrens ſectioni in Α; per Α vero ipſi ΓΗ parallela ducatur ΑΝ. Dico ΑΝ eſſe diametrum ſectionis quæſitam, quæ producatur ad Ο.

Vel ſi per Κ ducatur diametro normalis ΕΚΟ, & intervallo ΚΜ quartæ parti lateris recti dati æquali ducatur ΜΑ ipſi ΕΚΟ parallela; occurret ſectioni in puncto quæſito Α. Etenim cum ΓΚ ſit quarta pars lateris recti diametri ΓΗ, & ΚΜ ſit quarta pars lateris recti dati, cui æqualis eſt ΑΟ; ſit autem ΑΟ (per demonſtrata in quinto VII^mi) quarta pars lateris recti diametri ΑΝ: erit igitur ΑΝ diameter illa quam quærimus.

Latus autem rectum datum (per 32. VII^mi) non minus eſſe poteſt latere recto Axis.

PROPOSITIO III. PROBL.

Dato in data Hyperbola datæ cujuſlibet diametri latere recto; alterius cujuſvis diametri latus rectum invenire.

Sit in Hyperbola ΒΓ, cujus centrum Α, data aliqua diameter ΓΒ, ac ſemiſſi lateris ejus recti fiat ΖΒ æqualis: proponitur latus rectum diametri cujuſcunque alterius ΔΕ inveſtigandum.

Per data tria puncta Β, Ε, Ζ (per 5. 4. *El.*) deſcribatur circulus ΕΒΖΗ occurrens diametro propoſitæ ΔΕ in puncto Η. Dico ΕΗ dimidium eſſe lateris recti quæſiti. Nam (per 29um. VII^mi) differentia inter quadratum diametri cujuſcunque Hyperbolæ & figuram ejuſdem ubique eadem eſt: adeoque rectangula ſub diametris & differentiis inter eaſdem & latera ſua recta ſunt ſemper æqualia, uti & rectangula contenta ſub earundem dimidiis; quare rectangulum ΒΑΖ æquale eſt contento ſub ΑΕ & differentia inter ΑΕ & ſemiſſem lateris recti diametri ΔΕ. Sed, ob circulum (per 35 vel 36. III. *Elem.*) rectangulum ſub ΕΑ, ΑΗ æquale eſt rectangulo ΒΑΖ: eſt igitur ΑΗ differentia inter ſemidiametrum ΑΕ & ſemilatus rectum ejuſdem diametri, ac proinde ΕΗ dimidium eſt lateris recti quæſiti.

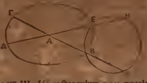


PRO-

PROPOSITIO IV. PROBL.

IN Ellipſi data, ſi detur diameter aliqua una cum ejuſdem latere recto; poſſumus diametri cujuſvis alterius latus rectum exhibere.

Sit ΓΕΒΔ Ellipſis data, cujus centrum Α, & diametri ΓΒ detur latus rectum, ejuſque dimidio æqualis fiat ΒΖ, in producta diametro ponenda: ac ſit quælibet alia diameter ΔΕ: & per tria puncta Ε, Β, Ζ deſcribatur circulus occurrens ipſi ΔΕ productæ in puncto Η. Dico ΕΗ dimidium eſſe lateris recti quæſiti.

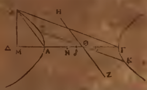


Eſt enim in Ellipſi (per 31. VIIᵐⁱ) ſumma quadrati diametri cujuſcunque & figuræ ejuſdem ſemper æqualis, hoc eſt, rectangulum contentum ſub diametro & utrâque diametro & latere ejus recto ſimul ubique æquale eſt; adeoque & contenta ſub earundem dimidiis. rectangulum igitur ΒΑΖ æquale eſt contento ſub ΕΑ & utrâque ΕΑ & ſemiſſe lateris ejus recti ſimul. Sed (per 36ᵗᵃᵐ III. *El.*) rectangulum ΕΑΗ æquale eſt rectangulo ΒΑΖ, quare ΑΗ æqualis eſt ſemidiametro ΕΑ una cum ſemiſſe lateris ejus recti ſimul ſumpto. quapropter ΑΗ ſuperat ΕΑ dimidio lateris recti quæſiti: duplum igitur rectæ ΕΗ eidem lateri recto æquale eſt.

PROPOSITIO V. PROBL.

DAtis lateribus figuræ Axis Hyperbolæ, & datâ quavis ejuſdem diametro magnitudine: poſitionem diametri iſtius in ſectione determinare, atque ſitum & magnitudinem diametri cum eâdem conjugatæ, latuſque ejus rectum.

Sit Hyperbolæ ΑΒ Axis tranſverſus ΑΓ, & latus rectum ΑΔ; quod ponatur in directo Axis ad Δ & ∂; ac fiat ΓΝ ad ΝΑ ut & ΑΞ ad ΞΓ ſicut ΓΑ ad ΑΔ; erunt itaque puncta Ν, Ξ (per 2ᵈᵃᵐ VIIᵐⁱ) termini rectarum quas *Homologas* diximus: Componendo autem ΓΑ erit ad ΑΝ ſicut Axis tranſverſus & latus ejus rectum ſimul ad latus rectum, ſive ut ΓΔ ad ΔΑ; per converſionem vero rationis ΑΝ erit ad ΝΞ ſicut ΑΔ ad Γ∂ differentiam Axis & lateris recti: ex æquo igitur ΓΑ erit ad ΝΞ ſicut ΓΔ ad Γ∂; ac proinde rectangulum ſub ΝΞ & ΓΔ æquale erit contento ſub ΑΓ & Γ∂ ſive ſub Axe & differentiâ Axis lateriſque recti. Rectangulum autem ſub ΑΓ & differentiâ ejuſdem & lateris ejus recti æquale eſt differentiæ quadrati Axis & figuræ ejus, quæ quidem (per 13ᵗⁱᵃᵐ & 29ⁿᵃᵐ VIIᵐⁱ) differentia eſt quadratorum e quibuſvis ſectionis diametris conjugatis: adeoque rectangulum ſub ΝΞ, ΓΔ æquale eſt differentiæ quadratorum ex quibuſlibet ſectionis diametris conjugatis. Pone jam ΒΚ eſſe diametrum quam quærimus, ac repetito Schemate Prop. 6ᵗᵃᵉ VIIᵐⁱ (per eandem 6ᵗᵃᵐ) quadratum ex ΒΚ erit ad quadratum ex ΖΗ ut ΞΜ ad ΜΝ, ac per converſionem rationis quadratum ex ΒΚ erit ad differentiam quadratorum ex ΒΚ, ΖΗ, ſive ad rectangulum ſub ΝΞ & ΓΔ, ſicut ΞΜ ad ΝΞ: quocirca quod fit ſub ΝΞ & quadrato ex ΒΚ æquale erit contento ſub ΝΞ & rectangulo ſub ΓΔ & ΞΜ; adeoque quadratum ex ΒΚ æquale erit rectangulo ſub ΞΜ & ΓΔ, ſive ſub ΞΜ & ſummâ Axis & lateris ejus recti: eſt igitur ΒΚ media proportionalis inter ΓΔ & ΜΞ. Dantur autem ΒΚ & ΓΔ; data eſt igitur ΜΞ, ac dato puncto Ξ punctum Μ datur.



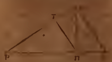
Compoſitio autem manifeſta eſt: manentibus enim deſcriptis, fiat ut ΓΔ ad ΒΚ

 ita

ita ΒΚ ad ΜΞ, & erectâ Axi normali ΑΜ, fiat quadratum ex [illegible] ad rectangulum ΑΜΓ ſicut figuræ Axis latus rectum ad tranſverſum, ac punct[illegible] Α (per 21[illegible] primi) tanget ſectionem. Jungantur ΑΑ, ΑΓ; & per centrum Θ ipſis ΑΑ, ΑΓ parallelæ ducantur diametri ΒΚ, ΖΗ: habemus itaque (per demonſtrata in 6ᵃ VIIᵐⁱ) poſitionem utriuſque diametri quæſitæ; ac factâ ΘΒ æquali ſemidiametro datæ, punctum Β tanget ſectionem. Fiat autem quadratum ex ΘΖ vel ΘΗ ad quadratum ex ΘΒ ſicut ΜΝ ad ΜΞ, & erit ΖΗ diameter cum ΒΚ conjugata[illegible] ac (per eandem 6ᵃᵐ VIIᵐⁱ) data diameter ΒΚ erit ad latus ſuum rectum ſicut Μ[illegible] ad ΜΝ.

Invenimus itaque poſitionem diametri ΒΚ, & conjugatæ cum eadem tam magnitudinem quam ſitum, latuſque rectum ejuſdem, Curvâ nondum deſcriptâ: id quod in cæteris omnibus obſervandum. In hunc enim uſum deſtinaſſe librum ſuum ſeptimum videtur *Apollonius*, ut viam ſterneret ad ſolutiones & determinationes problematum omnium quæ ſummas vel differentias diametrorum conjugatarum vel laterum figuræ earundem; ſicut & ſummas vel differentias quadratorum ex i[illegible]dem ſimiliaque ſpectant, abſque ſuppoſita Sectionum delineatione: nec vulgari artificio quæſitarum diametrorum poſitiones in ſingulis aſſequitur.

Diametri autem conjugatæ cum diametro datâ magnitudinem, & latus rectum ejus, conſtructione paulo faciliore invenies, modo poſitionem non requiras. Capiatur enim media proportionalis inter ΑΓ & ΓΔ ſive inter Axem & differentiam Axis & lateris ejus recti. quæ proinde poterit differentiam quadrati ex Axe & figuræ ejuſdem, hoc eſt (per 29ᵃᵐ VIIᵐⁱ) differentiam quadratorum e q[illegible]ibuſ[illegible]is diam[illegible]is conjugatis. Sit ea ΠΟ; & erectâ ad ΟΠ normali ΠΡ, fiat ΟΡ æqualis diametro datæ, & erit ΠΡ æqualis diametro conjugatæ cum ΡΟ: ſi nempe latus rectum minus fuerit Axe. Si vero majus fuerit eo, fiat ΠΡ diametro propoſitæ æqualis, & juncta ΟΡ erit ejuſdem diametro conjugatæ æqualis; & erecta ſuper ΟΡ normali ΟΣ, erit ΡΣ latus rectum diametri ΠΡ. In priori vero caſu, demiſſâ normali ΠΤ erit ΡΤ latus rectum diametri ΟΡ: conjugata enim media eſt proportionalis inter diametrum & latus ſuum rectum. Cætera patent ex 13ᵃ & 29ᵃ VIIᵐⁱ.

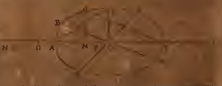


Ac manifeſtum eſt diametrum propoſitam non minorem eſſe debere Hyperbolæ Axe dato.

PROPOSITIO VI. PROBL.

Datis Ellipſeos Axe & latere recto, & data quavis ejuſdem diametro magnitudine: diametri iſtius poſitionem deſignare, ſitumque & magnitudinem diametri cum data conjugatæ, ſimulque latus rectum ejuſdem.

Sit Ellipſeos ΑΒΓ Axis tranſverſus ΑΓ, qui producatur utr[illegible]nque, ac fiat utraque ΑΔ, ΓΔ æqualis lateri recto, & (per 3ᵃᵐ VIIᵐⁱ) habeantur rectæ Homologæ ΑΝ, ΓΞ: capiendo ſcilicet ΓΝ ad ΝΑ & ΑΞ ad ΞΓ ſicut ΑΓ ad ΑΔ. Hinc dividendo ΓΑ erit ad ΑΝ ſicut differentia Axis & lateris ejus recti ad latus rectum, ſive ut ΓΔ ad ΔΑ; componendo vero ΑΝ erit ad ΝΞ ſicut latus rectum ad ſummam Axis laterique ejus recti, ſive ut ΑΔ ad ΔΓ. ex æquo igitur [illegible]Α erit ad ΝΞ ſicut ΓΔ ad ΔΓ, ſive ut differentia Axis & lateris ej[illegible] ad ſummam eorundem: rectangulum igitur ſub Axe & ſummâ A[illegible]is & lat[illegible] recti æquale eſt rectangulo ſub ΝΞ & eorundem differentiâ. Sed rectangulum [illegible]ub Axe & utroque Axe & latere recto ſimul æquale eſt quadrato ex Ax[illegible] [illegible] figuræ ejuſdem ſimul; quorum quidem ſumma (per 30ᵃ & 1[illegible] VII[illegible]) æqualis eſt ſummæ

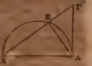


mæ quadratorum quibuſcunque ſectionis diametris conjugatis huic igitur ſummæ æquale eſt rectangulum ſub datis NΞ, Γδ ſive differentiâ Axis & lateris recti.

Puta jam factum quod quæritur, ſitque diameter BK æqualis datæ, eidemque conjugata ZH, ductâque AΓ ipſi parallelâ, jungatur AΛ & demittatur normalis ΛM & (per demonſtrata in 7ma VIImi) quadratum ex BK erit ad quadratum ex ZH ſicut ΞM ad MN. Componendo autem quadratum ex BK erit ad ſummam quadratorum ex BK, ZH, hoc eſt ad rectangulum ſub NΞ & Γδ ſive differentia Axis & lateris ejus recti, ſicut ΞM ad NΞ: igitur quod fit ſub NΞ & quadrato ex BK æquale erit facto ſub NΞ & rectangulo ſub MΞ & Γδ; unde quadratum ex BK æquale erit rectangulo ſub MΞ & Γδ, & proinde BK media proportionalis erit inter MΞ & Γδ. Datur autem utraque BK & Γδ: data eſt itaque MΞ; &, ob datum punctum Ξ, punctum M quoque datur.

Componetur autem hoc modo. Fiat ut Γδ ſive differentia Axis & lateris ejus recti ad diametrum datam BK ita eadem BK ad ΞM: &, erecta normali MΛ, fiat quadratum ex MΛ ad rectangulum ΛMΓ ſicut latus rectum Axis ad ipſum Axem, ac (per 21mam primi) punctum Λ tanget ſectionem. Jungantur ΛΓ, ΛA, & per centrum Θ parallelæ ipſis ducantur diametri BΘK, ZΘH; ac (per demonſtrata in 7ma VIImi) habebuntur diametri quæſitæ poſitione; ac, factâ utraque ΘB, ΘK æquali ſemidiametro datæ, puncta quoque B, K tangent ſectionem. Per eandem autem 7mam VIImi, erit ut MΞ ad MN ita BK ad latus rectum ejuſdem, & ita quadratum ex BK ad quadratum diametri ZH cum BK conjugatæ. Satisfactum eſt igitur problemati, & inventus eſt ſitus utriuſque diametri, Hyperbolâ etiam nondum deſcriptâ.

Abſque poſitione autem paratius eſt diametri conjugatæ laterisque recti magnitudinem invenire. Nam cum quadrata ex BK, ZH quadratis Axium ſimul ſumptis, hoc eſt ſummæ quadrati Axis & figuræ ejus (per 12mam & 30mam VIImi) ſemper æqualia ſunt, ſi capiatur ΓΠ media proportionalis inter AΓ & ΓΔ, poterit ΓΠ ſummam quadratorum ex BK, ZH, ſive quadruplum ſummæ quadratorum ſemiaxium AΘ, ΘO, hoc eſt quadrati ex AO. Quapropter ſi diametro ΓΠ vel radio AO deſcribatur ſemi-circulus AΔB, in quo inſcribatur recta AB datæ diametro BK æqualis, ac jungatur BΔ: erit BΔ æqualis conjugatæ ZH; erectaque ΓΔ normali ſuper AΔ uſque dum occurrat ipſi AB productæ in Γ, erit BΓ tertia proportionalis ipſis AB, BΔ, hoc eſt ipſis BK, ZH; ac proinde BΓ æqualis erit lateri recto quæſito.

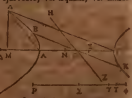


Manifeſtum autem eſt oportere diametrum BK non majorem eſſe Axe majore, nec minorem Axe minore, ſive mediâ proportionali inter latus rectum Axis ipſumque Axem.

PROPOSITIO VII. PROBL.

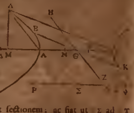
Datis Axe & latere recto Axis Hyperbolæ, ac data ratione diametrorum ſectionis conjugatarum, invenire diametros illas conjugatas tam magnitudine quam poſitione.

Habeantur puncta Ξ, N Homologarum termini, ut in quinta hujus docetur: & quoniam fieri poteſt ut Axis major ſit latere ejus recto, vel æqualis, vel minor eo; primum ſit major eo, ac (per demonſtrata in 21ma VIImi) ratio Axis ad ſuam conjugatam major eſſe debet ratione cujuſcunque alterius diametri ad ſuam conjugatam. Sit igitur ratio data ſicut PΣ ad ΣT ſive majoris ad minorem, ſed minor ratione Axium inter ſe, ac fiat ut PΣ ad ΣΥ ita ΣT ad ΣΥ: datis igitur PΣ, ΣT datur quoque ΣΥ, & ratio PΣ ad ΣΥ quoque datur, nempe ratio quadratorum ex PΣ, ΣT, hoc eſt ratio quadratorum diametrorum quas quærimus. Puta jam factum, & ſit BK diameter quæſita, ejuſque conjugata ZH, ac



ducatur ΓΛ ipſi BK parallela, & demittatur normalis ΛM. Erit igitur (per 6^{am} VII^{mi}) quadratum ex BK ad quadratum ex ZH ſicut MΞ ad MN, adeoque MΞ erit ad MN ſicut PΣ ad ΣT: ac, factâ ΣΦ ipſi PΣ æquali, erit dividendo ΞN ad MΞ ſicut ΦT ad ΣP. Datur autem ratio ΦT ad ΣP, adeoque data eſt ratio ΞN ad MΞ: ac data eſt NΞ, quare & MΞ datur: unde, ob datum punctum Ξ, punctum M quoque datur. Et autem (per ea quæ in quinta hujus demonſtravimus) diameter BK media proportionalis inter datas MΞ & ſummam Axis laterisque ejus recti; adeoque & BK datur magnitudine. Sed & ratio BK ad ZH datur; quapropter, ob datum BK, ZH quoque datur.

Componetur itaque problema, ſi fiat ut ΦT ad ΣP, ſive ut differentia quadratorum e terminis rationis ΣP, ΣT, ad quadratum termini diametro BK analogi, ita ΞN ad MΞ; &, erecta normali MΛ, fiat quadratum ex MΛ ad rectangulum ΛMΓ ſicut latus rectum Axis ad ipſum Axem. Jungantur ΛΓ, ΛA, & per centrum Θ iis parallelæ ducantur BΘK, ZΘH: dico eas eſſe diametros quæſitas poſitione, ut ex analyſi manifeſtum eſt. Dein capiatur BK media proportionalis inter ΓΔ & MΞ; & ponatur ſemiſſis ejus de centro Θ ad B & K, quæ proinde contingent ſectionem; ac fiat ut PΣ ad ΣT ita ΘB ad ΘH vel ΘZ: ac recta ZH erit diameter conjugata cum diametro BK.



Cum autem differentia quadratorum ex diametris conjugatis ſit ſemper æqualis differentiæ quadratorum Axium, poſſumus modo ſatis expedito problema hoc reſolutum dare, ſed abſque diametrorum poſitione. Radio ΣP deſcribatur arcus circuli; ac, ductâ de centro recta ΣP, fiat ΣT æqualis minori rationis termino; & erigatur normalis TX occurrens circulo in X; & per X ducatur ΣX, ſi opus eſt, producenda. Dein capiatur Tψ, quæ poterit differentiam quadratorum ex Axibus ſectionis, & ad diſtantiam Tψ ipſi ΣT parallela ducatur ψΦ, occurrens ipſi ΣX in Φ, & ipſi TX parallela ducatur ΦT: dico ΣΦ, ΣT eſſe diametros quæſitas. Nec aliâ demonſtratione opus eſt, niſi quod ΣT ſit ad ΣΦ ſicut ΣT ad ΣX, hoc eſt ad ΣP, ſive in ratione propoſita; quodque ΦT poſſit differentiam quadratorum ex utroque Axe, ſive rectangulum ſub Axe & differentia Axis laterisque ejus recti. Hoc autem fieri debet juxta 13^{am} & 29^{am} VII^{mi}.



Quod ſi Axis minor fuerit latere ejus recto, eadem prorſus erit tam analyſis quam compoſitio: oportebit autem rationem propoſitam majorem eſſe ratione Axis ad Axem ejus conjugatam, minorem vero ratione æqualis ad æqualem, prout demonſtratur in 22da VII^{mi}. At vero ſi Axes fuerint æquales, erunt quoque omnes diametri conjugatæ (per 23^{am} VII^{mi}) æquales inter ſe reſpective; ac proinde in Hyperbola quam vocant, æquilatera, nulla alia reperietur inter conjugatas ratio niſi æqualitatis: in cæteris vero omnibus, ad rationem æqualitatis propius accedunt diametri, quo propiores aſymptotis ſunt.

PROPOSITIO VIII. PROBL.

Pariter in Ellipſi, datis Axe & latere recto ejuſdem, oporteat invenire conjugatas diametros, tam magnitudine quam poſitione, quæ inter ſe ſint in datâ ratione.

Manentibus deſcriptis in Prop. VI^{ta}, ſit ratio data ſicut PΣ ad ΣT, & ſit invenienda diameter BK quæ eandem habeat rationem ad conjugatam ſuam ZH ac PΣ ad ΣT. Fiat ut PΣ ad ΣT ita ΣT ad ΣΥ, ac PΣ erit ad ΣΥ ſicut quadratum ex BK ad quadratum ex ZH. Quoniam vero (per 7^{am} VII^{mi}) quadratum BK eſt ad quadratum ex ZH ſicut MΞ ad MN, erit quoque PΣ ad ΣΥ ſicut MΞ ad MN, ac

compo-

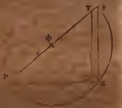
componendo ΥΡ erit ad ΡΣ ſicut ΝΞ ad ΞΜ. Datur autem ratio ΥΡ ad ΡΣ, ac proinde ratio ΝΞ ad ΞΜ datur; ac, ob datam ΝΞ, data quoque eſt ΞΜ, punctumque Μ datur.

Componetur itaque problema, ſi fiat ut ΡΣ ad ΣΤ ita ΣΤ ad ΣΥ; dein fiat ut ΡΥ ad ΣΥ ita ΝΞ ad ΞΜ; &, erecta normali ΜΛ, cujus quadratum ſit ad rectangulum ΑΜΓ ſicut latus rectum ad Axem ΑΓ, jungantur ΑΛ, ΛΓ, quæ ex jam dictis parallelæ erunt diametris quæſitis ΒΚ, ΖΗ per centrum Θ ducendis. Invenimus igitur utramque diametrum poſitione: media autem proportionalis inter ΓΔ (differentiam inter Axem & latus ejus rectum) & nuper inventam ΞΜ erit (per 6ᵗᵃᵐ hujus) æqualis diametro quæſitæ ΒΚ; ac ſi capiatur ΖΗ ad ΒΚ in ratione propoſitâ, ſive ut ΣΤ ad ΡΣ, erit ΖΗ diameter cum ΒΚ conjugata; & ΒΚ erit ad latus ejus rectum ſicut ΡΣ ad ΣΤ ſive ut ΜΞ ad ΜΝ, ut patet ex 7ᵐᵃ VIIᵐⁱ. Atque hæc in ſequentibus ubique obſervanda; nec opus eſt ut repetantur.



Oportebit autem rationem propoſitam non majorem eſſe quam ratio Axis majoris ad minorem, nec minorem ratione Axis minoris ad majorem, per ea quæ in 24ᵗᵒ ſeptimi demonſtrata ſunt.

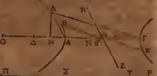
Abſque poſitione autem diametrorum magnitudinem hoc modo invenies. Quoniam data eſt earum ratio, ac ſumma quadratorum ex iiſdem æqualis eſt quadrato Axis & figuræ ejus ſimul, hoc eſt (per 12ᵐᵃᵐ & 30ᵐᵃᵐ VIIᵐⁱ) ſummæ quadratorum Axium, ſive quadruplo quadrati ex ΑΘ: ſi termini rationis ΡΣ, ΣΤ ponantur ad angulos rectos, & in junctâ ΡΤ capiatur ΡΦ ipſi ΑΘ æqualis; ac centro Φ, radio ΦΡ, deſcribatur ſemicirculus occurrens ipſi ΡΣ in puncto Χ, & diametro ΡΤ in puncto Ψ, & jungatur ΧΨ: dico rectas ΡΧ, ΧΨ æquales eſſe diametris quæſitis. poſſunt enim ſimul quadruplum quadrati ex ΑΘ, ob angulum rectum, & ſunt in ratione ΡΣ ad ΣΤ; ac proinde æquales ſunt ipſis ΒΚ, ΖΗ, quas quærimus.



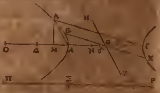
PROPOSITIO IX. PROBL.

Datis Hyperbolæ Axe & latere recto; invenire diametros ejus conjugatas, tam poſitione quam magnitudine, quarum ſumma æqualis ſit rectæ datæ.

Repetatur Schema Propoſitionis quintæ hujus, ac habeantur puncta Ξ, Ν termini rectarum Homologarum. Quoniam vero ΝΑ eſt ad ΓΝ ſicut latus rectum ad Axem tranſverſum; erit componendo ΑΓ ad ΓΝ ſicut Axis tranſverſus ac latus rectum ſimul ad ipſum Axem ΑΓ; ac proinde quadratum ex ΑΓ æquale erit rectangulo ΝΓΔ, ſive ſub ΝΓ & eâ quæ æqualis eſt utrique Axi & lateri recto ſimul ſumpto. Jam (per 8ᵛᵃᵐ VIIᵐⁱ) quadratum ex ΑΓ, hoc eſt rectangulum ſub ΝΓ, ΓΔ, eſt ad rectangulum ſub ΝΞ, ΜΞ ſicut quadratum ſummæ diametrorum conjugatarum ad quadratum ex utrâque ΜΞ & eâ quæ po-



teſt rectangulum ΝΜΞ ſimul ſumptâ: erit igitur ΓΔ ſive ſumma Axis & lateris ejus recti ad ΜΞ ſicut quadratum ſummæ diametrorum conjugatarum ad quadratum ex ΜΞ & eâ quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ ſimul ſumpta, hoc eſt (per 4. II. *El.*) ad quadratum ex ΜΞ una cum rectangulo ΝΜΞ & duplo rectangulo ſub ΜΞ & eâ quæ poteſt ΝΜΞ. erit igitur, ob utrinque inventam ΜΞ, ut ΓΔ (ſumma Axis & lateris recti) ad ΠΡ (datam ſummam diametrorum conjugatarum) ita eadem conjugatarum ſumma ad ΞΜ, ΜΝ ſimul (hoc eſt ad duplam ipſius ΘΜ) una cum dupla ejus quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ; ac proinde ita ſemi-ſumma conjugatarum ad ΘΜ & eam quæ poteſt ΝΜΞ ſimul. Sit ea ΘΟ, quæ, ob datas ΓΔ & conjugatarum ſummam, data erit; &, ob datum Θ, datur quoque punctum Ο. Auferatur utrinque communis ΘΜ, & erit ΟΜ æqualis ei quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ: quocirca ΜΝ erit ad ΟΜ ſicut ΟΜ ad ΜΞ, ac componendo ΝΟ erit ad ΟΜ ſicut ΟΞ ad ΞΜ. Permutando autem ΝΟ erit ad ΟΞ ſicut ΟΜ ad ΜΞ: unde iterum componendo ΝΟ & ΟΞ ſimul, ſive dupla ipſius ΘΟ, erit ad ΟΞ ſicut ΟΞ ad ΞΜ. Datis autem punctis Ξ, Ν, Ο rectæ quoque ΞΟ, ΟΝ dantur, adeoque & ΞΜ data eſt. &, dato puncto Ξ, punctum Μ quoque datur.



Componetur itaque problema hoc modo. Inventis punctis Ν, Ξ fiat ut ſemi-ſumma Axis & lateris ejus recti ad ſemi-ſummam diametrorum conjugatarum ita eadem ſemi ſumma conjugatarum ad ΘΟ, quæ à centro Θ in Axe Hyperbolæ producto ponatur: dein fiat ut dupla ipſius ΘΟ ad ΟΞ ita ΟΞ ad ΞΜ; ac invento jam puncto Μ erigatur normalis ΜΛ, ac fiant cætera, prout in Prop. quinta & ſeptima præcedentibus oſtenſum eſt.

Coeuntibus autem punctis Θ, Ν, Ξ, ut fit in Hyperbola æquilatera, erunt ΘΟ, ΞΟ æquales; ac proinde, ſi fiat ut Axis ad ſemi-ſummam conjugatarum datam ita eadem ſemi-ſumma ad ΘΟ: & ſi capiatur ΘΜ ipſius ΘΟ dimidium; erit punctum Μ quod quærimus. Id quod aliunde, nempe ex quintâ hujus, manifeſtum eſt.

Aliter autem, nec inconcinne, problema hoc reſolvi poteſt. Etenim cum differentia quadratorum è quibuſvis conjugatis (per 13^{am} & 29^{am} VII^{mi}) æqualis ſit rectangulo ſub Axe & differentia Axis laterisque ejus recti; ac rectangulum ſub ſummâ & differentiâ diametrorum conjugatarum ſit (per 6. II. *El.*) æquale differentiæ quadratorum ex iiſdem; erit rectangulum ſub ſumma & differentia conjugatarum æquale rectangulo ſub Axe & differentiâ Axis & lateris ejus recti: quapropter ſumma conjugatarum erit ad Axem ſicut differentia Axis & lateris recti ad differentiam conjugatarum. Datis autem cæteris, data quoque eſt differentia conjugatarum; ac proinde ipſæ conjugatæ, ob datas tam ſummam quam differentiam earundem.

Fiat igitur ut ſumma propoſita ΠΡ ad Axem ΑΓ ita Γδ ad quartam proportionalem, quæ ſit ΡΤ; ac, diviſa ΠΤ biſariam in Σ, erit ΡΣ major è diametris, ΠΣ vero minor.

Inventis autem diametris (per quintam hujus) earundem poſitionem obtinebimus, capiendo ΜΞ tertiam proportionalem ipſis ΛΔ, ΒΚ, vel ΝΜ tertiam proportionalem ipſis ΓΔ, ΖΗ. Sed hoc inverſâ ut ita dicam compoſitione fit, nec ad mentem *Apollonii*, quem in ſingulis problematis ante omnia punctum Μ, unde cætera conſequuntur, quæſiviſſe veriſimile eſt.

Oportebit autem ſummam propoſitam non minorem eſſe ſumma Axium conjugatarum, per ea quæ demonſtrata ſunt ad Prop. 25. Lib. VII^{mi}.

PROPOSITIO X. PROBL.

Datis Ellipſeos Axe & latere recto, invenire diametros conjugatas, tam poſitione quam magnitudine, quarum ſumma rectæ datæ æqualis ſit.

Habeantur

Habeantur Homol[illegible]um termini, puncta nempe [illegible], & quoniam ΑΝ eſt ad ΝΓ ſicut latus rectum ad Axem tranſverſum, erit dividendo [illegible] ad [illegible] ſicut differentia Axis & lateris recti ad Axem ΑΓ, adeoque quadratum Α[illegible] æquale erit rectangulo ſub ΓΝ & [illegible] differentiâ Axis & lateris recti. [illegible] ſt autem (per [illegible] VII[illegible]) differentia Axis & lateris recti ſive [illegible] ad ΜΞ ſicut quadr[illegible]m è d[illegible] ſummâ diametrorum Ellipſeos conjugatarum ad quadratum ex ΜΞ una cum eâ quæ poteſt rectangulum [illegible] ſimul ſumptâ. Hoc autem quadratum conficitur (per 4^{am} II^{di} *El.*) ex quadrato ex ΜΞ & rectangulo ΝΜΞ una cum duplo rectangulo ſub ΜΞ & eâ quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ, & ob utrinque inventam ΜΞ, erit ut Γ[illegible] ad ſummam diametrorum conjugatarum ita eadem ſumma ad ΜΞ, ΜΝ ſimul (hoc eſt ΝΞ) una cum duplâ ejus quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ, & ita ſemi-ſumma diametrorum ad ΘΞ una cum ea quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ: data eſt igitur ΘΞ una cum ea quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ. Sit ea ΘΚ, è quâ auferatur data ΘΞ: datum itaque reſiduum ΞΚ poterit rectangulum ΝΜΞ; hoc eſt (per 6^{am} II^{di} *El.*) differentiam quadratorum ex ΞΘ, ΘΜ: ac proinde exceſſus quadrati ex ΞΘ ſupra quadratum ex ΞΚ æqualis erit quadrato ex ΘΜ. Dantur autem ΞΘ, ΞΚ adeoque ΘΜ data eſt, datumque punctum Μ.



Componetur itaque hoc modo: fiat ut ſemi-differentia Axis & lateris recti ad ſemi-ſummam conjugatarum (quæ ſit ΠΡ) ita eadem ſemi-ſumma ad quartam proportionalem ΘΚ; quæ ponatur in Axe ultra punctum Ξ: dein in producto Axe altero ponatur ΘΧ ipſi ΚΞ æqualis, ac centro Χ radio ΞΘ deſcribatur arcus circuli occurrens Axi, ſi problema poſſibile ſit, in puncto Μ; & ordinatim ductâ rectâ ΜΛ, jungantur ΓΛ, ΑΛ, quibus parallelæ erunt diametri quas quærimus &c. Eſt enim quadratum ex ΘΜ æquale exceſſui quo quadratum ex Ξ[illegible] ſuperat quadratum ex ΘΧ ſive quadratum ex ΚΞ, prout ex præmiſſâ Analyſi fieri oportuit.

Invenientur autem diametri ipſæ ex data earum ſumma, methodo omnino diverſa. Cum enim ſumma quadratorum diametrorum quarumvis conjugatarum ſit (per 3^{am} VII^{mi}) æqualis datæ ſummæ quadrati Axis & figuræ ejuſdem; atque (per 4^{am} II^{di} *El.*) quadratum ſummæ ſit æquale ſummæ quadratorum partium una cum duplo rectangulo earundem, & hoc quoque quadratum datum ſit: dabitur etiam duplum rectangulum ſub diametris conjugatis. Hoc autem duplo rectangulo è datâ quadratorum ſummâ ſublato, erit reliquum (per 7^{am}. II. *El.*) æquale dato quadrato differentiæ conjugatarum, adeoque & ipſa differentia data eſt. Datis autem tam ſummâ quam differentiâ habentur quoque ipſæ diametri quas quærimus.

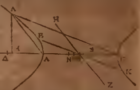
Oportebit autem datam ſummam diametrorum conjugatarum non minorem eſſe ſummâ Axium, nec majorem ſummâ conjugatarum æqualium, ſive eâ quæ poteſt duplum quadratorum ex utroque Axe ſimul ſumptorum; ut ex iis quæ in 26ta ſeptimi demonſtrata ſunt.

PROPOSITIO XI. PROBL.

Datis Hyperbolæ Axe & latere recto, invenire diametros conjugatas, quarum differentia æqualis ſit rectæ datæ.

Maneant ea quæ in Hyperbola prius deſcripta ſunt, ac eodem quo in præcedentibus demonſtratum eſt modo, conſtabit (ex 9[na] ſeptimi) ΓΔ, ſive ſummam Axis & lateris recti, eſſe ad Μ ſicut quadratum ex differentiâ diametrorum quarumvis conjugatarum ad quadratum differentiæ ipſius ΜΞ & ejus quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ; hoc eſt ad quadratum ex ΜΞ & rectangulum ΝΜΞ ſimul, dempto duplo rectangulo ſub ΜΞ & eâ quæ poteſt ΝΜΞ. Cumque ΜΞ ex utraque parte inventa ſit, erit ut ΓΔ ad differentiam conjugatarum ita eadem differentia ad ΜΞ, ΜΝ ſimul (ſive ad duplam ipſius ΘΜ demptâ duplâ ejus quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ. Si igitur fiat ut ΓΔ ad datam differentiam conjugatarum ita ſemiſſis ejuſdem differentiæ ad ΘΡ, data erit recta ΘΡ, punctumque Ρ datum. Eſt autem ΘΡ æqualis ipſi ΘΜ demptâ eâ quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ: quare ΜΡ poterit rectangulum ΝΜΞ, ac ΝΜ erit ad ΜΡ ſicut ΜΡ ad ΜΞ; dividendo autem ΝΡ erit ad ΡΜ ſicut ΡΞ ad ΞΜ, & permutando ΝΡ erit ad ΡΞ ſicut ΡΜ ad ΜΞ, unde iterum dividendo dupla ipſius ΘΡ erit ad ΡΞ ſicut ΡΞ ad ΞΜ. Dantur autem puncta Θ, Ρ, Ξ; adeoque & rectæ ΘΡ, ΡΞ; ac proinde recta ΞΜ datur, punctumque Μ datum eſt.

Componetur igitur hoc modo. Inventis punctis Ν, Ξ, fiat ut ΓΔ, ſive ſumma Axis & lateris ejus recti, ad datam conjugatarum differentiam, ita ejuſdem differentiæ ſemiſſis ad quartam proportionalem, quæ ſit ΘΡ in Axe ponenda: dein fiat ut dupla ipſius ΘΡ ad ΡΞ ita ΡΞ ad ΞΜ, ac invento puncto Μ erigatur normalis ΜΛ; fiantque cætera prout ſupra.



Quoniam vero in nonâ hujus oſtenſum eſt rectangulum ſub ſummâ & differentiâ quarumvis Hyperbolæ diametrorum conjugatarum æquale eſſe rectangulo ſub Axe & differentiâ Axis & lateris ejus recti; erit ἀνάλογον ut differentia conjugatarum ad Axem ſectionis ita differentia Axis & lateris recti ad diametrorum conjugatarum ſummam; ac datis cæteris data quoque erit ſumma conjugatarum: & ob datam ſummam & differentiam dabuntur etiam ipſæ conjugatæ.

Hinc modo ſatis expedito tam nonum quam hoc undecimum problema conſtruxeris. Erecta enim normali ΤΥ ſuper rectam aliquam ΠΡ, fiat ΤΥ æqualis mediæ proportionali inter Axem & differentiam Axis & lateris recti, ſive quæ poſſit differentiam quadratorum Axium, ac capiatur ΤΡ æqualis differentiæ quarumvis conjugatarum, vel ΠΤ æqualis ſummæ earundem; junctaque ΡΥ vel ΥΠ biſariam ſecetur in Φ, Χ; ac ducatur ipſi ΤΡ normalis ΦΣ, vel ΣΧ ipſi ΠΥ, quæ occurrat rectæ ΠΡ in puncto Σ: Dico rectas ΣΡ, ΣΥ æquales eſſe diametris conjugatis quæſitis, ſi ΤΡ fuerit data differentia; vel ΠΣ, ΣΥ, ſi ΠΤ data fuerit conjugatarum ſumma. Namque ob æquales ΡΦ, ΦΥ, erunt ΣΡ, ΣΥ æquales inter ſe, ac quadratum ex ΣΥ, hoc eſt ΣΡ, ſuperabit quadratum ex ΣΤ quadrato ex ΤΥ ſive differentiâ inter quadratum Axis & figuram ſectionis: adeoque (per 13[am] & 29[am] VII[mi]) ΡΣ, ΣΥ ſunt diametris quæſitis æquales. Pari modo, ſi ΠΤ fuerit data ſumma, ΠΣ, ΣΥ erunt æquales, ob ΠΥ in Χ biſectam & angulum ΠΧΣ rectum; ac quadratum ex ΤΥ æquale erit differentiæ quadratorum ex ΠΣ, ΣΤ, quæ proinde erunt diametri quæſitæ. Oportebit autem, per ea quæ in 27[ma] ſeptimi demonſtrata ſunt, differentiam conjugatarum datam minorem eſſe differentia inter Axes Hyperbolæ conjugatas.



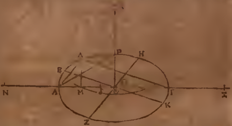
Coroll. Hinc manifeſtum eſt quod, ſi in diverſiſſimis Hyperbolis differentiæ inter quadrata Axium & figuras ſectionum æquales fuerint, quaſcunque ſumſeris diametros magnitudine datas, æquales quoque erunt diametri cum æqualibus conjugatæ.

PRO-

PROPOSITIO XI. PROBL.

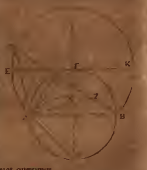
Datis Ellipſeos Axe majore & latere recto, invenire diametros ejus conjugatas, quarum differentia æqualis ſit rectæ datæ.

Iiſdem manentibus quæ in Ellipſi deſcripſimus, erit (per 9^{am} VII^{mi}) ut quadratum Axis ad rectangulum ſub NΓ, MΞ ita quadratum differentiæ diametrorum conjugatarum ad quadratum differentiæ ipſius MΞ & ejus quæ poteſt rectangulum NMΞ; unde eodem omnino argumento quo in præcedente uſi ſumus, erit ut Θ (ſive differentia Axis & lateris recti) ad differentiam diametrorum conjugatarum ita eadem differentia ad MΞ, MN ſimul, hoc eſt ad NΞ ſive dupla ipſius ΘΞ, demptâ duplâ ejus quæ poteſt rectangulum NMΞ. Fiat igitur ut differentia Axis & lateris recti ad differentiam conjugatarum ita ſemiſſis ejuſdem differentiæ ad OΘ, quæ proinde data eſt, datumque punctum O. Sed OΘ, per jam dicta, æqualis eſt exceſſui quo ΘΞ ſuperat eam quæ poteſt rectangulum NMΞ. poterit igitur recta ΞO rectangulum NMΞ, hoc eſt (per 6^{am}. II. *El.*) differentiam quadratorum ex ΘΞ, ΘM; adeoque quadratum ex ΘM æquale eſt exceſſui quo quadratum ex ΘΞ ſuperat quadratum ex OΞ. Dantur autem ΘΞ, OΞ, unde & ΘM quoque data eſt, punctumque M datum.



Componetur itaque problema, ſi fiat ut differentia Axis & lateris recti ad differentiam conjugatarum datam, ita ſemiſſis datæ differentiæ ad ΘO; quæ à centro Θ in Axe verſus Ξ ponatur: deinde in producto Axe minore fiat ΘX ipſi OΞ æqualis, ac centro X radio ΘΞ deſcribatur arcus circuli occurrens Axi in punctis M, μ, æqualiter à centro Θ diſtantibus; & erectis normalibus ut MΛ, invenientur diametri quæſitæ modo ſuperius deſcripto. Cujus compoſitionis ratio ex Analyſi & ex 47^{mæ} I. *El.* manifeſta eſt.

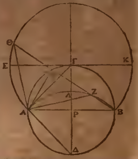
Differentia autem propoſita non major eſſe debet differentiâ Axium Ellipſeos, nam (per 27^{am} VII^{mi}) ſi ponatur major eâ, problema impoſſibile erit, punctumque M extra Axem cadet.



Aliter autem, ac modo ſane non ineleganti, invenire poſſumus diametros Ellipſeos conjugatas, datâ earundem vel ſummâ vel differentiâ. Quoniam enim AP (ſive ea quæ poteſt ſemiaxium quadrata ſimul) poterit quoque (per duodecimam VII^{mi}) quarumvis ſemidiametrorum conjugatarum quadrata; radio AP deſcribatur circulus AΓBΔ, & ſuper diametrum AB ad centrum P erigatur normalis ΓPΔ, occurrens circulo in Γ, Δ: dein centro Δ radio ΔA circinetur arcus AZB, qui ob æquales AP, PΔ erit circuli quadrans, ac proinde angulus quem capit erit (per 20^{am}. III. *El.*) ſeſquialter anguli recti. Huic arcui inſcribatur ZB æqualis differentiæ diametrorum conjugatarum, quæ producatur ad occurſum ſemi-circuli AΓB in puncto H: Dico rectas AH, HZ æquales eſſe diametris conjugatis quas quærimus.

Jungantur

Junganțur enim ΑΗ, ΑΖ, & (per 31^{m}. III. *El.*) angulus ΑΗΒ erit rectus; angulus autem ΗΖΑ, qui deinceps eſt angulo ΑΖΒ, eſt ſemirectus: adeoque & angulus ΗΑΖ angulo ΗΖΑ æqualis, nnde & ΑΗ ipſi ΗΖ æqualis: quadrata igitur ex ΑΗ, ΗΒ (hoc eſt ex ΖΗ, ΗΒ) ſimul ſumpta, ob angulum ΑΗΒ rectnm, æqualia ſunt quadruplo quadrati ex ΑΡ, hoc eſt quadratis Axium Ellipſeos ſimul ſumptis, per conſtructionem: ipſarum vero ΒΗ, ΗΖ differentia eſt recta propoſita ΖΒ; quare (per 12^{m} VII^{mi} hujus) ΒΗ, ΗΖ diametris conjugatis quæſitis ſunt æquales.



Si vero, ut in Propoſitione decima, data fuerit coujugatarum ſumma, ac proponatur diametros ipſas exhibere; centro Γ radio ΓΑ deſcribatur arcus ΑΘΒ, qui (per 20^{m} III. *El.*) capiet angulum æqualem ſemirecto: igitur ſi recta datæ ſummæ coujugatarum æqnalis, puta ΒΘ, eidem arcui inſcribatur, & ducantur ΑΘ, ΑΗ, erit angulus ΑΘΗ ſemirectus; & ob angulum ΑΗΒ rectum, erit quoque angulus ΘΑΗ ſemirectus, ac proinde ΘΗ ipſi ΗΑ æqualis erit. Quadrata autem ex ΑΗ, ΗΒ, hoc eſt ex ΘΗ, ΗΒ æqualia ſunt quadrato ex ΑΒ ſive quadratis Axium ſimul: quare rectæ ΘΗ, ΗΒ, quarum ſumma eſt ΘΒ, æquales ſuut diametris coujugatis quas invenire oportuit.

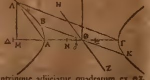
Coroll. Ac manifeſtum eſt quod, ſi in quibuſvis Ellipſibus ſpecie diverſis, ſummæ quadratorum Axium æquales fuerint inter ſe, quaſcuuque ſumpſeris diametros magnitudine datas, æquales quoque erunt diametri cum æqualibus conjugatæ.

Hic obiter notandum quod, quemadmodnm quadrato radii ΑΡ æqualis eſt *Lunula Hippocratis* ΑΛΒΓ; ita, ſi ducatur diameter ΕΓΚ ipſi ΑΒ parallela, erit ſpatium ΑΕΚΒΑ æquale quadrato ex ΕΓ, ac proinde duplum Lunulæ ΑΛΒΓ. unde ſpatium ΕΓΗΑ ſemi-lunulæ ΑΗΓΑ ſit æquale. Cujus rei demonſtratio manifeſta eſt.

PROPOSITIO XIII. PROBL.

Datis Axe & latere recto Hyperbolæ, invenire diametros ejus conjugatas, tam magnitudine quam poſitione, quæ contineant rectangulum rectangulo dato æquale.

Maneutibus Schematis Hyperbolæ prius deſcriptis, ponatur ΒΚ, ΖΗ diametros eſſe quæſitas. Quoniam autem (per 10^{am} VII^{mi}) quadratum ex ΑΓ eſt ad rectangulum ſub diametris conjugatis Hyperbolæ ſicut ΝΓ ad eam quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ, ac (per demonſtrata in 7ma VIII^{vi}) rectangulum ſub ΝΓ & ſummâ Axis & lateris recti æquale eſt quadrato ex ΑΓ, ſublato utrinque ΝΓ, erit rectangulum ſub ΓΔ (Axe & latere ejus recto ſimul) & eâ quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ æquale rectangulo dato ſub diametris quæſitis ΒΚ, ΖΗ. Si igitur applicetur rectangulum propoſitum ad ΓΔ ſummam Axis & lateris ejus recti, data erit latitudo, nempe ea quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ, hoc eſt (per 6^{am}. II. *El.*) ea quæ poteſt differentiam quadratorum ex ΘΜ, ΘΞ. Sit latitudo ea ΘΟ, ac quadratum ex ΘΟ æquale erit differentiæ quadratorum ex ΘΜ, ΘΞ: utrinque adjiciatur quadratum ex ΘΞ, & quadrata ex ΘΟ, ΘΞ æqualia erunt quadrato ex ΘΜ. Dantur autem ΘΟ, ΘΞ: adeoque & ΘΜ datur, unde & punctum Μ datum.



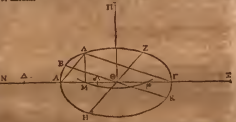
Componetur

Componetur autem problema hoc modo. Iiſdem manentibus quæ in præcedentibus Hyperbolæ figuris, applicetur datum rectangulum ſub diametris conjugatis ad rectam ΓΔ, ſive ad æqualem ſummæ Axis & lateris ejus recti; ſitque latitudo inde orta recta ΘΟ, ita ut rectangulum ſub ΓΔ, ΘΟ æquale ſit rectangulo dato; ac ponatur ΘΟ in Axe conjugato, & jungatur ΟΞ; ac fiat ΘΜ ipſi ΟΞ æqualis; & invento jam puncto Μ, fiant cætera ut prius. Demonſtratio autem manifeſta eſt ex Analyſi & ex 47ma I. *El.*

PROPOSITIO XIV. PROBL.

Similiter in Ellipſi, datis Axe & latere recto, oporteat invenire diametros ejus conjugatas, tam magnitudine quam poſitione, ſub quibus rectangulum æquale rectangulo dato comprehendatur.

Manentibus deſcriptis in prioribus Ellipſeos Schematis, eodem omnino argumento quo in præcedenti uſi ſumus, erit (per decimam VII^{mi}) ſicut rectangulum ſub ΝΓ & Γδ differentiâ Axis lateriſque ejus recti (hoc eſt quadratum ex ΑΓ) ad rectangulum ſub diametris conjugatis ΒΚ, ΖΗ, ita ΝΓ ad eam quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ; &, ob ΝΓ ex utraque parte repertam, erit rectangulum ſub Γδ differentiâ Axis & lateris ejus recti & eâ quæ poteſt rectangulum ΝΜΞ æquale rectangulo dato, nempe ſub diametris conjugatis quæſitis ΒΚ, ΖΗ contento: applicato igitur rectangulo illo propoſito ad datam Γδ, dabitur latitudo ex applicatione orta, æqualis ei quæ poterit rectangulum ΝΜΞ; hoc eſt (per 5^{am}. II. *El.*) ei quæ poterit exceſſum quo quadratum ex ΘΞ ſuperat quadratum ex ΘΜ. Sit latitudo iſta rectæ ΘΠ æqualis, & quadratum ex ΘΠ æquale erit exceſſui quo quadratum ex ΘΞ ſuperat quadratum ex ΘΜ: quadratum igitur ex ΘΞ ſuperat quadratum ex ΘΠ quadrato ex ΘΜ. Dantur autem ΘΞ, ΘΠ: quare recta ΘΜ quoque datur, punctumque Μ datum.

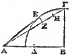


Compoſitio autem manifeſta eſt. Nam ſi applicetur rectangulum datum ad Γδ differentiam Axis & lateris ejus recti; hoc eſt, ſi habeatur latitudo ΘΠ, ita ut rectangulum ſub ΘΠ, Γδ ſit æquale rectangulo dato, ac ponatur ΘΠ in axe minore producto; dein centro Π radio ΘΞ deſcribatur arcus circuli occurrens Axi in punctis Μ, μ: erectis normalibus, ut ΜΛ, habebuntur, modo toties dicto, diametri conjugatæ, quarum rectangulum æquale erit dato.

Oportebit autem rectangulum datum (per 28^{am} VII^{mi}) non minus eſſe rectangulo ſub utroque Axe comprehenſo; nec majus eſſe quadrato ſub æqualibus diametris contento, hoc eſt (per 12^{am} VII^{mi}) ſemi-ſummâ quadratorum ex utroque Axe, ſive rectangulo ſub ΘΓ, ΓΔ, quod æquale eſt ſemi-ſummæ quadrati Axis & figuræ ejuſdem.

Obtinebimus autem eaſdem diametros modo prorſus diverſo. Quoniam enim (per 12^{am} VII^{mi}) ſumma quadratorum ex ΒΚ, ΖΗ ſit æqualis ſummæ datæ quadratorum Axium Ellipſeos; ſi eidem ſummæ adjiciatur duplum rectangulum ſub ΒΚ, ΖΗ, fiet (per 4^{am} II. *Elem*) quadratum ex ΒΚ, ΖΗ ſimul ſumptis, adeoque ΒΚ, ΖΗ ſimul dantur. Si vero ab eadem quadratorum ſummâ auferatur duplum illud rectangulum, remanebit (per 7^{am} II. *Elem.*) quadratum differentiæ ipſarum ΒΚ, ΖΗ: adeoque & ipſa differentia data eſt. Datis autem ſummâ ac differentiâ duarum rectarum, ipſæ rectæ quoque dantur.

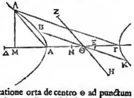
Componetur itaque, ſi poterit ΑΒ ſummam quadratorum Axium; ac ad rectos angulos ponatur ΒΓ potens duplum rectanguli dati ſub diametris quæſitis; ac centro Β, radio ΒΓ, deſcribatur arcus circuli ΓΕ. dividatur bifariam recta ΑΒ in Δ, ac ceutro Δ, radio ΒΔ, deſcribatur ſemicirculi particula occurrens arcui ΓΕ in Ε, & jungantur ΑΕ, ΑΓ: quæ, per jam dicta, æquales erunt ſummæ ac differentiæ diametrorum quæſitarum. Fiat ΑΖ ipſi ΑΕ æqualis, & ſecetur ΖΓ bifariam in Η, & erit ΑΗ diametrorum major, ΗΓ vero earundem miuor.



PROPOSITIO XV. PROBL.

Datis Hyperbolæ Axe & latere recto, invenire ſitum & magnitudinem diametrorum ejus conjugatarum, quarum data ſit quadratorum ſumma.

Maneaut figuræ Hyperbolæ prius deſcriptæ, ac propoſito diametrorum quarumvis coujugatarum ΒΚ, ΖΗ quadratorum aggregato, oporteat ipſas diametros invenire. Quoniam (per 11^{am} VII^{mi}) quadratum ex ΑΓ eſt ad ſummam quadratorum ex diametris conjugatis Hyperbolæ ſicut ΝΓ ad utramque ΝΜ, ΜΞ ſimul; ac quadratum ex ΑΓ æquale eſt rectangulo ſub ΝΓ & ΓΔ ſummâ Axis & lateris recti: ob utrinque communem ΝΓ, erit rectangulum ſub ΓΔ & utrâque ΝΜ, ΜΞ ſimul, ſive duplâ ipſius ΘΜ, æquale datæ ſummæ quadratorum è diametris coujugatis. Applicatâ igitur quadratorum illorum datâ ſummâ ad ΓΔ ſummam Axis & lateris ejus recti, data erit latitudo duplæ ipſius ΘΜ æqualis: data eſt igitur ΘΜ, ac ob datum Θ punctum Μ quoque datur.



Componetur itaque problema, ſi applicetur ſemi-ſumma quadratorum è diametris coujugatis ad ΓΔ ſive ad ſummam Axis & lateris ejus recti, ac ponatur latitudo ex applicatione orta de centro Θ ad punctum Μ in Axe ſitum: inveutoque puncto Μ habebuutur diametri ipſæ, prout ſupra. Demonſtratio autem ex Analyſi manifeſtiſſima eſt.

Mauifeſtum etiam eſt quod ſumma quadratorum propoſita non minor eſſe poteſt ſummâ quadratorum Axium, hoc eſt ſummâ quadrati Axis & figuræ ejuſdem, ſive rectangulo ΑΓΔ.

PROPOSITIO XVI. PROBL.

Datis Ellipſeos Axe & latere recto, oporteat invenire diametros ejus conjugatas, tam magnitudine quam poſitione, quæ datam habeant quadratorum differentiam.

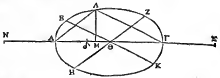
Manentibus Ellipſeos figuris prius deſcriptis, ſint diametri ΒΚ, ΖΗ coujugatæ, quarum quadrata datam habeant differeutiam: ipſarumque ſitum ac magnitudinem hoc modo inveſtigabimus. Quoniam (per 14^{am} VII^{mi}) quadratum ex ΑΓ eſt ad differentiam quadratorum è diametris coujugatis ſicut ΝΓ ad duplam ipſius ΘΜ; argumento toties uſurpato, erit rectangulum ſub Γδ (differeutiâ Axis & lateris ejus recti) & duplâ ipſius ΘΜ æquale differeutiæ quadratorum è diametris conjugatis: applicatâ itaque datâ quadratorum differeutiâ ad Γδ (datam Axis & lateris recti differentiam) emerget latitudo data, nempe dupla ipſius ΘΜ: eſt igitur ΘΜ data, puuctumque Μ datum.

Manifeſta autem eſt Compoſitio: nam ſi applicetur ſemi-differentia quadratorum è diametris conjugatis ad Γδ differentiam Axis & lateris recti, orietur ex applicatione latitudo quæſitæ ΘΜ æqualis, unde cætera conſequuntur.

Oportebit

Oportebit autem differentiam quadratorum propoſitam non majorem eſſe differentiâ quadratorum Axium, ſive differentiâ quadrati & figuræ Axis, hoc eſt rectangulo ΑΓδ.

Poſſumus etiam aliter tam XV^um quam XVI^um problema reſolvere, ope 12^mæ & 13^æ Prop. lib. Septimi. Nam cum in Hyperbola (per 13^am VII^mi) differentia quadratorum Axium æqualis ſit differentiæ quadratorum quarumvis conjugatarum, ſi ſemi-ſummæ propoſitæ quadratorum ex iiſdem adjiciatur ac auferatur ſemi-differentia data; dabuntur quadrata utrinſque diametri quæſitæ, æqualia nempe datarum ſummæ ac differentiæ. Pariterque, ob ſummam quadratorum in Ellipſi (per 12^am VII^mi) datam, ſi detur quoque earundem differentia, eodem argumento obtinebimus utriuſque diametri quadratum. Unde, ſi libuerit, punctum Μ quoque inveniemus, per demonſtrata in 5ta & 6ta Octavi.



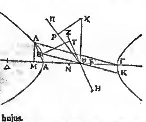
PROPOSITIO XVII. PROBL.

Datis Hyperbolæ Axe & latere recto, invenire diametros ejus conjugatas tam magnitudine quam poſitione, quæ datum contineant angulum.

Hoc problema, ſicut etiam ſequens, nobis reſolutum dedit *Apollonius* in fine Libri ſecundi: ibi tamen ſectiones ipſas jam deſcriptas eſſe ſupponit. Propoſitionem autem 31^mam ſeptimi inter *Theoremata dioriſtica* inſeruiſſe videtur, ut viam ſterneret ad ſolutionem eorundem problematum, ipſis Curvis nondum deſcribi ſuppoſitis, ut in præmiſſis dictum eſt.

Quoniam enim (per 31^am ſeptimi) rectangulum ſub Axibus contentum ſit æquale parallelogrammo obliquangulo ſub quibuſcunque duabus conjugatis diametris comprehenſo; ſi ab extremitate diametri alicujus ad conjugatam ejus demittatur normalis, erit duplum rectanguli ſub normali & diametro illâ conjugatâ contenti æquale rectangulo ſub Axibus ſectionis: quod proinde rectangulum erit ad rectangulum ſub ipſis conjugatis contentum ſicut normalis ipſa ad ſemi-diametrum, à cujus extremitate demiſſa eſt normalis. Dato autem angulo, data eſt ratio hæc, adeoque, ob datum Axium rectangulum, datum eſt rectangulum ſub diametris conjugatis.

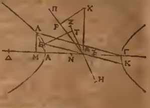
Pone jam factum eſſe quod quæritur, ac ſint ΒΚ, ΖΗ diametri conjugatæ, continentes angulum ΒΘΖ æqualem angulo dato: demittaturq; normalis ΒΤ ad diametrum ΖΗ; ac, ob datum angulum ΒΘΖ, dabitur ratio ΒΤ ad ΒΘ. Sed, per jam dicta, ſicut ΒΤ ad ΒΘ ita rectangulum ſub Axibus ad rectangulum ſub ΒΚ, ΖΗ contentum: &, ob datos Axes, datum quoque erit rectangulum ſub ΒΚ, ΖΗ. Dato autem rectangulo ſub diametris conjugatis dantur quoque ipſæ diametri, tam magnitudine quam poſitione, per ea quæ demonſtravimus in 13^a hujus.



Hinc talis conficitur problematis compoſitio. Fiat angulus ΑΘΠ æqualis angulo dato, in qua capiatur ΘΡ ad Axem ΑΓ ſicut Axis conjugatus ad ΓΔ ſive ſummam Axis & lateris ejus recti, & ſuper ΘΡ ad angulos rectos erigatur ΡΧ occurrens Axi conjugato producto in Χ: Dico ΧΞ junctam vel jungi ſuppoſitam ipſi ΘΜ æqualem eſſe. Invento autem puncto Μ, erigatur normalis ΛΜ, ac habebuntur cætera ſicut prius.

 Fecimus

Fecimus enim rectangulum ſub ΓΔ, ΘΡ æquale rectangulo ſub Axibus contento; &, ob angulum ΘΧΡ æqualem angulo ΖΘΒ, erit ΡΘ ad ΘΧ ſicut ΤΒ ad ΒΘ, hoc eſt (per $31^{\text{mæ}}$ VII^{mi} huj.) ut rectangulum ſub Axibus ad rectangulum ſub diametris ΒΚ, ΖΗ; erit igitur rectangulum ſub ΓΔ, ΘΧ æquale contento ſub diametris conjugatis ΒΚ, ΖΗ; adeoque, per ea quæ in Compoſitione problematis 13^{i} oſtenſa ſunt, rite inventum eſt punctum Μ. Ac manifeſtum eſt angulum hunc non habere limitem; ſed quo propiores ſunt diametri conjugatæ ipſis Aſymptotis, eo minorem evadere.

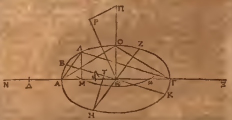


PROPOSITIO XVIII. PROBL.

SImiliter in Ellipſi, datis Axe & latere ejus recto, oporteat invenire diametros conjugatas, tam magnitudine quam poſitione, quæ datum contineant angulum.

Rectangulum ſub Axibus Ellipſeos contentum (per eandem $31^{\text{mæ}}$ VII^{mi}) æquale eſt parallelogrammo cuivis obliquangulo ſub diametris conjugatis contento: adeoque, demiſſa normali ab extremitate alicujus diametri ΖΗ ad conjugatam ejus ΒΚ, ut ΗΤ, erit duplum rectangulum ſub ΒΚ, ΗΤ æquale rectangulo ſub Axibus contento; quod quidem datum eſt, adeoque rectangulum ſub ΒΚ, ΗΤ datur. Eſt autem rectangulum ſub ΒΚ, ΗΤ ad rectangulum ſub ΒΚ, ΗΘ ſicut ΗΤ ad ΗΘ; ratio autem ΗΤ ad ΗΘ datur, ob angulum ΒΘΗ datum: ac proinde datum eſt rectangulum ſub ΒΚ, ΗΘ, ejuſque duplum ſub ΒΚ, ΗΖ, ſive rectangulum ſub diametris quæſitis. Dato autem conjugatarum rectangulo dabitur quoque (per 14^{am} VIII^{vi}) recta ΘΜ; unde punctum Μ datum.

Componetur itaque problema hoc modo. Fiat angulus ΑΘΡ æqualis angulo dato ſub conjugatis contento, ac capiatur ΘΡ, ita ut rectangulum ſub ΘΡ & Γδ (differentiâ Axis & lateris ejus recti) æquale ſit rectangulo ſub Axibus ſectionis; & erigatur normalis ΡΠ occurrens Axi minori producto in Π: dein centro Π, radio ipſi ΘΞ æquali, deſcribatur arcus circuli occurrens Axi majori in punctis Μ, μ; & erigantur normales ut ΜΛ, unde cætera conſequentur modo toties dicto.



Rectangulum enim ſub Γδ, ΘΡ æquale eſt parallelogrammo Ellipſi circumſcripto; quod quidem eſt ad rectangulum ſub conjugatis ΒΚ, ΖΗ ſicut ΗΤ ad ΗΘ, hoc eſt ut ΘΡ ad ΘΠ, quia angulus ΘΠΡ angulo ΒΘΗ factus eſt æqualis: proinde rectangulum ſub Γδ, ΘΠ erit æquale rectangulo ſub ΒΚ, ΖΗ: quare (per ea quæ in 14ta hujus invenimus) circulus centro Π, radio ΘΞ deſcriptus, per punctum quæſitum Μ neceſſario tranſibit.

Oportebit autem angulum acutum à diametris conjugatis contentum non minorem eſſe angulo deinceps ei qui ſub rectis ΑΟ, ΟΓ ad mediam ſectionem inclinatis continetur; uti demonſtravit *Apollonius* in penultima Propoſitione libri II. Ac ſi minor fuerit eo, recta ΘΠ major evadet ipſa ΘΞ, ac proinde circulus præſcriptus ad occurſum Axis ΑΓ pertingere non poteſt.

Ipſas autem diametros obtinebimus, ſi datæ ſummæ quadratorum ex utroque Axe

Axe, ſive rectangulo ΑΓΔ, adjiciatur ac auferatur duplum dati rectanguli ſub conjugatis, quod nempe eſt ad rectangulum datum ſub Axibus Ellipſeos in data ratione ΘΗ ad ΗΤ, ſive ut Radius ad ſinum anguli dati: habebuntur enim (per 4^{tam} & 7^{am} II. *El.*) quadrata tam ſummæ quam differentiæ ipſarum diametrorum quæſitarum ΒΚ, ΖΗ.

Obſervandum autem hic loci, quod in omnibus his problematis ſectionum diametros conjugatas ſpectantibus, non niſi duas, nempe ΒΚ, ΖΗ, inquiſivimus; cum tamen etiam aliud diametrorum par propoſito ſatisfacere poſſit, inclinatis diametris ad Axem ſub iiſdem quidem angulis ſed ad alterum ejus latus. Notandum etiam quod in Schematis ac demonſtrationibus præcedentibus poſuimus Axem latere recto majorem: quod ſi minor latere recto fuerit Axis, nulla omnino difficultas aut diverſitas vel in Analyſi vel in Compoſitione Problematum exinde orietur.

Scholion.

Veteribus Geometris, ac ſpeciatim Apollonio *noſtro, mos erat problemata plana pro reſolutis habere, poſtquam rem eo deduxerant, ut rectangulum dato rectangulo æquale ſub lateribus quæſitis contineretur, quorum ſumma vel differentia datæ rectæ æqualis fuerat. Hoc autem docet* Euclides *in* 28va *&* 29na Sexti Elem. *monſtrando quo pacto applicandum ſit parallelogrammum datum ad rectam datam, quod excedat vel deficiat parallelogrammo cuivis dato ſimili. Cujus quidem rei generaliſſime propoſitæ caſus ſunt particulares; applicare rectangulum vel quadratum ad rectam datam, quod excedat vel deficiat quadrato: hujuſque effectionem poſtulant Geometræ* Euclide *poſteriores. Quoniam vero in ſubſequentibus problematis fere omnibus uſus erunt dictæ effectiones, ab hoc loco non alienum videbitur, earundem compendia, quantum fieri poſſit, ſimpliciſſima exhibere; ac more Lemmatum præmittere.*

Oporteat igitur primo, applicare datum quadratum ad rectam datam excedens quadrato: hoc eſt, invenire puncta Γ, Ζ *in data rectâ* ΑΒ *productâ, ita ut rectangula* ΑΓΒ, ΑΖΒ *æqualia ſint quadrato è rectâ datâ* ΔΕ. *Biſecetur* ΑΒ *in* Δ, *& erigatur normalis* ΔΕ, *quæ fiat æqualis lateri quadrati applicandi: ac juncta recta* ΑΕ *vel jungi ſuppoſita æquales fiant* ΔΓ, ΔΖ: *Dico* Γ, Ζ *eſſe puncta quæſita.*

Eſt enim quadratum ex ΑΕ, *hoc eſt quadratum ex* ΓΔ, *æquale quadratis ex* ΑΔ, ΔΕ *ſimul. Quadratum autem ex* ΓΔ *(per 6^{am} II. Elem.) æquale eſt quadrato ex* ΑΔ *una cum rectangulo* ΑΓΒ: *quadrata igitur ex* ΑΔ, ΔΕ *æqualia ſunt quadrato ex* ΑΔ *& rectangulo* ΑΓΒ; *quare ſublato communi quadrato ex* ΑΔ, *erit quadratum ex* ΔΕ *æquale rectangulo* ΑΓΒ; *quod fieri oportuit. Ac eodem modo probabitur rectangulum* ΑΖΒ *eidem quadrato ex* ΔΕ *æquale: unde manifeſtum eſt rectas* ΑΓ, ΒΖ *æquales eſſe.*



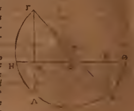
2do *Oporteat applicare datum quadratum ad rectam datam deficiens quadrato, ſive invenire in rectâ datâ* ΑΒ, *inter* Α *&* Β, *puncta* Γ, Ζ, *ita ut rectangula* ΑΓΒ, ΑΖΒ *æqualia ſint quadrato datæ alicujus* ΔΕ. *Biſecetur ſimiliter* ΑΒ *in* Δ, *ac ſit normalis* ΔΕ *latus quadrati dati; & centro* Ε, *radio* ΑΔ *deſcribatur arcus circuli occurrens rectæ* Α, Β *in punctis* Γ, Ζ: *Dico* Γ, Ζ *puncta eſſe quæ quærimus.*

Quadratum etenim ex ΕΓ *æquale eſt quadratis ex* ΔΕ, ΓΔ *ſimul, ac idem quadratum ex* ΕΓ *ſive* ΑΔ *(per 5^{am} II. Elem.) æquale eſt rectangulo* ΑΓΒ *una cum quadrato ex* ΓΔ: *ſublato itaque communi quadrato ex* ΓΔ, *reſtabit quadratum ex* ΔΕ *æquale rectangulo* ΑΓΒ; *parique argumento etiam rectangulo* ΑΖΒ: *unde* ΑΓ *ipſi* ΖΒ *&* ΑΖ *ipſi* ΓΒ *ſunt æquales. Ac manifeſtum eſt quod* ΔΕ *latus quadrati applicandi non majus eſſe debet dimidio rectæ datæ* ΑΒ; *nam ſi aliter fuerit, circulus centro* Ε *radio* ΑΔ *deſcriptus nec ſecabit neque continget ipſam* ΑΒ; *adeoque problema impoſſibile eſt.*



3° *Applicandum ſit rectangulum ſub datis lateribus contentum ad rectam datam excedens*

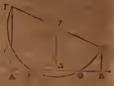
dens quadrato, hoc eſt, invenienda ſint in rectâ A B *productâ puncta* H, Θ, *ita ut rectangulum* A Θ B *vel* A H B *æquale ſit rectangulo ſub datis lateribus* A Γ, B E *contento. Erectis normalibus* A Γ, B E *ad extrema rectæ* A B *& ad contrarias partes, jungatur* Γ E, *quæ biſecetur in* Z; *ac circulus centro* Z *radio* Z Γ *deſcriptus tranſibit per quæſita puncta* H, Θ.



Demittatur enim de centro Z *normalis* Z Δ; *&, ob æquales* Γ Z, Z E, *erit* A Δ *ipſi* Δ B *æqualis, ac proinde* A Λ *ipſi* B E, *&* A H *ipſi* B Θ *æquales ſunt: ob circulum igitur, rectangulum* Γ A Λ, *hoc eſt quod ſub datis* Γ A, B E *continetur æquale erit (per 35^tam III. Elem.) rectangulo* H A Θ *ſive* A H B, *eidemque æquali* A Θ B. *Inventa igitur ſunt puncta* H, Θ, *de quibus quæſitum fuit.*

4to *Applicandum ſit rectangulum ſub datis lateribus ad rectam datam, deficiens quadrato; ſive oporteat invenire puncta* H, Θ *in recta* A B, *ita ut rectangula* A H B, A Θ B *æqualia fiant rectangulo ſub datis* A Γ, B E *contento. Erigantur ad angulos rectos, ad eaſdem partes rectæ* A B, *normales* A Γ, B E; *ac juncta* Γ E *biſecetur in* Z: *dein centro* Z *radio* Z Γ *deſcribatur arcus circuli, qui quidem (ſi problema poſſibile ſit) occurret rectæ* A B *in punctis quæſitis* H, Θ.

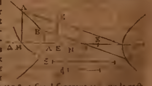
Ducatur enim Z Δ *ipſi* A B *normalis, & ob biſectam* Γ E *in* Z *erit* A Δ *ipſi* Δ B *æqualis, ut &* A Λ *ipſi* B E: *proinde rectangulum* Λ A Γ, *hoc eſt rectangulum ſub* A Γ, B E, *æquale erit (per 36^tam III. Elem.) rectangulo* H A Θ, *hoc eſt ipſi* A H B *vel* A Θ B *rectangulo, adeoque puncta* H, Θ *rem præſtant. Oportebit autem rectangulum ſub* A Γ, B E *non majus eſſe quadrato ex* A Δ, *quia (per 5^tam II. El.) quadratum ex* A Δ *majus eſt rectangulo* A H B *quadrato ex* H Δ; *adeoque rectangulum* A H B, *hoc eſt* Γ A Λ, *ſive quod fit ſub* A Γ, B E, *non majus erit quadrato ex* A Δ *vel* Δ B. *Sin aliter fuerit, circulus* Γ Λ E *rectæ* A B *non occurret: unde conſtabit applicationem propoſitam impoſſibilem eſſe.*



PROPOSITIO XIX. PROBL.

Datis in Hyperbola Axe & latere ejus recto, invenire diametrum quæ habeat latus ſuum rectum rectæ datæ æquale.

Manentibus Schematis Hyperbolæ præcedentibus, ſit recta data ξ, & erit (per 15^tam VII^mi) ut quadratum ex Axe A Γ, ſive rectangulum ſub N Γ & Γ Δ (ſumma Axis & lateris recti) ad rectangulum ſub N Γ & M Ξ, hoc eſt ut ſumma illa Axis & lateris recti ad M Ξ, ita quadratum lateris recti dati ξ ad quadratum ex M N; adeoque ſi fiat, ut ſumma Axis & lateris ejus recti ad latus rectum ξ ita idem ξ ad aliam, puta ad Φ, data erit recta Φ; ac rectangulum ſub M Ξ & Φ æquale erit quadrato ex M N: unde M Ξ erit ad M N ſicut M N ad Φ. Jam ſi Axis ſectionis major fuerit latere ejus recto, M Ξ major erit quam M N, ac proinde M N major quam Φ: quare per converſionem rationis M Ξ erit ad Ξ N ſicut M N ad exceſſum quo M N ſuperat Φ, ac permutando M Ξ erit ad M N ſicut Ξ N ad differentiam inter M N & Φ: rurſuſque per converſionem rationis M Ξ erit ad Ξ N ſicut Ξ N ad exceſſum quo ipſa Ξ N ſuperat differentiam ipſarum M N & Φ. Sed M N eſt exceſſus quo M Ξ ſuperat Ξ N; igitur exceſſus quo Ξ N ſuperat differentiam ipſarum M N & Φ æqualis eſt exceſſui quo dupla ipſius N Ξ & Φ ſimul ſuperant M Ξ: erit igitur ut M Ξ ad N Ξ ita N Ξ ad exceſſum quo dupla ipſius N Ξ & Φ ſimul ſuperant M Ξ; unde rectangulum ſub M Ξ & exceſſu quo dupla ipſius N Ξ & Φ ſimul ſuperant M Ξ æquale

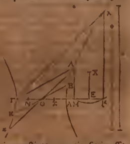


eſt

eſt quadrato ex NΞ. Datur autem quadratum ex NΞ: datur igitur rectangulum ſub MΞ & exceſſu jam dicto. Adjacet autem datæ rectæ, nempe duplæ ipſius NΞ una cum ◆ ſimul, deficiens quadrato. datur igitur recta MΞ, punctumque M datum eſt.

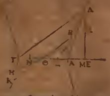
Componetur autem hoc modo. Fiat ut ſemi-ſumma Axis & lateris ejus recti ad dimidium lateris recti dati ξ, ita idem dimidium lateris recti ad ſemiſſem ipſius ◆, cui fiat NE æqualis, & erigatur Axi normalis EX quæ ponatur ipſi NΞ æqualis, & centro X radio ΞE deſcribatur circuli particula occurrens Axi in puncto M &c. Cujus rei ratio ex Analyſi & Lemmate 2[do] Scholii manifeſta eſt.

Si vero Hyperbolæ Axis minor fuerit latere ejus recto, erit MΞ minor quam MN. Cum autem, per præcedentia, MΞ eſt ad MN ſicut MN ad ◆, erit ◆ major quam MN: quare per converſionem rationis MX erit ad NΞ ſicut MN ad exceſſum quo ◆ ſuperat MN, ac permutando MΞ erit ad MN ſicut NΞ ad exceſſum ipſius ◆ ſupra MN; adeoque rurſus, per converſionem rationis MΞ erit ad NΞ ſicut NΞ ad exceſſum quo differentia inter ◆ & duplam ipſius NΞ ſuperat MΞ: igitur rectangulum ſub MΞ & exceſſu quo MΞ ſuperatur à differentia quæ eſt inter ◆ & duplam ipſius NΞ æquale erit quadrato ex NΞ. Sed datum eſt quadratum ex NΞ: datum igitur eſt rectangulum ſub MΞ & dictum exceſſum. Adjacet autem rectangulum illud datum rectæ datæ, nempe exceſſui quo ◆ ſuperat duplam ipſius NΞ, deficiens quadrato: datur igitur MΞ, punctumque M datum.



Compoſitio autem vix diverſa eſt, niſi quod, hoc in caſu, punctum N à vertice remotius eſt quam Ξ. fiat igitur ut ſemi-ſumma Axis & lateris ejus recti ad ſemi-latus rectum datum, ita idem ſemi-latus rectum ad tertiam proportionalem, cui æqualis ponatur NE; & erectâ ad Axem normali EX, fiat EX ipſi NΞ æqualis; & centro X radio XE deſcribatur arcus circuli occurrens Axi in puncto M quæſito, vel in punctis M, μ, quoties fieri poſſit: eſt enim NE æqualis dimidio ipſius ◆; adeoque ΞE æqualis dimidio ejus cui adjacet rectangulum æquale quadrato ex NΞ deficiens quadrato, nempe dimidio exceſsûs quo ◆ ſuperat duplam ipſius NΞ.

Διορισμός. In primo quidem caſu, ubi Axis major eſt latere ejus recto, manifeſtum eſt (ex 33[tia] VII[mi]) quod latus rectum Axis minus erit latere recto cujuſvis alterius diametri; adeoque propoſitum latus rectum ξ debet eſſe majus latere recto Axis; ac quo majus eſt ξ eo remotior erit diameter quæſita ab Axe ſectionis. Atque etiam in altero caſu, ſi Axis minor fuerit latere ejus recto, non tamen minor dimidio ejus, eodem modo (per 34[tam] VII[mi]) ſe res habebit. At vero ſi latus rectum majus fuerit duplo Axis, erit NΞ major quam ΞA: ac ſi fiat ΞM ipſi NΞ æqualis, & erigatur normalis MX ſive EX ipſi NΞ æqualis, habebitur (per 35[tam] VII[mi]) diameter illa ſectionis BK, cujus latus rectum, ex omnibus lateribus rectis *Minimum*, duplum erit diametri; coincidentibus ſcilicet punctis M, E, & circulo, cujus centrum X & radius MΞ, Axem contingente in puncto M, propter ΞE ipſi EX æqualem. Diameter autem BK, per ea quæ in ſextâ hujus demonſtravimus, media eſt proportionalis inter MΞ ſive NΞ & ſummam Axis ejuſque lateris recti; adeoque rectangulum ſub NΞ & ſummâ Axis & lateris recti æquale eſt quadrato ex BK. Sed ſumma Axis & lateris recti eſt ad differentiam earundem ſicut Axis AΓ ad NΞ; quare rectangulum ſub NΞ & ſumma Axis laterisque recti ejus æquale eſt rectangulo ſub Axe & exceſſu lateris recti ſupra Axem: quadratum igitur ex BK æquale eſt rectangulo ſub Axe & differentia Axis & lateris recti, hoc eſt differentiæ inter figuram Axis ejuſdemque

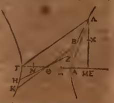


Axis

Axis quadratum: erit igitur BK media proportionalis inter Axem & differentiam Axis & lateris recti; & latus rectum Hyperbolæ *minimum* duplum erit ipſius AK.

Quapropter ſi propoſitum latus rectum minus fuerit duplo mediæ proportionalis inter Axem & differentiam Axis laterisſque ejus recti, hoc eſt, ſi quadratum ejus minus fuerit quadruplo exceſſu quo rectangulum ſub Axe & latere ejus recto ſuperat quadratum Axis, impoſſibile erit problema. Hoc ſi majus fuerit, ſed minus latere recto Axis, invenientur duæ diametri ab utraque Axis parte, quibus idem datum latus rectum competat: ſi vero fuerit lateri recto Axis æquale, utrinque una reperietur præter Axem, ita ut omnino tres diametri rem præſtent. Si vero latere recto Axis majus fuerit latus rectum propoſitum, non niſi una diameter ab utroque Axis latere problemati ſatisfacere poteſt. *Maximum* autem non datur.

Dico inſuper, quemadmodum latus rectum diametri AK duplum eſt ipſius BK, ita, in omni caſu ubi habentur, ab utraque Axis parte, duæ diametri quarum latera recta ſunt æqualia, earundem ſummam æqualem eſſe communi earum lateri recto.



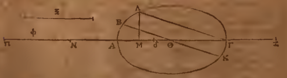
Eſt enim (per 29^am VII^mi) differentia quadrati ex diametro quavis ZH & figuræ ſuper ZH factæ æqualis differentiæ quadrati Axis AΓ & figuræ ejuſdem; hoc eſt, æqualis eſt rectangulo ſub Axe & differentiâ inter Axem & latus rectum ejus: rectangulum igitur ſub ZH & exceſſu quo latus rectum ejus ſuperat ipſam ZH datum eſt. Adjacet autem rectæ datæ, nempe lateri recto propoſito, deficiens quadrato: proinde latus rectum æquale erit utrique & ZH & alteri diametro quæ idem habeat latus rectum ac ZH.

Coroll. Hinc manifeſtum eſt alteram diametrum, quæ latus rectum idem habet ac Axis AΓ, æqualem eſſe exceſſui quo latus illud rectum ſuperat Axem.

PROPOSITIO XX. PROBL.

Datis in Ellipſi Axe & latere ejus recto. invenire diametrum, quæ habeat latus ſuum rectum rectæ datæ æquale.

Iiſdem manentibus quæ in Schematis Ellipſeos prioribus. Sit recta data ξ, & oporteat invenire diametrum illam Ellipſeos quæ habeat latus ejus rectum ipſi ξ æquale. Per 15^am VII^mi, demonſtratum eſt quadratum ex AΓ, ſive rectangulum ſub NΓ & Γδ (differentiâ Axis & lateris ejus recti) eſſe ad rectangulum ſub NΓ, MΞ, ſicut quadratum lateris recti ξ ad quadratum ex MN: eſt igitur ut differe[illegible] Axis & lateris recti ad MΞ ita quadratum ex ξ ad quadratum ex MN: quapropter ſi

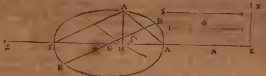


fiat ut differentia Axis & lateris ejus recti ad ξ ita ξ ad aliam, quæ ſit Φ; data erit recta Φ, ac rectangulum ſub MΞ & Φ æquale erit quadrato ex MN: *ἀνάλογον* itaque MΞ erit ad MN ſicut MN ad Φ, ac componendo ΞN erit ad MN ſicut MN & Φ ſimul ad Φ; unde rectangulum ſub ΞN & Φ æquale erit quadrato ex MN una cum rectangulo ſub MN & Φ. Datum autem eſt rectangulum ſub ΞN, Φ; datum igitur eſt rectangulum ſub MN & MN & Φ ſimul: adjacet igitur rectangulum datum ſub ΞN & Φ datæ rectæ Φ excedens quadrato; quare data eſt recta MN; ac ob punctum N datum, datur quoque punctum M.

Compo-

Compoſitio igitur manifeſta eſt: nam ſi producatur ΞΝ ad Π, ac fiat ΝΠ ipſi Φ æqualis, ſive ut ΝΠ ſit ad ξ ſicut ξ ad ΓΔ differentiam Axis laterisque ejus recti; & ad ΝΠ applicetur rectangulum æquale contento ſub ΞΝ & ΝΠ excedens quadrato, quod ſit rectangulum ΝΜΠ: inventum erit (*per Lem.* 3[um] *Schol.*) punctum Μ, unde habebitur poſitio diametri ΒΚ quæ problemati ſatisfacit.

In Ellipſi etiam aliter reſolvetur hoc problema, eo nempe quo uſi ſumus modo in Hyperbolâ; unde paulo paratior oritur conſtructio: nam cum ΜΞ ſit ad ΜΝ ſicut ΜΝ ad Φ, erit componendo ΜΞ ad ΞΝ ſicut ΜΝ ad ΜΝ & Φ ſimul: ac per-



mutando ΜΞ erit ad ΜΝ ſicut ΞΝ ad ΜΝ & Φ ſimul: rurſusque componendo, ΜΞ erit ad ΞΝ ſicut ΞΝ ad ΜΝ, ΞΝ & Φ ſimul ſumptas, ſive ad exceſſum quo Φ & duplum ipſius ΞΝ ſuperat ΜΞ: quadratum igitur ex ΞΝ æquale eſt rectangulo ſub ΜΞ & exceſſu quo Φ & dupla ipſius ΞΝ ſuperant ΜΞ. Quod quidem rectangulum datum eſt, ob datam ΝΞ; adjacet vero rectæ datæ, nempe ei quæ æqualis eſt ipſis Φ & duplæ ipſius ΞΝ ſimul, deficiens quadrato: datur itaque recta ΜΞ; &, ob datum punctum Ξ, punctum Μ quoque datur.

Hinc talis conficitur conſtructio. Fiat ut differentia Axis laterisque ejus recti ad ξ ita dimidium ipſius ξ ad dimidium ipſius Φ, cui fiat ipſa ΝΕ æqualis; & erectâ normali ΕΧ, fiat ΕΧ ipſi ΝΞ æqualis, ac centro Χ radio ΞΕ deſcribatur circuli particula occurrens Axi in puncto Μ: quo invento, cætera peragantur ut prius.

Ac manifeſtus eſt hujus problematis διορισμός. Nam ſi latus rectum propoſitum minus fuerit latere recto Axis majoris, vel majus latere recto Axis minoris, impoſſibile erit problema; cadente puncto Μ, in priori caſu, inter Ε & Α, in poſteriore, ultra verticem Γ.

PROPOSITIO XXI. PROBL.

D*Atis Hyperbolæ Axe & latere recto Axis; invenire diametrum ejus, quæ ad latus ſuum rectum datam habeat rationem.*

Manentibus prius deſcriptis, ſit ratio data ſicut Σ ad Τ, ac ponatur ΒΚ diameter quæſita; &, demiſſâ normali ΑΜ, erit (per 6[am] VII[mi]) ut Σ ad Τ, ſive ut ΒΚ ad latus ejus rectum, ita ΜΞ ad ΜΝ: datur igitur ratio ΜΞ ad ΜΝ: ac dividendo ratio ΝΞ ad ΞΜ data eſt, quæ nempe eadem eſt ac ratio differentiæ terminorum Σ & Τ ad terminum Σ diametro analogum: ac ob datam ΝΞ data quoque eſt ΞΜ, unde & punctum Μ datum.



Si igitur fiat ut differentia terminorum ad terminum diametro analogum, ita ΝΞ ad ΞΜ; habebitur punctum quæſitum Μ, unde cætera conſequuntur.

Ratio autem propoſita non major eſſe poteſt ratione Axis ad latus ejus rectum, ſi Axis major fuerit latere recto; nec minor ratione eorundem, ſi Axis minor fuerit.

PROPOSITIO XXII. PROBL.

PAri modo, datis Ellipſeos Axe & latere recto Axis, invenienda ſit diameter ea quæ ad latus ſuum rectum datam habeat rationem.

Manentibus Schematis Ellipſeos prioribus, ſit ratio data ſicut Σ ad T. Puta factum, ac ſit BK diameter quam quærimus: erit igitur (per $7^{\text{mæ}}$ VII^{mi}) ut Σ ad T, hoc eſt ut BK ad latus ſuum rectum, ita MΞ ad MN: datur itaque ratio MΞ ad MN, ac componendo ratio NΞ ad ΞM data eſt; eadem enim eſt ac ratio ſummæ terminorum Σ, T ad terminum Σ qui diametro reſpondet. Datur autem ΞN; adeoque MΞ quoque datur, punctumque M datum.



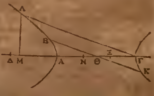
Si igitur fiat ut ſumma terminorum Σ, T ad terminum Σ ita NΞ ad ΞM, habebimus punctum M, & ejus ope diametrum quæſitam, tam magnitudine quam poſitione, per ea quæ in ſexta hujus oſtendimus.

Ratio autem propoſita non major eſſe poteſt ratione Axis majoris ad latus ejus rectum; nec minor ratione Axis minoris ad latus ejus rectum; hoc eſt non minor ratione lateris recti Axis majoris ad Axem ipſum.

PROPOSITIO XXIII. PROBL.

DAtis Hyperbolæ Axe & latere recto; oporteat invenire diametri ſitum & magnitudinem, quæ datâ differentiâ differat à latere ſuo recto.

Manentibus Hyperbolæ figuris, puta factum; ſitque diameter quæſita BK, eidemque parallela ΓΔ, ac demittatur normalis ΑΜ. Erit itaque (per 16^{am} VII^{mi}) ut quadratum ex ΑΓ, ſive rectangulum ſub NΓ, ΓΔ, ad rectangulum ſub NΓ, MΞ (hoc eſt ut ΓΔ ad MΞ) ita quadratum differentiæ diametri BK laterisſque ejus recti ad quadratum ex ΞN. Data autem eſt ratio quadrati differentiæ iſtius ad quadratum ex ΞN, ob datas ipſas: quare datur ratio ΓΔ ad MΞ; &, ob datam ΓΔ, recta MΞ quoque datur, adeoque & punctum M.



Componetur autem problema hoc modo. Fiat ut quadratum differentiæ datæ ad quadratum ex ΞN, ita ſumma Axis laterisſque ejus recti ad MΞ: invento autem puncto M peragantur cætera ad modum ſuperius dictum.

Ac conſtabit differentiam datam minorem eſſe debere differentiâ inter Axem ejuſque latus rectum, ex iis quæ in 6ta VII^{mi} demonſtrata ſunt, uti & ex ipſâ conſtructione: ſunt enim rectæ omnes MΞ reciprocè ut quadrata differentiarum inter diametros lateraque earundem recta: adeoque perpetuo augentur dum differentiæ illæ decreſcunt, quæ proinde ad *Minimam* nunquam devenire poſſunt.

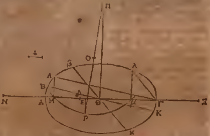
Diametrorum autem magnitudines aliunde obtinebimus: cum enim differentia inter cujuſvis diametri quadratum & figuram ejuſdem (per 29^{nam} VII^{mi}) ſit ubique æqualis

æqualis differentiæ inter quadratum Axis & figuram ejus; erit ἀνάλογον ut differentia data inter diametrum quæſitam & latus ejus rectum ad differentiam inter Axem & latus rectum Axis, ita Hyperbolæ Axis ad diametrum quæſitam. Unde manifeſtum eſt has differentias ubique diametris ſuis reciprocè proportionales eſſe.

PROPOSITIO XXIV. PROBL.

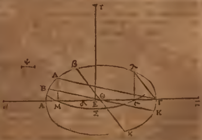
IN Ellipſi autem, datis Axe & latere recto ejuſdem; oporteat invenire ſectionis diametrum, quæ à latere ſuo recto datâ differentia differat.

Manentibus prius deſcriptis in Ellipſi, puta factum; ac ſit BK diameter quam quærimus. Per 16^{am} VII^{mi} demonſtratum eſt quadratum ex AΓ, ſive rectangulum ſub NΓ, Γδ, eſſe ad rectangulum ſub NΓ, MΞ, hoc eſt Γδ ad MΞ, ſicut quadratum



ſemiſſis differentiæ propoſitæ inter BK & latus ejus rectum ad quadratum ex ΘM. Si igitur fiat ut Γδ, ſive differentia Axis & lateris ejus recti, ad ſemiſſem differentiæ propoſitæ, ita eadem ſemi-differentia ad aliam, puta ad ψ; data erit recta ψ; & rectangulum ſub ψ & MΞ æquale erit quadrato ex ΘM: ac proinde ἀνάλογον MΞ erit ad ΘM ſicut ΘM ad ψ; ac dividendo vel componendo ΞΘ erit ad ΘM ſicut differentia vel ſumma ipſarum ΘM & ψ ad ipſam ψ; adeoque datum rectangulum ſub ΞΘ & ψ æquale erit rectangulo ſub ΘM & ſummâ vel differentiâ ipſarum ΘM & ψ; quod rectangulum proinde datum eſt: adjacet igitur rectangulum æquale rectangulo ſub ΞΘ & ψ datæ rectæ ψ, excedens quadrato; quia ψ data eſt differentia laterum: datur igitur (*per Lem. 3. Schol. noſtri*) recta ΘM; ac, ob datum Θ, datur quoque punctum M.

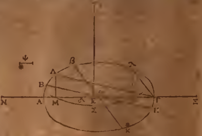
Unde talis oritur Compoſitio. Fiat ut differentia Axis & lateris ejus recti ad ſemi-differentiam diametri laterîſque recti propoſitam, ita eadem ſemi-differentia ad quartam, nempe ad ipſam ψ; cui æqualis ponatur in Axe recta ΘΞ: & producto Axe minore ad Π ita ut ΘΠ ſit æqualis ipſi ΘΞ, eidem parallela ducatur PE ipſi ΞΘ æqualis; ac jungatur ΠP, quæ biſecetur in O: ac arcus circuli MPμ centro O radio PO deſcriptus, ſi problema poſſibile ſit, occurret Axi in punctis M, μ, vel in ſolo μ; uti in ſequentibus patebit.



Aliter autem & paulo ſimplicior habetur problematis ſolutio. Nam cum MΞ ſit ad ΘM ſicut ΘM ad ψ, erit per converſionem rationis MΞ ad ΞΘ ſicut ΘM ad exceſſum quo ΘM ſuperat ψ, ac permutando MΞ erit ad ad ΘM ſicut ΞΘ ad dictum exceſſum: quare rurſus, per converſionem rationis, MΞ erit ad ΞΘ ſicut ΞΘ ad exceſſum quo ΞΘ & ψ ſimul ſumptæ ſuperant ΘM, hoc eſt ad exceſſum quo NΞ & ψ ſimul ſuperant MΞ: quadratum igitur ex ΞΘ æquale eſt rectangulo ſub MΞ & exceſſu

ceſſu quo ΝΞ & ψ ſimul ſuperant ΜΞ; quod quidem rectangulum datum eſt, ob datum quadratum ex ΝΞ. Adjacet autem rectangulum illud rectæ æquali ipſis ΝΞ & ψ ſimul, deficiens quadrato; ac proinde (*per Lem. 2. Schol. noſtr.*) data eſt recta ΞΜ, & ob datum Ξ punctum Μ datur.

Componetur itaque hoc modo. Fiat ΘΕ æqualis dimidio ipſius ψ, à Θ verſus Ν ponenda; &, erecta normali ΕΥ, ponatur ΕΥ ipſi ΘΞ æqualis: dein centro Υ radio ΞΕ deſcribatur arcus circuli ΜΣμ occurrens Axi in punctis Μ, μ; è quorum utroque habebitur poſitio diametri quæ habeat à latere ſuo recto propoſitam differentiam. In alterâ autem diameter excedet latus rectum, in altera vero latus rectum eàdem differentiâ ſuperabit diametrum.



Hujus autem problematis διορισμὸς ex Propoſit. 37ma VII^{mi} petendi. Nam ſi differentia propoſita major fuerit eâ qua Axis major ſuperat latus ejus rectum, cadet punctum Μ extra Axem, ultra verticem Α: ac ſi major fuerit differentiâ quæ eſt inter Axem minorem & latus ejus rectum, cadet quoque punctum μ ultra verticem Γ. unde omnino impoſſibile erit problema. Hac vero ſi minor fuerit, ſed major eâ quæ inter Axem majorem & latus ejus rectum intercedit, duabus diametris utrinque Axi minori adjacentibus ſatisfactum erit problemati. Si vero differentia propoſita minor fuerit differentia inter Axem majorem & latus ejus rectum, cadet utrumque Μ & μ in Axe ΑΓ, & omnino habebuntur quatuor diverſæ diametri quarum differentiæ à lateribus ſuis rectis æquales erunt inter ſe & eidem datæ. *Minima* autem non datur differentia, ſed in diametris conjugatis æqualibus evaneſcit, punctis Μ & μ in centro Θ coeuntibus.

Coroll. Ac nullo negotio demonſtrabitur, duarum diverſarum diametrorum rem propoſitam præſtantium differentiam æqualem eſſe dimidio datæ differentiæ inter diametros illas & latera ſua recta: adeoque ſi data fuerit altera harum diametrorum una cum latere ejus recto, alteram facile invenies. Etenim datarum (diametri & ſemi-differentiæ) ſumma ac differentia æquales ſunt, altera quidem diametro, altera lateri ejus recto, quæſitis.

Coroll. 2. Quare duplum diametri alicujus æquale erit alteri diametro ejuſque lateri recto ſimul ſumptis, quarum differentia æqualis ſit differentiæ inter datam diametrum & latus rectum ejuſdem.

Coroll. 3. Eodemque argumento patebit. Ellipſeos diametrum, cujus conjugata ipſi æqualis eſt, mediam proportionalem eſſe inter duas quaſvis diametros ſectionis, quarum altera exceſſerit latus ſuum rectum eodem exceſſu quo latus rectum alterius ſuperat diametrum.

PROPOSITIO XXV. PROBL.

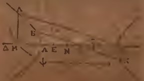
Datis in Hyperbola Axe & latere ejus recto; oporteat invenire poſitionem diametri illius, quæ una cum latere ſuo recto datam conficit ſummam.

Iiſdem poſitis ac in præcedentibus Hyperbolæ Schematis, puta ſactum quod quæritur: ac ſit ΣΚ diameter illa quæ cum latere ſuo recto propoſitam facit ſummam. Per 17^{am} VII^{mi} quadratum ex ΑΓ, ſive rectangulum ΝΓΔ, id eſt, quod ſub ΝΓ & utroque Axe & latere ejus recto ſimul, eſt ad rectangulum ſub ΝΓ & Μ ſicut quadratum ſummæ diametri alicujus ΣΚ & lateris ejus recti ad quadratum rectæ compoſitæ ex ΝΜ, ΜΞ ſimul ſumptis: erit igitur ut ſumma Axis & lateris ejus

recti

recti ad ΜΞ, ita quadratum ex ΒΚ & latus ejus rectum ſimul ad quadratum ex ΝΜ, ΜΞ ſimul, ſive ad quadruplum quadrati ex ΘΜ. Hinc ſi fiat ut ſumma Axis & lateris recti ad ſemi-ſummam propoſitam, ita eadem ſemi-ſumma ad aliam, puta ad ψ; erit recta ψ data, & rectangulum ſub ΜΞ & ψ æquale erit quadrato ex ΘΜ: adeoque ΜΞ erit ad ΘΜ ſicut ΘΜ ad ψ; ac dividendo ΞΘ erit ad ΘΜ ſicut differentia inter ΘΜ & ψ ad ipſam ψ. datum igitur rectangulum ſub ΞΘ & ψ æquale erit contento ſub ΘΜ & differentiâ ipſarum ΘΜ & ψ; ac proinde datum eſt rectangulum illud. Adjacet autem rectæ ψ excedens quadrato, ſi Axis ſectionis major fuerit latere ejus recto; deficiens vero quadrato, ſi latus rectum Axis majus fuerit ipſo Axe: unde (*per Lemm.* 3um *vel* 4tum *Scholii*) manifeſta erit in utroque caſu problematis conſtructio.

Sed ut in præcedentibus, ita in hoc quoque problemate, paulo paratior habetur Compoſitio. Cum enim ΜΞ ſit ad ΘΜ ſicut ΘΜ ad ψ; per converſionem rationis & permutando erit ΜΞ ad ΘΜ ſicut ΞΘ ad exceſſum quo ΘΜ ſuperat ψ: ac rurſus per converſionem rationis ΜΞ erit ad ΞΘ ſicut ΞΘ ad exceſſum quo ΞΘ & ψ ſimul ſuperant ΘΜ, exceſſum ſcilicet quo ΜΞ ſuperat ipſam ΞΘ; hoc eſt, ΜΞ erit ad ΞΘ ſicut ΞΘ ad exceſſum quo dupla ipſius ΞΘ & ψ ſimul ſuperant ΜΞ, ſi latus rectum minus fuerit Axe. Ubi vero Axis minor fuerit latere recto, pari ratione erit ut ΜΞ ad ΞΘ ita ΞΘ ad exceſſum quo differentia inter ψ & duplam ipſius ΞΘ ſuperat ΜΞ:

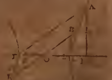


rectangulum igitur ſub ΜΞ & dictum exceſſum æquale erit quadrato ex ΞΘ. Datâ autem ΞΘ, datum eſt rectangulum illud, adjacens rectæ datæ, æquali nempe ipſi ψ auctæ vel minutæ duplo ipſius ΞΘ, & deficiens quadrato: unde (*per Lemma* 2dum *Schol.*) data erit recta ΜΞ, punctumque Μ datum.

Componetur itaque hoc modo. Fiat ut dupla ſumma Axis & lateris ejus recti, ſive ΓΔ bis, ad datam ſemi-ſummam diametri & lateris ejus recti, ita eadem ſemi-ſumma ad tertiam proportionalem, quæ ideo æqualis erit dimidio rectæ quam ψ diximus; ac fiat ΘΕ (verſus Λ ponenda) eidem dimidio rectæ ψ æqualis: unde ΞΕ æqualis erit dimidio ejus cui applicandum eſt rectangulum æquale quadrato ex ΞΘ, idque in utroque Caſu. Erigatur igitur (*per Lemma* 2dum) normalis ΕΧ ipſi ΞΘ æqualis, ac centro Χ radio ΞΕ deſcribatur arcus circuli occurrens Axi in puncto Μ, vel etiam in punctis Μ, μ, ſi problema dupliciter conſtrui poſſit; uti proxime docebitur.

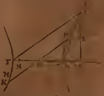
Determinatur autem problema hoc ex propoſitionibus 38va, 39na & 40 Septimi. Nam ſi Axis ſectionis major fuerit latere ejus recto, per 38vam erit ſumma Axis & lateris ejus recti minor quavis aliâ diametro una cum latere ejus recto ſimul ſumpto; oportebit igitur ſummam propoſitam majorem eſſe Axe & latere ejus recto ſimul. Nec aliter ſi Axis minor fuerit latere ejus recto, ſed non minor tertia parte ejuſdem; nam, per 39nam Septimi, conſtat quoque ſummam Axis laterisque ejus recti minorem eſſe ſummâ diametri alterius cujuſvis & lateris ejus recti: eâ igitur major eſſe debet ſumma propoſita; aliter problema erit impoſſibile.

Quod ſi Axis Hyperbolæ minor fuerit tertia parte lateris ejus recti, erit ΞΘ major quartâ parte Axis; ac ſi fiat ΞΕ ipſi ΞΘ æqualis, cadet punctum Ε in Axe ultra verticem Λ; erectâque normali ΕΧ ipſi ΞΘ æquali, circulus centro Χ radio ΧΕ, hoc eſt ΞΘ, continget Axem in puncto Ε; ac proinde diameter ΒΚ, cujus poſitio hoc in caſu determinatur per punctum Ε coincidens cum puncto Μ, *Minimam* omnium habebit ſummam ſui laterisque ſui recti. Et quoniam ΝΕ tripla eſt ipſius ΞΕ, erit (per 6am VIImi) latus rectum diametri ΒΚ triplum ipſius ΒΚ, quod



quidem plenius in 40ma VIImi demonſtratum invenietur. Diameter autem illa ΒΚ

(per ea quæ oſtendimus in 6ta hujus) media eſt proportionalis inter ΞΕ (ſive Ξ & ΓΔ ſummam Axis & lateris ejus recti; unde rectangulum ſub ΘΞ, ΓΔ æquale erit quadrato ex ΒΚ. Summa autem Axis & lateris ejus recti eſt ad earundem differentiam ſicut ΑΘ ad ΘΞ; quocirca rectangulum ſub ſemi-Axe ΑΘ & differentiâ Axis & lateris ejus recti æquale eſt quadrato ex ΒΚ. Ac diametri ΒΚ quadruplum oſtenſum eſt æquale ſummæ minimæ diametri & lateris ſui recti: erit igitur ſumma illa minima media proportionalis inter octuplum Axis ΑΓ & differentiam Axis & lateris ejus recti; ac quadratum ſummæ hujus *minimæ* æquale erit octuplo exceſſui quo figura Axis ſuperat ejuſdem Axis quadratum. proinde ſi octuplus ille exceſſus auferatur è quadrato ſummæ Axis & lateris ejus recti, remanebit quadratum exceſsûs quo latus rectum Axis ſuperat Axis triplum.



Igitur in Hyperbolâ, cujus latus rectum Axis majus ſit triplo Axe, ſi proponatur invenienda diameter, quæ una cum latere ejus recto datam efficiat ſummam, ac quadratum ſummæ datæ minor fuerit quadrato ſummæ Axis & lateris ejus recti ſpatio majori quam quadrato ejus quo latus rectum Axis ſuperat triplum Axis, problema erit impoſſibile. Si vero quadratum ſummæ propoſitæ, una cum quadrato exceſsûs quo latus rectum Axis ſuperat Axis triplum, æquale fuerit quadrato ſummæ Axis & lateris ejus recti, ſola recta ΒΚ rem præſtat ad idem latus Axis. Hac vero ſi major fuerit ſumma propoſita, minor vero ſumma Axis & lateris ejus recti, occurret circulus radio ΞΕ centro Χ deſcriptus Axi in punctis Μ & μ, ultra verticem Α; unde obtinebuntur duæ diametri ab utraque parte ipſius ΒΚ & ad idem Axis latus, quæ habeant eandem ipſarum & laterum ſuorum rectorum ſummam: ut omnino quatuor diametri rem præſtent. Si vero ſumma illa æqualis fuerit ſummæ Axis & lateris ejus recti, duæ tantum præter Axem diametri, (ab utroque ejus latere una) ſatisfaciunt problemati, coincidente puncto μ cum vertice Α. Quod ſi ſumma propoſita major fuerit eâ ſummâ, una tantum diameter ab utraque parte Axis, ultra ΒΚ, ſolutionem præbet; cadente puncto μ citra verticem Α. *Maxima* autem non datur.

Coroll. 1. Hinc facillime conſtabit, quod quemadmodum diameter ΒΚ quarta pars eſt ſummæ ipſius ΒΚ & lateris ejus recti, ita ſumma duarum quarumvis diametrorum, communem una cum lateribus ſuis rectis ſummam conficientium, ſemiſſis eſt communis illius ſummæ.

Coroll. 2. Hinc diameter illa quæ eandem habet ſummam ſui lateriſque ſui recti, quam habet alia quævis data diameter, æqualis erit ſemiſſi exceſsûs quo latus rectum diametri datæ ſuperat ipſam diametrum: ac latus rectum alterius illius diametri æquale erit ſemi-ſummæ lateris recti diametri datæ ac triplæ ipſius diametri.

Coroll. 3. Diameter autem illa quæ eandem habet ſummam ſui laterisque ſui recti. quam habet Axis, æqualis erit ſemiſſi exceſſûs quo latus rectum Axis ſuperat Axem: ac latus ejus rectum æquale erit ſemi-ſummæ lateris recti Axis & Axis tripli; ac proinde minus eſt latere recto Axis ſemiſſe exceſsûs quo latus rectum Axis ſuperat Axis triplum.

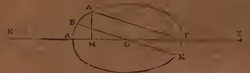
PROPOSITIO XXVI. PROBL.

Ellipſeos Axe & latere recto datis, oporteat invenire diametrum, quæ una cum latere ſuo recto datam conficiat ſummam.

Manentibus iis quæ in Ellipſi ſuppoſuimus, puta factum; ac ſit ΒΚ diameter quam quærimus. Ac (per 17^{am} Septimi) erit quadratum Axis ad rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ ſicut quadratum ſummæ diametri & lateris recti datæ ad quadratum ſummæ ipſarum ΜΝ, ΜΞ, hoc eſt, ad quadratum ex ΝΞ; erit igitur, per toties dicta, differentia Axis & lateris ejus recti ad ΜΞ ſicut quadratum ſummæ propoſitæ ad quadratum

dratum ex NΞ. Sed data ſunt cætera; ergò datur quoque MΞ: nam quadratum ſummæ propoſitæ eſt ad quadratum ex NΞ ſicut differentia Axis & lateris ejus recti ad MΞ. & dato puncto Ξ, punctum M quoque datur.

Manifeſta autem eſt Compoſitio. Fiat enim ut quadratum è ſummâ propoſitâ ad quadratum ex NΞ, ita differentia Axis laterisque recti ejuſdem ad rectam ipſi MΞ æqualem, quæ ponatur à Ξ verſus N: ac, ſi problema propoſitum poſſibile ſit, cadet punctum M in Axe AΓ: obtento autem puncto M, cætera efficiantur ut in præmiſſis.



Hujus autem problematis limites ex 41mo Septimi petendi ſunt; nam ſumma illa non minor eſſe poteſt Axe majore & latere ejus recto ſimul: nec major ſummâ Axis minoris & lateris recti ejuſdem. In priori caſu cadet punctum M ultra verticem A, in poſteriore citra punctum Γ, extra Ellipſin.

Diametrum autem ipſam, datâ ſummâ ejuſdem & lateris ejus recti, ſatis expedite invenire licet. Nam, per 30um VII^mi, rectangulum ſub qualibet diametro & ſummâ ejuſdem & lateris recti æquale eſt rectangulo ſub Axe & Axe unà cum latere ejus recto ſimul ſumpto: proinde ἀνάλογον erit ut ſumma propoſita diametri alicujus & lateris ejus recti ad ſummam Axis laterisque recti Axis, ita ipſe Axis Ellipſeos ad diametrum quæſitam: unde manifeſtum eſt, ob datum Axem ejuſque latus rectum, ſummam diametri cujuſvis & lateris ejus recti reciprocè proportionalem eſſe ipſi diametro Ellipſeos.

PROPOSITIO XXVII. PROBL.

Datis lateribus figuræ Axis Hyperbolæ, oporteat invenire poſitionem diametri quæ habeat figuram ejus, ſive rectangulum ſub diametro & latere ejus recto, propoſito rectangulo æquale.

Iiſdem manentibus quæ in figuris Hyperbolæ præmiſſis, erit (per 18^am VII^mi) quadratum ex AΓ ad rectangulum ſub diametr… K & latere ejus recto, ſicut NΓ ad MN; ſed quadratum ex AΓ oſtenſum eſt æquale rectangulo ſub NΓ & ſumma Axis & lateris ejus recti: quare, ob utrinque inventum N…, erit rectangulum ſub MN & ſumma Axis & lateris ejus recti æquale rectangulo ſive figuræ propoſitæ: ſi igitur rectangulum illud datum applicetur rectæ datæ, nempe ipſi ΓΔ, ſummæ Axis & lateris ejus recti; latitudo ex applicatione orta æqualis erit quæſitæ MN, quæ proinde data eſt: ac ob datum punctum N punctum M quoque datur.



Applicetur igitur figura propoſita ad ſummam Axis & lateris ejus recti, ac ponatur inventa latitudo à puncto N verſus A, ut NM; ac ſi major fuerit NM quam NA, poſſibile erit problema: invento autem puncto M, peragantur cætera ut in præcedentibus. Διορισμὸν autem habet ex 42da VII^mi, qua demonſtratur figuram propoſitam minorem eſſe non poſſe figurâ Axis: Maximam autem figuram non habet Hyperbola.

PROPOSITIO XXVIII. PROBL

Datis lateribus figuræ Axis Ellipſeos, proponatur ſecti[illegible] diametrum illam invenire, quæ cum ſuo latere recto datam figuram ſive rectangulum contineat.

Iiſdem poſitis ac in Schematis Ellipſeos præcedentibus, argumento omnino conſimili probabitur (ex 18va VII[illegible]) rectangulum ſub MN & differentiâ Axis & lateris ejus recti æquale eſſe figuræ propoſitæ, ſive rectangulo ſub diametro quæſitâ & latere ejus recto. quare ſi rectangulum illud datum applicetur rectæ datæ, hoc eſt, differentiæ Axis & lateris ejus recti, latitudo inde orta æqualis erit quæſitæ MN, quæ propterea data eſt ac dato puncto [illegible], datur etiam punctum M.

Applicato igitur rectangulo propoſito ad rectam Γδ differentiæ Axis & lateris ejus recti æqualem, latitudini ex applicatione inventæ æqualis fiat NM, à N verſus centrum ponenda; ac ſi punctum M cadat in Axe, ſive inter A & Γ, problema poſſibile erit: ac dato puncto M erigatur normalis MΔ, cujus quadratum ſit ad rectangulum AMΓ ut latus rectum Axis ad



ipſum Axem; junctæque ΓΔ parallela ducatur BΛ, quæ, per demonſtrata in præmiſſis, diameter erit quam quærimus.

Limites autem habet problema hoc ex 43^{a} Septimi, qua conſtat figuram propoſitam non minorem eſſe figurâ Axis majoris; aliàs enim caderet punctum M citra A, extra ſectionem. nec poteſt eſſe major figurâ Axis minoris; hoc enim ſi fuerit, caderet M extra ſectionem, ultra verticem Γ. Nec opus eſt ut toties repetamus, reperiri aliam diametrum ipſi BK æqualem, parique intervallo alteri Axis lateri adjacentem, quæ quoque rem propoſitam efficiat.

In hac autem, uti & in præcedente, diametrum quæſitam habebimus, ope $29^{næ}$ & $30^{mæ}$ VII^{mi}. Nam cum in Ellipſi (per 30^{mam}) ſumma quadrati & figuræ Axis ſit ſemper æqualis ſummæ quadrati diametri cujuſcunque & figuræ ejuſdem, ſi de datâ ſummâ quadrati & figuræ Axis auferatur data figura diametri quæſitæ, reſtabit quadratum ipſius diametri. In Hyperbola autem differentia quadrati & figuræ Axis (per 29^{am} VII^{mi}) æqualis eſt differentiæ quadrati & figuræ cujuſvis diametri; erit igitur exceſſus, quo quadratum Axis & propoſita figura ſimul ſuperant figuram Axis, æqualis quadrato diametri quæſitæ.

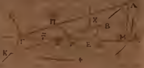
PROPOSITIO XXIX PROB[illegible].

Datis lateribus figuræ Axis Hyperbolæ, proponatur diametrum ſectionis invenire, cujus quadratum una cum quadrato lateris recti ejuſdem datam conficiat ſummam.

Iiſdem poſitis, quæ in prioribus Hyperbolæ Schematis deſcripta ſunt puta factum & ſit BK diameter illa quam quærimus: erit igitur (per 19^{am} VII[illegible]) quadratum ex AΓ ſive rectangulum ſub NΓ & ſummâ Axis & lateris ejus recti, ad rectangulum ſub NΓ & MΞ; hoc eſt, ut ſumma Axis & lateris recti ad M[illegible] ita propoſita ſumma quadratorum ex BK & latere ejus recto ad ſummam quadratorum ex NM & MΞ ac applicatâ quadratorum ſummâ illâ datâ ad ſummam Axis & lateris ejus recti, erit rectangulum ſub MΞ & latitudine ex applicatione ortâ, quæ ſit ψ, æquale ſummæ quadratorum ex MN & MΞ.

Jam Axis ſectionis vel major erit latere ejus recto, vel minor, vel eidem æqualis; ac

ac primum ſit major eo: unde (per 6am VII^{mi}) MΞ major erit quam NM, ac (per 7am II^{di} *Elem.*) quadrata ex NM, MΞ ſimul æqualia erunt duplo rectangulo ſub NMΞ & quadrato ex NΞ: quocirca rectangulum ſub MΞ & datâ latitudine ψ nuper inventâ, æquale erit duplo rectangulo ſub NMΞ & quadrato ex NΞ. Sed ΞM exceſſus eſt quo MΞ ſuperat NΞ: adeoque duplum rectangulum NMΞ æquale eſt duplo exceſſus quo quadratum ex MΞ ſuperat rectangulum ſub NΞM: quadratum igitur ex NΞ, una cum duplo exceſſu quo quadratum ex MΞ ſuperat rectangulum NΞM, æquale eſt rectangulo ſub ψ & MΞ. ac dempto utrinq; duplo illius exceſſus, erit differentia, qua rectangulum ſub MΞ & ψ ſuperat duplum exceſſum quadrati ex MΞ ſupra rectangulum NΞM, æqualis quadrato ex NΞ: ac dimidiando erit rectangulum ſub MΞ & ſemiſſe ipſius ψ & NΞ ſimul, dempto quadrato ex MΞ, æquale ſemiſſi quadrati ex NΞ. Datur autem quadratum ex NΞ: datum igitur eſt rectangulum ſub MΞ & ½ψ & NΞ ſimul, deficiens quadrato ex MΞ: adjacet autem rectæ datæ, nempe ipſi ½ψ & NΞ ſimul ſumptæ: datur igitur MΞ; ac dato puncto Ξ, datur quoque punctum M.



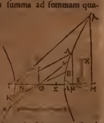
Componetur autem problema ad hunc modum. Deſcriptis cæteris ut prius, applicetur pars quarta ſummæ quadratorum propoſitæ ad ΓΔ ſummam Axis & lateris ejus recti; ac ponatur latitudo applicatione obtenta, quæ ſit Φ, (quæque quartæ parti ipſius ψ æqualis eſt) in Axe verſus verticem A, de centro Θ ad E, ita ut rectangulum ſub ΓΔ, ΘE ſit æquale quartæ parti datæ quadratorum ſummæ: & erigatur normalis EX: factâque ΘΠ in Axe minore ipſi ΘΞ vel ΞN æquali, jungatur NΠ, & capiatur EX eidem æqualis: dein centro Ξ radio ΞE deſcribatur circuli portio, quæ occurrat Axi in puncto M, ad quod erigatur Axi normalis MΛ; cæteraque fiant quæ in præcedentibus. Demonſtratio autem Analyſi reciproca ſatis manifeſta eſt, cum ſcilicet facta ſit EX æqualis ei quæ poteſt duplum quadrati ex ΞΘ, ſive ſemiſſi quadrati ex NΞ.

Neque alium habet limitem, præterquam quod in 44ta VII^{mi} demonſtratum ſit ſummam quadratorum Axis laterisque ejus recti minorem eſſe ſumma quadratorum laterum figuræ cujuſlibet alterius diametri. Hâc igitur ſi ſumma propoſita minor fuerit, cadet punctum M citra verticem, ſive extra ſectionem; vel circulus Axem non attinget: ac proinde problema impoſſibile erit.

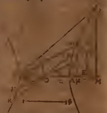
PROPOSITIO XXX. PROBL.

Iiſdem poſitis, ſit jam Axis Hyperbolæ minor latere ejus recto; ac oporteat invenire diametrum ſectionis, quæ habeat quadrata laterum figuræ ejus ſimul ſumpta æqualia dato rectangulo.

Per ea quæ in præcedente demonſtravimus, ex 19na VII^{mi} erit ut ſumma Axis & lateris ejus recti ad MΞ, ita propoſita quadratorum ſumma ad ſummam quadratorum ex NM & MΞ: quare applicatâ ſummâ illâ datâ ad ſummam Axis & lateris ejus recti, erit rectangulum ſub MΞ & datâ latitudine ex applicatione ortâ, quæ ſit recta ψ, æquale ſummæ quadratorum ex MN, MΞ. Quoniam vero Axis AΓ minor eſt quam latus ejus rectum, erit MΞ minor quam MN. Verum (per 7^{am} II^{di} *Elem.*) quadrata ex MN, MΞ ſimul æqualia erunt duplo rectangulo ſub NMΞ una cum quadrato ex NΞ, hoc eſt, duplo rectangulo ſub MΞ, & MΞ, NΞ ſimul una cum quadrato ex NΞ: quapropter rectangulum ſub MΞ & ψ æquale erit duplo rectangulo ſub MΞ, NΞ ſimul & MΞ una cum quadrato ex NΞ: & utrinque ſublato communi, duplo nempe rectangulo ſub NΞ, MΞ ſimul & MΞ erit exceſſus, quo rectangulum ſub ψ & MΞ ſuperat duplum rectangulum



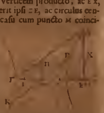
ΝΞΜ & duplum quadratum ex ΜΞ ſimul, æqualis quadrato ex ΝΞ ac, capiendo æqualium dimidia, erit rectangulum ſub ΜΞ & exceſſu quo ψ ſuperat ipſam ΝΞ dempto quadrato ex ΜΞ, æquale dimidio quadrati ex Ν : datur autem quadratum ex ΝΞ; adeoque datur rectangulum ſub dicto exceſſu & ΜΞ. Adjacet autem rectangulum illud datæ rectæ, nempe differentiæ ipſarum ψ & ΝΞ, deficiens quadrato: datur itaque ΜΞ, ac ob datum punctum Ξ, datur quoque Μ.



Compoſitio autem hoc in caſu nihil differt à præcedente, niſi quod hic punctum Ξ vertici Α jam vicinior ſit quam centrum Θ: applicatâ igitur quartâ parte ſummæ quadratorum propoſitæ ad ſummam Axis & lateris ejus recti, ponatur latitudo inde orta, quæ ſit φ, à Θ verſus verticem Α, ut ΘΕ; ac ad punctum Ε & ad angulos rectos ſuper Axem erigatur recta ΕΧ æqualis ipſi Νπ, quæ poſſit dimidium quadrati ex ΝΞ; & centro Χ, radio ΞΕ deſcribatur arcus circuli, qui quidem, ſi problema poſſibile ſit, occurret Axi ultra verticem, in puncto Μ, vel etiam in punctis Μ, μ, ſub certis conditionibus mox dicendis.

Διορισμὸς autem habet problema hoc ex 45[ta] & 46[ta] Septimi. Nam, per 45[tam], ſi quadratum Axis Hyperbolæ non minus fuerit dimidio quadrati differentiæ inter Axem & latus ejus rectum, ſumma quadratorum Axis & lateris ejus recti minor erit quadratis laterum figuræ cujuſvis alterius ſectionis diametri ſimul ſumptis: ac proinde oportebit propoſitam ſummam majorem eſſe quadratis laterum figuræ Axis; ac quo major fuerit ſumma illa, tanto longius aberit ab Axe diameter quam quærimus.

Si vero quadratum Axis minus fuerit dimidio quadrati differentiæ inter Axem & latus ejus rectum, demonſtratur, in 46[ta] VII[mi], quod ab utraque Axis parte reperiatur diameter, cujus quadratum, una cum quadrato lateris ejus recti ſimul, minus erit ſummâ quadratorum laterum figuræ cujuſcunque alterius diametri, ab eadem Axis parte ſumendæ; quodque huic utrinque propiores diametri minorem habent ſummam quadratorum laterum figuræ quam ab eadem remotiores: hoc enim in caſu punctum Ε cadet in Axe Hyperbolæ ultra verticem producto, ac ΕΧ, ſive ea quæ poterit dimidium quadrati ex ΝΞ, æqualis erit ipſi ΞΕ, ac circulus centro Χ deſcriptus continget Axem in puncto Ε, hoc in caſu cum puncto Μ coincidente: adeoque quartâ pars ipſius ψ, ſive ΘΕ, æqualis erit ei quæ poterit duplum quadrati ex ΞΘ una cum ipſâ ΞΘ; ac proinde ΘΕ erit ad ΞΘ ſicut diagonium quadrati & latus ejus ſimul ad latus quadrati, ſive ut $\sqrt{2}+1$ ad 1. Rectangulum autem ſub ΘΕ, hoc eſt ¼ψ, & ſummâ Axis & lateris ejus recti, æquale eſt (per conſtruct.) quartæ parti minimæ quadratorum ſummæ; ac proinde rectangulum ſub ſub $\sqrt{2}+1 \times$ ΝΞ & ſummâ Axis & lateris ejus recti æquale erit dimidio minimæ illius ſummæ. Cum autem ſumma Axis & lateris ejus recti ſit ad differentiam earundem ſicut Axis ad ΝΞ; erit rectangulum ſub ΝΞ & ſummâ Axis & lateris ejus recti æquale exceſſui quo figura Axis ſuperat Axis quadratum; adeoque *Minima* ſumma quadratorum è lateribus figuræ erit ad exceſſum quo figura Axis ſuperat Axis quadratum ſicut $\sqrt{8}+2$ ad unitatem, ſive ut dupla ſumma diagonii quadrati & lateris ejus ad ipſum latus.



Hac igitur *Minimâ* ſummâ ſi minor fuerit propoſita, impoſſibile erit problema, circulo, cujus radius eſt ΞΕ, Axem non attingente. Si vero major fuerit eâ, minor vero ſummâ quadratorum e lateribus figuræ Axis, occurret circulus Axi in duobus punctis ultra verticem, ut ad Μ & μ; quorum ope, modo toties dicto, invenientur duæ diametri ab utroque Axis latere, hoc eſt omnino quatuor, quæ habeant eandem propoſitam quadratorum laterum figuræ ſummam. Quod ſi data ſumma æqualis fuerit ſummæ quadratorum e lateribus figuræ Axis, coincidet punctum μ cum

cum vertice Α; punctum Μ vero dabit duas alias diametros, ab utraque ſcilicet Axis parte unam, quæ habeant eandem ſummam. Verum ſi major fuerit ſumma propoſita quam eſt ſumma quadratorum laterum figuræ Axis, cadet punctum μ citra verticem Α. at alterum punctum occurſûs Μ duas præbebit diametros, utrinque unam, quæ problemati ſatisfaciunt. *Maxima* autem quadratorum ſumma, ex natura Hyperbolæ, dari non poteſt.

Quod ſi Axis æqualis fuerit lateri ejus recto, erunt quoque (per 23um VII^mi^) diametri omnes lateribus ſuis rectis æquales; adeoque dimidium ſummæ propoſitæ æquale erit quadrato diametri quam quærimus.

Coroll. 1. Hinc manifeſto conſtabit duarum diametrorum Hyperbolæ eandem ſummam quadratorum laterum figuræ habentium, quadrata ſimul ſumpta æqualia eſſe exceſſui quo ſemi-ſumma illa quadratorum laterum figuræ, una cum quadrato Axis, ſuperat Axis figuram.

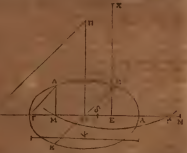
Coroll. 2. Proinde quadratum diametri illius, quæ eandem habet ſummam ac ipſe Axis, æquale erit exceſſui quo ſemi-ſumma illa quadratorum laterum figuræ ſuperat figuram Axis; hoc eſt dimidio quadrati ex differentia Axis & lateris ejus recti. Quadratum autem lateris recti ejus æquale erit eidem ſemi ſummæ quadratorum laterum figuræ Axis una cum eorundem rectangulo ſive figurâ Axis ſimul ſumptâ; hoc eſt dimidio quadrati è ſummâ utriuſque & Axis & lateris ejus recti.

Coroll. 3. Idem dicendum de alia quavis datâ diametro, quæ non ſit Axis ſectionis.

PROPOSITIO XXXI. PROBL.

Datis lateribus figuræ Axis Ellipſeos, oporteat invenire diametrum, cujus quadratum, una cum quadrato lateris ejus recti ſimul ſumpto, propoſitam conficiat ſummam.

Manentibus iis quæ in præcedentibus Ellipſeos Schematis deſcripta ſunt, puta factum; ſitque ΒΚ diameter illa quam quærimus. Erit igitur (per 19um VII^mi^) ut quadratum ex ΑΓ, ſive rectangulum ſub ΝΓ & differentia Axis & lateris ejus recti, ad rectangulum ſub ΝΓ & ΜΞ, hoc eſt ut Γδ differentia Axis & lateris ejus recti ad ΜΞ, ita ſumma illa propoſita ad ſummam quadratorum ex ΜΝ, ΜΞ; adeoque applicato rectangulo ſummæ propoſitæ æquali ad differentiam Axis & lateris recti, dicatur latitudo inde orta ψ, quæ proinde data eſt. Ac manifeſtum eſt rectangulum ſub ΜΞ & ψ æquale eſſe quadratis ex ΜΝ, ΜΞ ſimul. Verum (per 4^tam^ II^di^ *Elem.*) quadratum ex ΝΞ æquale eſt quadratis ex ΜΝ, ΜΞ ſimul una cum duplo rectangulo ſub ΝΜΞ, hoc eſt quadratum ex ΝΞ æquale eſt rectangulo ſub ΜΞ & ψ una cum duplo rectangulo ſub ΝΜΞ; rectangulum autem ſub ΝΜΞ æquale eſt rectangulo ſub ΝΞΜ dempto quadrato ex ΜΞ: quapropter rectangulum ſub ΜΞ & utraque ΝΞ & ½ψ ſimul, dempto quadrato ex ΜΞ, æquale eſt dimidio quadrati ex ΝΞ. Sed datur quadratum ex ΝΞ: datum eſt igitur rectangulum ſub ΜΞ & utrâque ΝΞ & ½ψ ſimul, dempto quadrato ex ΜΞ. Adjacet autem rectæ datæ, ipſis nempe ½ψ & ΝΞ ſimul ſumptis æquali, deficiens quadrato: data eſt igitur recta ΜΞ, datumque punctum Μ.



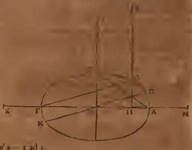
Componetur itaque problema ad hunc modum. Applicetur quarta pars datæ

 ſummæ

ſummæ quadratorum ad differentiam Axis & lateris ejus recti; ac latitudini inventæ, ſive quartæ parti ipſius ψ, æqualis ponatur recta ΘE in Axe, de centro Θ verſus N; & ad punctum E erigatur normalis EX ipſi ΞΘ æqualis, ſive quæ poterit dimidium quadrati ex NΞ: dein centro X radio ΞE deſcribatur arcus circuli, qui, ſi problema propoſitum poſſibile ſit, occurret Axi inter A & Γ ad punctum M; &, erecta ad Axem normali MΛ, habebitur tam magnitudo quam poſitio diametri quæſitæ ΘK.

Determinatur autem problema ex 47ma & 48va VII^{mi}. Nam ſi quadratum Axis majoris Ellipſeos non majus fuerit dimidio quadrati ſummæ laterum figuræ ejuſdem Axis, manifeſtum eſt (per dictam 47^{mam}) ſummam quadratorum propoſitam minorem eſſe non poſſe quam quadrata laterum figuræ Axis majoris ſimul ſumpta, quo in caſu punctum M cadet citra verticem A; nec majorem quam quadrata laterum figuræ Axis minoris ſimul ſumpta: nam hoc poſito punctum M cadet ultra verticem Γ, ac impoſſibile erit problema. Si vero quadratum Axis majoris æquale fuerit dimidio quadrati ſummæ laterum figuræ ejus, ac proponatur ſumma, ſummæ quadratorum laterum figuræ Axis æqualis, coincidet punctum E cum puncto A; in cæteris vero caſubus longius aberit E à centro Θ, & extra ſectionem cadet.

Verum ſi quadratum ex Axe AΓ majus fuerit dimidio quadrati e ſumma laterum figuræ Axis, reperietur (per 48^{vam} VII^{mi}) ab utraque Axis parte diameter, cujus quadratum æquale erit dimidio quadrati ex eadem diametro & latere ejus recto ſimul ſumpto; cujus quidem diametri quadratum una cum quadrato lateris ſui recti omnium *Minimam* conficiet ſummam: ac quadrata laterum figuræ diametri huic utrinque propioris minora erunt quadratis laterum figuræ diametri ab eadem remotioris, prout ibidem demonſtratur. Quænam autem fuerit minima illa ſumma, eodem argumento quo in Hyperbola uſi ſumus, ſtatim patebit. Quoniam enim punctum M, in hoc *ſummæ minimæ* caſu, coincidit cum puncto E; erit XE, quæ ſemper æqualis eſt ei quæ poterit duplum quadrati ex NΘ, rectæ ΞE æqualis; adeoque ΘE æqualis erit exceſſui quo potens duplum quadrati ex NΘ ſuperat NΘ: quare ΘE erit ad NΘ ſicut exceſſus quo diagonium quadrati ſuperat latus ejus ad ipſum latus, ſive ut $\sqrt{2} - 1$ ad 1.



Per conſtructionem autem, rectangulum ſub ΘE & differentiâ Axis & lateris ejus recti æquale eſt quartæ parti ſummæ quadratorum laterum figuræ; adeoque rectangulum ſub $\sqrt{2} - 1 \times N\Xi$ & differentiâ Axis & lateris ejus recti æquale erit dimidio ſummæ minimæ quadratorum laterum figuræ, quam quærimus. Cum autem differentia Axis & lateris ejus recti ſit ad earundem ſummam ſicut ipſe Axis ad NΞ; erit rectangulum ſub NΞ & differentia Axis & lateris ejus recti æquale rectangulo ſub Axe & ſummâ Axis & lateris ejus recti, hoc eſt, quadrato Axis & figuræ ejuſdem ſimul, ſive ſummæ quadratorum ex utroque Axe: *Minima* igitur ſumma quadratorum e lateribus figuræ erit ad ſummam quadratorum Axium Ellipſeos ſicut $\sqrt{8} - 2$ ad unitatem, ſive ut duplus exceſſus quo diagonium quadrati ſuperat latus ejuſdem ad ipſum latus.

Quapropter, ſi in Ellipſi proponeretur inquirere diametrum, quæ habeat ſummam quadratorum laterum figuræ minorem jam oſtenſâ, impoſſibile erit problema, ac circulus juxta leges compoſitionis deſcriptus non attinget Axem. Si vero major fuerit dictâ *Minimâ*, minor vero quam ſumma quadratorum laterum figuræ Axis, conveniet circulus cum Axe in duobus punctis M, μ intra ſectionem; ac proinde

ab

ab utroque Axis latere habebuntur duæ diametri, hoc eſt omnino quatuor, quæ habeant propoſitam ſummam quadratorum laterum figuræ. Ac ſi æqualis fuerit ſumma propoſita quadratis ex Axe & è latere ejus recto ſimul ſumptis, ipſe Axis ac duæ aliæ diametri, utrinque una, rem præſtant. Verumtamen ſi proponatur ſumma adhuc major, ſed quæ minor ſit ſummâ quadratorum è lateribus figuræ Axis minoris; invenietur ab utroque Axis latere una diameter, quæ problemati ſatisfaciat, cadente adhuc puncto M intra ſectionem. *Maxima* autem quadratorum ſumma ea eſt quæ fit è quadratis laterum figuræ Axis minoris; quæque eſt ad ſummam quadratorum è lateribus figuræ Axis majoris in ratione Axis ad latus ejus rectum. Hâc ſi major proponatur, rurſus impoſſibile erit problema, egreſſo jam puncto M ultra verticem Γ.

Coroll. 1. Summa autem quadratorum duarum quarumvis diametrorum, eandem quadratorum laterum figuræ ſummam habentium, æqualis eſt propoſitæ quadratorum ſemi-ſummæ una cum rectangulo ſub Axe & Axe cum latere ejus recto ſimul ſumpto, ſive una cum quadratis ex utroque Axe ſimul.

Coroll. 2. Ac proinde diameter illa, quæ eandem habet quadratorum ſummam quam habet Axis ipſe, æqualis erit ei quæ poterit dimidium quadrati ex Axe & latere ejus recto ſimul ſumptis: latus autem rectum ejus poterit dimidium quadrati exceſsûs quo Axis major ſuperat latus ejus rectum. Idemque verum eſt etiamſi diameter data non fuerit Axis.

Coroll. 3. Unde manifeſtum eſt quatuor illas Ellipſeos diametros, quoties quatuor ſunt, quæ, ut dictum eſt, eandem habere poſſunt ſummam, ſemper cadere inter Axem majorem & conjugatas æquales; cum ſcilicet diametri majores ſunt lateribus ſuis rectis.

Coroll. 4. Quadratum autem diametri ejus quæ omnium minimam habet quadratorum ſummam, erit ad eam quæ poteſt ſemi-ſummam quadratorum Axium, hoc eſt ad quadratum ex AO, ſicut diagonium quadrati ad ejuſdem latus, ſive ut $\sqrt{2}$ ad 1: & latus rectum ejuſdem diametri ad ipſam diametrum erit ut $\sqrt{2}$ ad $2-\sqrt{2}$.

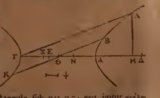
Coroll. 5. Unde in omni Ellipſi, tam diametri quam latera recta, quarum ſumma quadratorum minima eſt, eandem ſemper habent rationem ad AO ſubtenſam quadrantis Ellipſeos.

Coroll. 6. Ac manifeſtum eſt, ex determinationibus jam dictis, quod, ſi Axis major majorem habeat rationem ad Axem conjugatam quam habet Unitas ad $\sqrt{\sqrt{2}-1}$, ſive quam 1 ad 0,6436; duci poſſunt quatuor diametri, quæ eandem habeant quadratorum ſui & lateris ſui recti ſummam: aliter vero non item.

PROPOSITIO XXXII. PROBL.

Datis Hyperbolæ Axe & latere recto; invenire diametrum ejus, cujus quadratum à quadrato lateris recti ejus datâ differentiâ differat.

Manentibus Hyperbolæ figuris in præcedentibus deſcriptis, puta factum: ſitque BK diameter quæſita, cujus quadratum differat à quadrato lateris ſui recti datâ differentiâ. Per 20^{mam} VII^{mi} erit quadratum Axis ſectionis, ſive rectangulum ſub $N\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ad rectangulum ſub $N\Gamma$, $M\Xi$, hoc eſt $\Delta\Gamma$ ad $M\Xi$, ſicut differentia quadratorum propoſita ad differentiam quadratorum ex NM, $M\Xi$. Eſt autem differentia quadratorum ex NM, $M\Xi$ (per 6^{tam} II^{di} *El.*) æqualis quadruplo rectanguli ſub ΘM, $\Theta\Xi$, adeoque ſi fiat rectangulum ſub $\Gamma\Delta$ & aliâ quadam ψ æquale quartæ parti differentiæ quadratorum propoſitæ, data erit recta ψ: ac, argumento toties uſurpato,

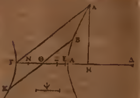


rectangulum ſub $M\Xi$ & ψ æquale erit rectangulo ſub ΘM, $\Theta\Xi$; erit igitur ἀνάλογον ut $\Theta\Xi$ ad ψ ita $M\Xi$ ad ΘM, ac dividendo erit differentia ipſarum $\Theta\Xi$ & ψ

 ad

ad ΘΞ ſicut ΘΞ ad ΞΜ. Datis autem ΘΞ & ψ dabitur quoque ΜΞ, unde punctum Μ datum.

Componetur itaque problema, ſi applicetur quarta pars differentiæ quadratorum datæ ad ΓΔ, ſive ad ſummam Axis & lateris ejus recti; unde latitudo fiet ipſi ψ æqualis. Dein in Axe verſus Ξ ponatur ΘΕ ipſi ψ æqualis, ac fiat ut ΕΞ ad ΞΘ ita ΘΞ ad ΞΜ. Invento autem puncto Μ dabitur quoque diameter ΒΚ tam magnitudine quam poſitione; ut abunde in præcedentibus dictum eſt.



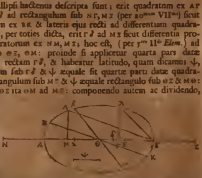
Διορισμὸς autem hujus problematis ex 49na & 50ma VII^{mi} petendus. Nam ſi Axis major fuerit latere recto ejus, differentia quadratorum Axis lateriſque ejus recti minor erit quavis aliâ quadratorum diametri & lateris recti differentiâ: adeoque differentia propoſita hac non minor eſſe poteſt, uti ex 49na conſtabit. Si vero Axis minor fuerit latere ejus recto, differentia quadratorum Axis & lateris ejus recti major erit qualibet aliâ differentiâ; ac proinde differentia propoſita non major eſſe poteſt exceſſu quo quadratum lateris recti Axis ſuperat ipſius Axis quadratum, prout ex 50ma VII^{mi} patebit.

Porro per eaſdem demonſtratur, in priori caſu, differentiam quadratorum *Maximam* non majorem eſſe duplo exceſſûs, quo quadratum Axis ſuperat figuram ejus: in altero vero, differentiam *Minimam* non minorem eſſe duplo exceſſûs quo figura Axis ſuperat quadratum ejuſdem. Coeuntibus etenim punctis Ε & Ξ, evaneſcit recta ΞΕ, & in infinitum abit recta ΞΜ.

PROPOSITIO XXXIII. PROBL.

Datis Ellipſeos Axe & latere recto; invenire diametros ejus, quarum quadrata datâ differentiâ ſuperent quadrata laterum ſuorum rectorum, ac ab iiſdem deficiant.

Manentibus iis quæ in Ellipſi hactenus deſcripta ſunt; erit quadratum ex ΑΓ ſive rectangulum ſub ΝΓ, Γδ ad rectangulum ſub ΝΓ, ΜΞ (per 20^{mam} VII^{mi}) ſicut differentia data quadratorum ex ΒΚ & lateris ejus recti ad differentiam quadratorum ex ΝΜ, ΜΞ: adeoque, per toties dicta, erit Γδ ad ΜΞ ſicut differentia propoſita ad differentiam quadratorum ex ΝΜ, ΜΞ; hoc eſt, (per 5^{tam} 11^{di} *Elem.*) ad quadruplum rectanguli ſub ΘΞ, ΘΜ: proinde ſi applicetur quarta pars datæ quadratorum differentiæ ad rectam Γδ, & habeatur latitudo, quam dicamus ψ, hoc eſt, ſi fiat ut rectangulum ſub Γδ & ψ æquale ſit quartæ parti datæ quadratorum differentiæ; erit rectangulum ſub ΜΞ & ψ æquale rectangulo ſub ΘΞ & ΜΘ: ἀνάλογον itaque erit ut ψ ad ΘΞ ita ΘΜ ad ΜΞ: componendo autem ac dividendo, ΘΞ aucta & minuta rectâ ψ erit ad ΘΞ ſicut ΘΞ ad ΞΜ. Verum dantur ΘΞ & ψ, adeoque & recta ΘΜ datur; unde, ob datum Θ, punctum Μ quoque datur.



Componetur itaque problema, ſi fiat rectangulum ſub differentiâ Axis & lateris ejus recti & aliâ quadam ψ æquale quartæ parti datæ differentiæ quadratorum: & ab utroque centri latere ponantur rectæ ΘΕ, Θε ipſi ψ æquales. deinde fiat ut ΕΞ ad ΞΘ ita ΘΞ ad ΞΜ, ut diameter major ſit latere ſuo recto, ac ut εΞ ad ΞΘ ita ΘΞ ad Ξμ, ut latus rectum majus fuerit diametro: & inventis punctis Μ, μ, utramque diametrum obtinebimus ut prius. Nec opus eſt ut demonſtratione regreſſivâ res, ex Analyſi quantum fieri poteſt manifeſta, ſtabiliatur.

Per

Ex iis autem quæ in ultima Propoſitione Libri Septimi traduntur problema hoc limites ſuos ſortitur. Nam ex omnibus diametris Ellipſeos quæ majores ſunt lateribus ſuis rectis, Axis majoris quadratum majori ſpatio ſuperat quadratum lateris ſui recti: ex illis vero quæ lateribus ſuis rectis minores ſunt, omnium *Maximam* habet quadratorum illorum differentiam Axis minor; quæ quidem differentia major eſt exceſſu quo quadratum Axis majoris ſuperat quadratum lateris ſui recti, in ratione lateris recti Axis majoris ad Axem ipſum. Quocirca ſi differentia data minor fuerit differentiâ quadratorum Axis majoris laterisque ejus recti, quatuor diverſæ diametri, ab utroque Axis latere duæ, ſatisfacient problemati; cadente utroque puncto Μ & μ inter vertices Ellipſeos Α, Γ. Quod ſi major fuerit hâc, minor vero differentiâ quadratorum Axis minoris & lateris ejus recti, duæ tantum diametri rem præſtant, ab utroque ſcilicet Axis minoris latere. Verum ſi hac quoque major fuerit, problema impoſſibile erit, cadente utroque puncto Μ, μ extra Axem ΑΓ. *Minima* autem non datur quadratorum differentia; nam in æqualibus diametris conjugatis differentia hæc nulla evadit, quia diametris ipſis æqualia fiunt latera recta.

Quoniam vero ΞΕ eſt ad ΞΘ ſicut ΞΘ ad ΞΜ, erit ΞΘ ad ΘΕ ſicut ΞΜ ad ΜΘ: ac pari ratione ΞΘ erit ad Θε, hoc eſt ad ΘΕ, ſicut Ξμ ad μΘ; adeoque erit ΞΜ ad ΜΘ ſicut Ξμ ad μΘ. Quocirca in omni caſu recta ΞΜ Harmonice dividitur in punctis Θ, μ; ac proinde, data qualibet diametro, facile erit correſpondentem invenire, quæ eandem habeat differentiam quadratorum ſui laterisque ſui recti.

Hactenus, eodem ubique obſervato ordine quo traduntur διορισμοί, operam dedimus reſolutioni problematum illorum, quorum limites immediate pendent à propoſitionibus διορισμοῖς libri Septimi: nec diverſam fuiſſe libri Octavi deperditi materiam omnino mihi perſuaſum habeo. Speramus autem, ſi ita contigerit ut ipſas Apollonii *Analyſes & Compoſitiones minus aſſecuti ſimus, nos illud ſaltem præſtitiſſe, ut quæcunque in earum locum ſubſtituimus æquo Lectori haud inconcinna videantur. Etiamſi vero innumera fere ſint Problemata Conica determinata, quorum Analyſes ex his Elementis non multo ſtudio peti poſſunt; in præſentia tamen, id ſolum nobis propoſitum fuit, ut* Apollonii *veſtigia, quoad ejus fieri poſſet, premeremus. Quod ſi forte fortuna integrum Auctoris opus poſthac lucem conſpexerit, nobis leve damnum erit, ea conditione oleum & operam perdidiſſe.*

FINIS.

ΣΕΡΗΝΟΥ

ΑΝΤΙΝΣΕΩΣ ΦΙΛΟΣΟΦΟΥ

ΠΕΡΙ ΤΟΜΗΣ

ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΚΑΙ ΚΩΝΟΥ

ΒΙΒΛΙΑ ΔΥΟ.

SERENI

PHILOSOPHI ANTISSENSIS

DE SECTIONE

CYLINDRI ET CONI

LIBRI DUO.

Ex Codd. MSS. *Græcis* edidit Edmundus Halleius apud *Oxonienſes* Geometriæ Profeſſor *Savilianus*.

Digitized by Google

Digitized by Google

VIRO REVERENDO,

Bonarum Literarum FAUTORI EXIMIO,

D. *HEN. ALDRICHIO,*

S. T. P.

ÆDIS CHRISTI DECANO,

SERENI ANTISSENSIS

DE SECTIONE

CYLINDRI & CONI

LIBELLOS,

Nunc primum GRÆCE & LATINE

EX SUO EXEMPLARI MS^to^ EDITOS,

JURE MERITOQUE

D. D. C.

EDM. HALLEIUS.

Digitized by Google

ΣΕΡΗΝΟΥ
*ΑΝΤΙΝΣΕΩΣ ΦΙΛΟΣΟΦΟΥ
ΠΕΡΙ
ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ ΤΟΜΗΣ.

SERENI
ANTISSENSIS PHILOSOPHI
DE
SECTIONE CYLINDRI
LIBER.

ΠΟΛΛΟΥΣ ὁρῶν, ὦ φίλε Κῦρε, τῶν περὶ γεωμετρίαν ἀναστρεφομένων, οἰομένους τὴν τοῦ κυλίνδρου πλαγίαν τομὴν ἑτέραν εἶναι τῆς τοῦ κώνου τομῆς τῆς καλουμένης ἐλλείψεως· ἐδικαίωσα μὴ χρῆναι περιορᾶν ἀγνοοῦντας αὐτούς τε καὶ τοὺς ὑπ' αὐτῶν οὕτω φρονεῖν ἀναπεπεισμένους· καί τοι δόξειεν ἂν παντὶ ἄλογον εἶναι, γεωμέτρας γε ὄντας περὶ γεωμετρικοῦ προβλήματος ἄνευ ἀποδείξεως ἀποφαίνεσθαί τι καὶ πιθανολογεῖν ἀτέχνως, ἀλλότριον γεωμετρίας πρᾶγμα ποιοῦντας. ὁμοίως δ' οὖν ἐπείπερ οὕτως ὑπειλήφασιν, ἡμεῖς δὲ οὐ συμφερόμεθα, φέρε γεωμετρικῶς ἀποδείξωμεν, ὅτι μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κατ' εἶδος ἀνάγκη γίνεσθαι ἐν ἀμφοτέροις τοῖς σχήμασι τομήν, τῷ κώνῳ λέγω καὶ τῷ κυλίνδρῳ, ποιῶς δὲ μέντοι, ἀλλ' οὐχ ἁπλῶς τεμνομένοις. ὥσπερ δὲ οἱ τὰ κωνικὰ πραγματευσάμενοι τῶν παλαιῶν οὐκ ἠρκέσθησαν τῇ κοινῇ ἐννοίᾳ τοῦ κώνου, ὅτι τριγώνου περιαχθέντος ὀρθογωνίου συνίσταιτο, περιεργότερον δὲ καὶ

CUM viderem, Amice *Cyre*, plurimos eorum qui in Geometria verſantur, in ea eſſe opinione, tranſverſam Cylindri ſectionem plane diverſam eſſe ab iſta Coni ſectione quæ Ellipſis vocatur; non committendum putavi, ut ab errore non liberarem tum eos ipſos, tum & illos quibus perſuaſerunt ita ſe rem habere: quòd abſurdum omnino videatur, Geometras de problemate Geometrico abſque demonſtratione quicquam affirmare, argumentis à probabili inſcite adhibitis; quod à Geometria quam maxime alienum eſt. Itaque quoniam hi ita ſentiunt, nos vero illis non aſſentimur, libeat Geometrice demonſtrare unam eandemque ſpecie ſectionem neceſſario fieri in utraque figura, in Cono inquam & Cylindro; ſi modo ratione quadam & non ſimpliciter ſecentur. Quemadmodum autem Veteres qui Conica tractarunt, non contenti communi notitiâ Coni, nempe quod circumductu trianguli rectanguli deſcribatur; uberius &

* Pro Αντινσέως juxta ſcribendi modum ſequioris ævi *Græcis* familiarem.

univerſalius rem contemplati ſunt, non tantum rectos ſed etiam ſcalenos Conos ſtatuentes: ita oportebit & nos, quoniam Cylindri ſectionem tractandam propoſuerimus, non de recto ſolum agere, ſed inſuper ad Cylindri ſcaleni ſectionem diſquiſitiones noſtras ulterius aliquanto extendere. Quanquam autem non ignoro, neminem fore qui non facile admittat omnem Cylindrum non rectum eſſe, communi id ſuadente ratione, tamen contemplationis gratiâ melius eſſe judicavi definitione magis univerſali utrumque complecti; quoniam recti Cylindri ſectionem eandem fore cum Ellipſi in ſolo Cono recto ſectâ probari continget: ex hypotheſi vero univerſaliori Ellipſi cuilibet ſectionem illam æquiparari deprehendetur; id quod in hoc libro demonſtrandum ſuſcipimus. Præmittendæ autem nobis ſunt iſtæ ad rem propoſitam ſpectantes definitiones.

καθολικώτερον ἐφιλοτεχνήσαντο, μὴ μόνον ὀρθοὺς ἀλλὰ καὶ σκαληνοὺς ὑποστησάμενοι κώνους· οὕτω χρὴ καὶ ἡμᾶς, ἐπειδὴ πρόκειται περὶ κυλίνδρου τομῆς ἐπισκέψασθαι, μὴ τὸν ὀρθὸν μόνον ἀφορίσαντας ἐπ᾽ αὐτοῦ ποιεῖσθαι τὴν σκέψιν, ἀλλὰ καὶ τὸν σκαληνὸν περιλαβόντας ἐπὶ πλέον ἐκτεῖναι τὴν θεωρίαν. ὅτι μὲν γὰρ οὐκ ἂν προσοῖτό τις ἑτοίμως μὴ οὐχὶ πάντα κύλινδρον ὀρθὸν εἶναι, τῆς κοινῆς ἐννοίας τοῦτο συνωφελκούσης, οὐκ ἀγνοῶ δήπουθεν· οὐ μὴν ἀλλ᾽ ἕνεκά γε τῆς θεωρίας ἄμεινον ᾠήθην καθολικωτέρῳ ὁρισμῷ περιλαβεῖν, ἐπεὶ καὶ τὴν τομήν, ὀρθοῦ μόνου ὄντος αὐτοῦ, μόνῃ τῇ τοῦ ὀρθοῦ κώνου ἐλλείψει τὴν αὐτὴν εἶναι συμβαίνει· καθολικωτέρου δὲ ὑποτεθέντος ὅλῃ τῇ ἐλλείψει καὶ αὐτὴν ἐξισάζειν· ὃ δὴ καὶ δεῖξαι ὁ παρὼν λόγος ἐπαγγέλλεται. ἰστέον οὖν ἡμῖν περὶ τὸ προκείμενον ὁρισαμένοις τάδε.

DEFINITIONES.

1. SI igitur duorum circulorum æqualium & æquidiſtantium diametri ſemper inter ſeſe parallelæ, & ipſæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur; & unà circumferatur recta linea diametrorum terminos ex eadem parte conjungens, quouſque rurſus in eum locum reſtituatur à quo moveri cœpit: ſuperficies, quæ à circumlata recta deſcribitur, cylindrica ſuperficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri poteſt, rectâ ipſam deſcribente in infinitum productâ.

2. Cylindrus autem figura, quæ circulis æquidiſtantibus & cylindrica ſuperficie inter ipſos interjectâ continetur.

3. Cylindri vero baſes, circuli ipſi.

4. Axis autem, recta linea quæ per circulorum centra ducitur.

5. Latus vero cylindri, linea quæ, cum recta ſit & in ſuperficie ipſius cylindri baſes utraſque contingit; quamque circumlatam cylindri ſuperficiem deſcribere antea diximus.

6. E Cylindris autem recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus.

7. Scaleni vero, qui non ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus axem habent.

ΟΡΟΙ.

α'. ΕΑΝ μὲν οὖν τῶν δύο κύκλων ἴσων τε καὶ παραλλήλων αἱ διάμετροι παράλληλοι ὦσι διὰ παντός, αὗταί τε περιενεχθῶσιν ἐν τοῖς τῶν κύκλων ἐπιπέδοις περὶ μένον τὸ κέντρον, καὶ συμπεριενεχθῇ ἡ τὰ πέρατα αὐτῶν κατὰ τὸ αὐτὸ μέρος ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα, ἕως εἰς ταὐτὸ πάλιν ἀποκαταστῶσιν· ἡ γραφεῖσα ὑπὸ τῆς περιενεχθείσης εὐθείας ἐπιφάνεια, κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια καλείσθω· ἥτις καὶ ἐπ᾽ ἄπειρον αὔξεσθαι δύναται, τῆς γραφούσης αὐτὴν εὐθείας ἐκβαλλομένης.

β'. Κύλινδρος δὲ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν παραλλήλων κύκλων καὶ τῆς μεταξὺ αὐτῶν ἀπολαμβανομένης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

γ'. Βάσεις δὲ τοῦ κυλίνδρου οἱ κύκλοι.

δ'. Ἄξων δὲ ἡ διὰ τῶν κέντρων αὐτῶν ἀγομένη εὐθεῖα.

ε'. Πλευρὰ δὲ τοῦ κυλίνδρου γραμμή τις, ἥτις εὐθεῖα οὖσα καὶ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας οὖσα τοῦ κυλίνδρου τῶν βάσεων ἀμφοτέρων ἅπτεται· ἣν καί φαμεν περιενεχθεῖσαν γράφειν τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν.

ς'. Τῶν δὲ κυλίνδρων, ὀρθοὶ μὲν οἱ τὸν ἄξονα πρὸς ὀρθὰς ἔχοντες ταῖς βάσεσι.

ζ'. Σκαληνοὶ δὲ οἱ μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντες ταῖς βάσεσι τὸν ἄξονα.

Ὁριστέον

Digitized by Google

Ὁριστέον δὲ κατὰ Ἀπολλώνιον καὶ τάδε.

η'. Πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἥ ἐστιν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου οὔσης, διάμετρος καλείσθω εὐθεῖά τις, ἥτις ἠγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείας εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ.

θ'. Κορυφὴ δὲ τῆς καμπύλης γραμμῆς τὸ πέρας τῆς εὐθείας τὸ πρὸς τῇ γραμμῇ.

ι'. Τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.

ια'. Συζυγεῖς δὲ διάμετροι καλείσθωσαν, αἵτινες ἀπὸ τῆς γραμμῆς τεταγμένως ἀχθείσας ἐπὶ τὰς συζυγεῖς διαμέτρους, ὁμοίως αὐτὰς δίχα τέμνουσι.

ιβ'. Τούτων δὲ γραμμῶν ὑφισταμένων καὶ ἐν ταῖς πλαγίαις τομαῖς τοῦ κυλίνδρου, ἡ διχοτομία τῆς διαμέτρου κέντρον τομῆς καλείσθω.

ιγ'. Ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν γραμμὴν προσπίπτουσα, ἐκ τοῦ κέντρου τῆς γραμμῆς.

ιδ'. Ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθεῖσα καὶ περατουμένη ὑπὸ τῆς γραμμῆς, δευτέρα διάμετρος καλείσθω· δειχθήσεται γὰρ πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν διάμετρον δίχα τέμνουσα.

ιε'. Ἔτι κἀκεῖνο προσδιορίσθω ὅτι ὅμοιαι ἐλλείψεις εἰσίν, ὧν ἑκατέρας αἱ συζυγεῖς διάμετροι πρὸς ἀλλήλας τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον, καὶ πρὸς ἴσας γωνίας τέμνουσιν ἀλλήλας.

Sed & hæc juxta Apollonium *definienda.*

8. Omnis lineæ curvæ, in uno plano exiſtentis, diameter vocetur recta linea; quæ quidem ducta à linea curva omnes quæ in ipſa ducuntur rectas rectæ cuipiam parallelas bifariam dividit.

9. Vertex autem curvæ, terminus illius rectæ qui eſt ad curvam.

10. Ordinatim vero ad diametrum applicari unamquamque rectarum parallelarum.

11. Conjugatæ diametri dicantur, quæ quidem, à curva ordinatim ductæ ad conjugatas diametros, ipſas ſimiliter bifariam dividunt.

12. His igitur ſuppoſitis lineis in tranſverſis ſectionibus cylindri, punctum quod diametrum bifariam dividit centrum ſectionis vocetur.

13. Quæ vero à centro ad lineam curvam perducitur, *dicatur* ea quæ ex centro.

14. Quæ vero per centrum ſectionis tranſit, parallela ei quæ ordinatim applicata eſt, & terminatur ab ipſa linea curva, ſecunda diameter dicatur: demonſtrabitur enim rectas omnes in ſectione ductas, quæ priori diametro parallelæ ſunt, bifariam ſecare.

15. Illud etiam definiendum eſt: ſimiles ellipſes eſſe, quarum conjugatæ diametri, ſeſe ad angulos æquales ſecantes, eandem habent rationem inter ſe.

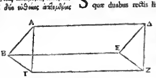
ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων, καὶ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· αἱ τὰ πέρατα αὐτῶν ἐπιζευγνύουσαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Prop. I. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ conveniant, ac duabus rectis lineis etiam convenientibus parallelæ ſint, & ſint utræque utriſque æquales: rectæ quæ terminos earum conjungunt & ipſæ æquales & parallelæ erunt.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΑΒ, ΒΓ, παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ, ΕΖ, καὶ ἴση ἔστω ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ· λέγω ὅτι αἱ ΑΓ, ΔΖ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.



Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. ἐπεὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῇ ΑΔ ἴση τε καὶ παράλληλός

Sint duæ rectæ lineæ concurrentes AB, BΓ; quæ duabus rectis lineis etiam concurrentibus, ut ΔE, EZ, parallelæ ſint; ſitque AB æqualis ΔE, & BΓ ipſi EZ; & jungantur AΓ, ΔZ: dico rectas AΓ, ΔZ & æquales eſſe & parallelas.

Junctis enim AΔ, BE, ΓZ; quoniam AB ipſi ΔE eſt æqualis & parallela; erit [per 33. 1.] EB & æqualis & parallela

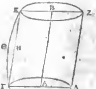
rallela ipſi ΑΔ. ac pari ratione ΓΖ æqualis & parallela erit ipſi ΒΕ: quare ΑΔ, ΓΖ [per 30.1.] æquales inter ſeſe & parallelæ erunt; ac propterea ipſæ quoque ΑΓ, ΔΖ. quod erat oſtendum.

ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος· αἱ ἄρα ΑΔ, ΓΖ ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι· καὶ αἱ ΑΓ, ΔΖ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

Prop. II. *Theor.*

Si cylindrus plano ſecetur per axem; ſectio parallelogrammum erit.

SIT cylindrus, cujus baſes circuli circa centra Α, Β, axis autem ΑΒ recta linea; & ducatur per ΑΒ planum ſecans cylindrum, facienſque ſectiones, in circulis quidem rectas lineas ΓΔ, ΕΖ, quæ diametri ſunt; in ſuperficie autem cylindri ipſas ΕΗΓ, ΖΔ: dico utramque linearum ΕΗΓ, ΔΖ rectam eſſe.



Si enim fieri poteſt, non ſint rectæ; & ducatur recta ΕΘΓ. quoniam igitur linea ΕΗΓ & recta ΕΘΓ in plano ΕΔ conveniunt ad puncta Ε, Γ; atque eſt ΕΗΓ in ſuperficie cylindri: ipſa ΕΘΓ in cylindri ſuperficie non erit. & quoniam circuli Α, Β æquales ſunt & æquidiſtantes, ſecanturque à plano ΕΔ; communes ipſorum ſectiones [per 16.11.] parallelæ erunt, atque etiam æquales, cum diametri ſint æqualium circulorum. itaque ſi, manentibus Α, Β punctis, diametros ΑΓ, ΒΕ intelligamus circumferri, & una cum ipſis rectam lineam ΕΘΓ circa circulos Α, Β, quouſque rurſus in eundem locum reſtituantur, à quo moveri cœperunt: recta ΕΘΓ cylindri ſuperficiem deſcribet, & erit Θ punctum in ſuperficie ipſa. atqui erat extra ſuperficiem, quod fieri non poteſt: recta igitur linea eſt ΕΗΓ; ſimiliter & recta eſt ipſa ΖΔ. & conjungunt æquales & parallelas rectas ΕΖ, ΓΔ: parallelogrammum igitur [per 33.1.] erit planum ΕΔ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ἡ τομὴ παραλληλόγραμμον ἔσται.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ τὰ Α, Β κέντρα κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, καὶ διὰ τῆς ΑΒ ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον τέμνον τὸν κύλινδρον, ποιήσει δή, ἐν μὲν τοῖς κύκλοις εὐθείας τὰς ΓΔ, ΕΖ διαμέτρους οὔσας, ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὰς ΕΗΓ, ΖΔ γραμμάς· λέγω ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΗΓ, ΔΖ γραμμῶν εὐθεῖά ἐστιν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ ἔστωσαν εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘΓ εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΗΓ γραμμὴ καὶ ἡ ΕΘΓ εὐθεῖα ἐν τῷ ΕΔ ἐπιπέδῳ εἰσί, συνάπτουσι κατὰ τὰ Ε, Γ σημεῖα, καὶ ἔστιν ἡ ΕΗΓ γραμμὴ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· ἡ ΕΘΓ εὐθεῖα οὐκ ἔσται ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας. ἐπεὶ οὖν οἱ Α, Β κύκλοι ἴσοι τε καὶ παράλληλοί εἰσι, καὶ τέμνονται ὑπὸ τοῦ ΕΔ ἐπιπέδου· αἱ ἄρα κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. εἰσὶ καὶ ἴσαι, διάμετροι γάρ εἰσι ἴσων κύκλων· ἐὰν ἄρα, μενόντων τῶν Α, Β σημείων, τὰς ΔΓ, ΒΕ διαμέτρους νοήσωμεν περιενεχθείσας τῇ ΕΘΓ εὐθείᾳ περὶ τοὺς Α, Β κύκλους, καὶ εἰς ταὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθείσας, ἡ ΕΘΓ εὐθεῖα γράψει τὴν τοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνειαν, καὶ ἔσται τὸ Θ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας. ἦν δὲ ἐκτός, ὅπερ ἀδύνατον· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗΓ, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΖΔ. καὶ ἐπιζευγνύουσιν ἴσας τε καὶ παραλλήλους τὰς ΕΖ, ΓΔ· τὸ ΕΔ ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. III. *Theor.*

Si cylindrus plano ſecetur æquidiſtante parallelogrammo quod fit per axem: ſectio parallelogrammum erit, angulos habens æquales angulis parallelogrammi per axem

SIT cylindrus, cujus baſes circuli circa centra Α, Β; & axis recta linea ΑΒ, parallelogrammum autem per axem ΓΔ; & ſecetur cylindrus alio plano ΕΖΗΘ parallelo ipſi ΓΔ parallelogrammo, quod faciat ſectiones, in baſibus quidem rectas lineas ΕΖ, ΗΘ, in ſuperficie autem cylindri ipſas ΕΗ, ΖΘ: dico figuram ΕΗΖΘ parallelogrammum eſſe æquiangulum ipſi ΓΔ.

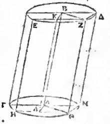
ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμῳ, ἡ τομὴ παραλληλόγραμμον ἔσται ἴσας γωνίας ἔχον τῷ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμῳ.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ περὶ τὰ Α, Β κέντρα κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ, παραλλήλῳ ὄντι τῷ ΓΔ παραλληλογράμμῳ, καὶ ποιοῦντι τομὰς ἐν μὲν ταῖς βάσεσι τὰς ΕΖ, ΗΘ εὐθείας, ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὰς ΕΗ, ΖΘ γραμμάς· λέγω ὅτι τὸ ΕΗΖΘ σχῆμα παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἰσογώνιον τῷ ΓΔ.

Ἤχθω

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β κέντρου ἐπὶ τὴν ΕΖ εὐθεῖαν κάθετος ἡ ΒΚ, καὶ διὰ τῶν ΚΒ, ΒΑ ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον, καὶ ἔστωσαν κοιναὶ τομαὶ αἱ ΑΛ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ, ΑΘ. ἐπεὶ οὖν παράλληλος ὁ μὲν Α κύκλος τῷ Β, τὸ δὲ ΕΘ ἐπίπεδον τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ, καὶ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ΑΒΚΛ ἐπιπέδου· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΛ τῇ ΒΚ, ἡ δὲ ΚΛ τῇ ΒΑ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΑ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΒΚ τῇ ΑΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΒΚ τῇ ΑΛ παράλληλός ἐστιν, ἡ δὲ ΚΖ τῇ ΛΘ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΚΖ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΛΘ ἴση. καί ἐστιν ἡ ΒΚ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΖ· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΛΘ. καί εἰσιν ἴσαι· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ΕΖ, ΗΘ, ἀλλὰ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΖ τῇ ΑΘ παράλληλός ἐστι· τὸ ἄρα διὰ τῆς ΒΖ καὶ τοῦ ἄξονος ἀγόμενον ἐπίπεδον ἥξει καὶ διὰ τῆς ΑΘ, καὶ τομὴν ποιήσει παραλληλόγραμμον, καὶ πλευρὰ αὐτοῦ ἔσται ἡ τὰ Ζ, Θ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας οὖσα τοῦ κυλίνδρου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΘ πλευρὰ τοῦ ΕΖΗΘ σχήματος ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· κοινὴ ἄρα πλευρά ἐστι τοῦ τε διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου καὶ τοῦ ΕΗΖΘ σχήματος. εὐθεῖα δὲ ἐδείχθη ἡ πλευρὰ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου· ἡ ΖΘ ἄρα ἐστὶν εὐθεῖα, ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΕΗ. καὶ ἐπιζευγνύουσιν ἴσας τε καὶ παραλλήλους τὰς ΕΖ, ΗΘ· τὸ ΕΘ ἄρα παραλληλόγραμμόν ἐστι.



Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον τῷ ΓΔ. ἐπεὶ γὰρ δύο αἱ ΔΒ, ΒΖ δυσὶ ταῖς ΜΛ, ΛΘ παράλληλοί εἰσι, καί εἰσιν αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἴσαι· καὶ αἱ ΖΔ, ΜΘ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι, διὰ τὸ πρῶτον θεώρημα· καὶ αἱ ΖΘ, ΔΜ ἄρα καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΑΜ παράλληλος· ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΘΖ γωνία τοῦ ΕΘ παραλληλογράμμου τῇ ὑπὸ ΑΜΔ γωνίᾳ τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΕΘ τῷ ΓΔ.

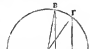
Ducatur à centro Β ad ΕΖ perpendicularis ΒΚ; perque rectas ΚΒ, ΒΑ ducto plano, communes ſectiones ſint ΑΛ, ΚΛ; & jungantur ΒΖ, ΑΘ. quoniam igitur circulus Α circulo Β æquidiſtat, & ΕΘ planum plano ΓΔ, ſecaturque ab ipſo ΑΒΚΛ plano: recta ΑΛ [per 16. 11.] parallela erit rectæ ΒΚ, & ΚΛ ipſi ΒΑ; quare ΚΑ parallelogrammum eſt: ideoque recta ΚΛ æqualis eſt rectæ ΒΑ, & ΒΚ ipſi ΑΛ. & quoniam ΒΚ quidem ipſi ΑΛ parallela eſt, ΚΖ vero ipſi ΛΘ; erit ΒΚΖ angulus [per 10. 11.] æqualis angulo ΑΛΘ. atque eſt ΒΚ ad ΚΖ perpendicularis: perpendicularis eſt igitur ΑΛ ad ipſam ΛΘ. ſunt autem æquales: ergo æquales ſunt ipſæ ΕΖ, ΗΘ, & parallelæ. præterea quoniam ΒΖ parallela eſt ipſi ΑΘ; planum per ΒΖ atque axem ductum tranſibit etiam per ΑΘ; ſectionemque faciet parallelogrammum, cujus latus recta linea, quæ puncta Ζ, Θ conjungit, & in ſuperficie ipſius cylindri exiſtit. eſt autem & ΖΘ latus figuræ ΕΖΗΘ in ſuperficie cylindri: commune igitur latus eſt & parallelogrammi per axem & figuræ ΕΗΖΘ. ſed [per 2. huj.] demonſtratum eſt latus parallelogrammi per axem eſſe rectam lineam: quare recta linea eſt ΖΘ, ſimiliter & recta erit ipſa ΕΗ. conjungunt autem æquales & parallelas rectas ΕΖ, ΗΘ: ergo [per 33. 1.] planum ΕΘ parallelogrammum erit.

Dico inſuper & æquiangulum eſſe parallelogrammo ΓΔ. quoniam enim duæ rectæ ΔΒ, ΒΖ duabus rectis ΜΛ, ΛΘ parallelæ ſunt, ſuntque quatuor rectæ æquales; & ipſæ ΖΔ, ΜΘ inter ſe æquales erunt & parallelæ, per primum theorema: ergo & æquales & parallelæ ſunt ipſæ ΖΘ, ΔΜ. eſt autem & ΛΘ ipſi ΑΜ parallela: angulus igitur ΛΘΖ parallelogrammi ΕΘ æqualis eſt angulo ΑΜΔ parallelogrammi ΓΔ: quare parallelogrammum ΕΘ parallelogrammo ΓΔ æquiangulum erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ΄.

Ἐὰν καμπύλῃ γραμμῇ ὑποτείνῃ εὐθεῖα, αἱ δὲ ἀπὸ τῆς γραμμῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν κάθετοι ἴσον δύνωνται τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης· ἡ γραμμὴ κύκλου περιφέρεια ἔσται.

Ἔστω καμπύλη γραμμὴ ἡ ΑΒΓΔ, ὑποτεινέτω δὲ αὐτὴν ἡ ΑΔ εὐθεῖα, καὶ κάθετοι ἤχθωσαν ἐπὶ τὴν ΑΔ αἱ ΒΕ, ΓΖ, καὶ ὑποκείσθω τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἴσον τῷ ὑπὸ ΑΖΔ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΔ κύκλου περιφέρειά ἐστι.

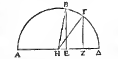


Prop. IV. *Theor.*

Si curvæ lineæ recta ſubtendatur; & quæ à linea ad ſubtenſam perpendiculares ducuntur, poſſint ſpatium æquale ei, quod ipſius ſubtenſæ partibus continetur: dicta linea circuli circumferentia erit.

SIT curva linea ΑΒΓΔ, & quæ ei ſubtenditur recta ΑΔ; ducantur autem ΒΕ, ΓΖ perpendiculares ad ipſam ΑΔ, ponaturque quadratum ex ΒΕ æquale rectangulo ΑΕ, ΕΔ, & quadratum ex ΓΖ æquale ipſi ΑΖΔ: dico lineam ΑΒΓΔ circuli circumferentiam eſſe.

Secetur enim AΔ bifariam in puncto H, & jungantur HB, HΓ. quoniam igitur quadratum ex HΔ [per 5.2.] æquale eſt quadrato ex HE & rectangulo AE, EΔ, ſive quadrato ex BE; quadratum autem ex BH æquale eſt quadratis ex HE, EB: erit recta BH ipſi HΔ æqualis. & ſimiliter demonſtratur ΓH æqualis ipſi HΔ, cæteræque: ſemicirculus igitur eſt linea ABΓΔ.



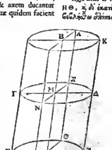
Τετμήσθω δίχα ἡ AΔ κατὰ τὸ H, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ HB, HΓ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς HΔ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς HE καὶ τῷ ὑπὸ τῶν AE, EΔ, ὅ ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς BE, ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς BH ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν HE, EB· ἴση ἄρα ἡ BH τῇ HΔ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΓH τῇ HΔ ἴση δείκνυται, καὶ αἱ ἄλλαι· ἡμικύκλιον ἄρα τὸ ABΓΔ.

Prop. V. *Theor.*

Si cylindrus plano baſibus æquidiſtante ſecetur; ſectio circulus erit centrum habens in axe.

SIT cylindrus, cujus baſes quidem circuli A, B, axis autem AB recta; & ſecetur plano baſibus æquidiſtante, quod faciat ſectionem in ſuperficie cylindri lineam ΓΞΔN: dico ipſam ΓΞΔN circuli circumferentiam eſſe.

Deſcribantur in circulo A diametri EZ, HΘ; & per utramque ipſarum & axem ducantur plana cylindrum ſecantia, quæ quidem facient ſectiones parallelogramma; & ſit parallelogrammi EK & plani ΓΞΔN communis ſectio ΓΔ, parallelogrammi autem HΛ & ejuſdem plani communis ſectio NΞ. quoniam igitur planum ΓΞΔN æquidiſtat circulo A, & ſecatur à plano EK, recta ΓΔ ipſi EZ eſt parallela; & eadem ratione recta NΞ parallela eſt ipſi HΘ. itaque quoniam BA utrique ΓE, ΔZ parallela eſt, & eſt EA æqualis ipſi AZ: erit ΓM ipſi MΔ æqualis. ſimiliter quoque cum ſit HA æqualis ipſi AΘ, MN æqualis erit ipſi MΞ. ſunt autem AE, AH æquales; ergo & MΓ, MN æquales erunt: quare omnes MΓ, MΔ, MN, MΞ inter ſe æquales. & ſimili ratione aliæ æquales oſtendentur, quæcunque à puncto M ad lineam ΓΞΔN pertingunt: circulus igitur eſt ſectio ΓΞΔN. quod autem centrum habeat in recta AB manifeſto patet: nam cum punctum M ſit in tribus planis; & in ipſa AB communi planorum ſectione neceſſario erit, hoc eſt in ipſo axe.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε΄.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ταῖς βάσεσιν, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ A, B κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ AB εὐθεῖα, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ ταῖς βάσεσι, ποιοῦντι ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὴν ΓΞΔN γραμμήν· λέγω ὅτι ἡ ΓΞΔN γραμμὴ κύκλου ἐστὶ περιφέρεια.

Ἤχθωσαν ἐν τῷ A κύκλῳ διάμετροι αἱ EZ, HΘ, καὶ δι' ἑκατέρας τῶν EZ, HΘ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδα τέμνοντα τὸν κύλινδρον· ποιήσει δὴ παραλληλόγραμμα τὰς τομάς. ἔστω τοῦ μὲν EK παραλληλογράμμου καὶ τοῦ ΓΞΔN ἐπιπέδου κοινὴ τομὴ ἡ ΓΔ, τοῦ δὲ HΛ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ ΓΞΔN ἐπιπέδου κοινὴ τομὴ ἡ NΞ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΞΔN ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ A κύκλῳ, καὶ τέμνεται ὑπὸ τοῦ EK ἐπιπέδου· ἡ ΓΔ ἄρα εὐθεῖα τῇ EZ παράλληλός ἐστι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ NΞ τῇ HΘ παράλληλός ἐστι. ἐπεὶ οὖν ἡ BA ἑκατέρᾳ τῶν ΓE, ΔZ παράλληλός ἐστι, καὶ ἴση ἡ EA τῇ AZ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓM τῇ MΔ. ὁμοίως ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ HA τῇ AΘ, ἴση ἄρα καὶ ἡ MN τῇ MΞ. ἐπεὶ δὲ αἱ AE, AH ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ MΓ, MN ἄρα ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις· πᾶσαι ἄρα αἱ MΓ, MΔ, MN, MΞ ἴσαι εἰσίν. ὁμοίως δέ, κἂν ἄλλαι διαχθῶσι, πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ M ἐπὶ τὴν ΓΞΔN γραμμὴν προσπίπτουσαι ἴσαι εὑρεθήσονται· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΞΔN τομή. ὅτι δὲ καὶ τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς AB εὐθείας ἔχει, δῆλον· τὸ γὰρ M, ἐν τοῖς τρισὶν ἐπιπέδοις ὄν, ἐστὶ τῆς AB κοινῆς τομῆς τῶν παραλληλογράμμων οὔσης, τουτέστιν ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

Prop. VI. *Theor.*

Si cylindrus ſcalenus per axem ſecetur plano ad rectos angulos ipſi baſi; ſecetur autem & alio plano recto ad parallelogrammum per axem, quod faciat communem ſectionem in pa-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛ΄.

Ἐὰν κύλινδρος σκαληνὸς ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος τμηθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ ὀρθῷ τε πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον, καὶ ποιῇ τὴν κοινὴν

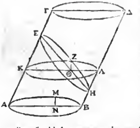
τομὴν

τομὴν ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ εὐθεῖαν, ἴσας δὲ ποιοῦσαν γωνίας ταῖς τοῦ παραλληλογράμμου, μὴ παράλληλον δὲ οὖσαν ταῖς βάσεσι τοῦ παραλληλογράμμου· ἡ τομὴ κύκλος ἔσται. καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη ἀγωγὴ τοῦ ἐπιπέδου ὑπεναντία.

rallelogrammo rectam lineam, continentem angulos æquales angulis parallelogrammi, non autem ipſius baſibus parallelam: ſectio circulus erit. vocetur autem talis ſectio *Subcontraria*.

ΕΣΤΩ σκαληνὸς κύλινδρος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον ἔστω τὸ Α Δ, πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει, τετμήσθω δὲ ὁ κύλινδρος καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ Ε Ζ Η, ὀρθῷ ὄντι αὐτῷ πρὸς τὸ Α Δ παραλληλόγραμμον, καὶ ποιοῦντι ἐν αὐτῷ κοινὴν τομὴν τὴν Ε Η εὐθεῖαν, μὴ παράλληλον μὲν ταῖς Α Β, Γ Δ, ἴσας δὲ γωνίας ποιοῦσαν τὴν μὲν ὑπὸ Η Ε Α τῇ ὑπὸ Ε Α Β, τὴν δὲ ὑπὸ Ε Η Β τῇ ὑπὸ Α Β Η· λέγω ὅτι ἡ Ε Ζ Η τομὴ κύκλος ἐστίν.

Εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Ε Η εὐθείας τὸ Θ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ Ε Η ἤχθω εὐθεῖα ἡ Θ Ζ, ἐν τῷ Ε Ζ Η ἐπιπέδῳ οὖσα· ἡ Ζ Θ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ Α Δ ἐπίπεδον. ἤχθω διὰ τοῦ Θ τῇ Α Β παράλληλος ἡ Κ Θ Λ, καὶ κείσθω τῇ Α Β πρὸς ὀρθὰς ἡ Μ Ν, καὶ διὰ τῶν Ζ Θ, Κ Λ ἤχθω ἐπίπεδον ποιοῦν τὴν Κ Ζ Λ τομήν. ἐπεὶ οὖν ἡ Μ Ν κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν Α Β κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων, ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ οὖσα· κάθετος ἄρα ἐστὶν ἡ Μ Ν ἐπὶ τὸ Α Δ ἐπίπεδον· παράλληλοι ἄρα εἰσὶν αἱ Ζ Θ, Μ Ν. παράλληλοι δὲ καὶ αἱ Κ Λ, Α Β· καὶ τὰ δι᾽ αὐτῶν ἄρα ἐπίπεδα· ἡ Κ Ζ Λ ἄρα τομὴ παράλληλός ἐστι τῇ βάσει· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ Κ Ζ Λ τομή. διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἡ Κ Λ, καὶ τῇ Κ Λ πρὸς ὀρθὰς ἡ Ζ Θ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Κ Θ, Θ Λ τῷ ἀπὸ τῆς Θ Ζ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Κ Θ, Θ Λ τῷ ὑπὸ τῶν Ε Θ, Θ Η ἴσον ἐστίν, ἴση γὰρ ἡ μὲν Ε Θ τῇ Θ Κ, ἡ δὲ Η Θ τῇ Θ Λ, διὰ τὸ τὰς πρὸς ταῖς Ε Κ, Λ Η βάσεσι γωνίας ἴσας εἶναι· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Ε Θ, Θ Η ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς Ζ Θ ἴσον ἐστί, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ Ζ Θ ἐπὶ τὴν Ε Η. ὁμοίως δὲ, κἂν ἄλλην ἀγάγῃς παράλληλον τῇ Ζ Θ ἐπὶ τὴν Ε Η, ἴσον δυνήσεται τῷ ὑπὸ τῶν γενομένων τμημάτων τῆς Ε Η· κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε Ζ Η τομή, οὗ διάμετρος ἡ Ε Θ Η εὐθεῖα.



SIT cylindrus ſcalenus, cujus parallelogrammum per axem Α Δ, ad rectos angulos exiſtens ipſi baſi; ſecetur autem cylindrus & alio plano Ε Ζ Η ad parallelogrammum Α Δ recto, quod in ipſo communem ſectionem faciat rectam lineam Ε Η baſibus Α Β, Γ Δ, non quidem parallelam, ſed quæ contineat angulum Η Ε Α æqualem angulo Ε Α Β, angulum vero Ε Η Β æqualem ipſi Α Β Η: dico ſectionem Ε Ζ Η circulum eſſe.

Sumatur aliquod punctum in recta Ε Η, quod ſit Θ; & ad rectos angulos ipſi Ε Η ducatur Θ Ζ in Ε Ζ Η plano: ergo [per 4. def. 11] Ζ Θ perpendicularis eſt ad planum Α Δ. ducatur per Θ ipſi Α Β parallela Κ Θ Λ, ponaturque ipſi Α Β ad rectos angulos Μ Ν, & per Ζ Θ, Κ Λ ducatur planum faciens ſectionem Κ Ζ Λ. quoniam igitur Μ Ν, in baſis plano exiſtens, perpendicularis eſt ad Α Β communem planorum ſectionem; erit ipſa Μ Ν perpendicularis ad planum Α Δ: quare [per 6. 11.] Ζ Θ, Μ Ν parallelæ ſunt. ſed & parallelæ ipſæ Κ Λ, Α Β: ergo [per 15. 11.] parallela quoque quæ per illas tranſeunt plana: ſectio igitur Κ Ζ Λ parallela eſt baſi; ideoque [per præc.] circulus eſt, & ejus diameter Κ Λ, cui ipſa Ζ Θ ad rectos angulos inſiſtit: quare [per corr. 13. 6.] rectangulum Κ Θ, Θ Λ eſt æquale quadrato ex Θ Ζ. at rectangulum Κ Θ, Θ Λ æquale eſt ipſi Ε Θ, Θ Η rectangulo, cum ſit [per 6. 1.] Ε Θ æqualis ipſi Θ Κ, & Η Θ ipſi Θ Λ, propterea quod ad baſes Ε Κ, Λ Η anguli æquales ſunt: ergo quadratum ex Ζ Θ æquale eſt rectangulo Ε Θ, Θ Η; atque eſt Ζ Θ ad Ε Η perpendicularis. ſimiliter autem, ſi ad Ε Η alia ducatur parallela ipſi Ζ Θ, poterit ſpatium æquale ei, quod ſub partibus ipſius Ε Η continetur: igitur [per 4. huj.] ſectio Ε Ζ Η circulus eſt, cujus diameter eſt recta Ε Θ Η.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζʹ.

Δοθέντος κυλίνδρου καὶ σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἀγαγεῖν διὰ τοῦ σημείου πλευρὰν τοῦ κυλίνδρου.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν αἱ Α, Β κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ Α Β εὐθεῖα, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ

Prop. VII. *Probl.*

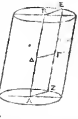
Cylindro dato & puncto in ſuperficie ejus; per dictum punctum latus cylindri ducere.

SIT cylindrus, cujus baſes circuli Α, Β, axis vero recta linea Α Β, datum autem punctum in ejus ſuperficie

Digitized by Google

ſuperficie Γ; atque oporteat per Γ ducere cylindri latus.

Ducatur à puncto Γ perpendicularis ad ipſam ΑΒ, quæ ſit ΓΔ; & per ΑΒ, ΓΔ rectas ducatur planum cylindrum ſecans: ſectio igitur per Γ tranſibit, & faciet in ſuperficie rectam lineam ΖΓΕ, quæ quidem cylindri latus erit.



τῆς ἐπιφανείας τὸ Γ, καὶ δέον ἔστω διὰ τοῦ Γ ἀγαγεῖν τοῦ κυλίνδρου πλευράν.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τῶν ΑΒ, ΓΔ εὐθειῶν ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον τέμνον τὸν κύλινδρον· ἥξει ἄρα ἡ τομὴ διὰ τοῦ Γ, καὶ ποιήσει εὐθεῖαν ὡς τὴν ΖΓΕ, ἥτις ἔσται πλευρὰ τοῦ κυλίνδρου.

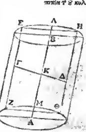
Prop. VIII. *Theor.*

Si in ſuperficie cylindri duo puncta ſumantur, non exiſteutia in uno latere parallelogrammi per axem: quæ dicta puncta coujungit recta linea intra cylindri ſuperficiem cadet.

SIT cylindrus, cujus baſes circuli Α, Β; ſumanturque in ſuperficie ejus duo puncta Γ, Δ, quæ non ſint in uno latere parallelogrammi per axem; & jungatur ΓΔ: dico ipſam ΓΔ intra cylindri ſuperficiem cadere.

Si enim fieri poteſt, vel in ſuperficie ejus, vel extra ſuperficiem cadat; & quoniam puncta Γ, Δ non ſunt in latere cylindri, ducatur per Γ quidem latus ΕΓΖ, per Δ vero ipſum ΗΔΘ; & jungantur ΕΗ, ΖΘ: ergo [per 2. 3.] ΕΗ, ΖΘ intra circulos cadent. ſumatur aliquod punctum in recta ΓΔ, quod ſit Κ: igitur Κ vel erit in ſuperficie cylindri, vel extra. ſit primum in ſuperficie; & per Κ ducatur latus cylindri recta linea ΛΚΜ, quæ quidem cadens in circumferentias ΕΗ, ΖΘ, ſi producatur, neutram rectarum ΕΗ, ΖΘ ſecabit: quare ΛΜ non erit in plano ΖΕΗΘ. ſed punctum Κ eſt in recta ΛΜ; igitur Κ non erit in plano ΖΕΗΘ. quoniam autem ΓΔ eſt in ipſo ΖΕΗΘ plano, & in ΓΔ eſt punctum Κ; erit Κ in eodem ΖΕΗΘ plano: quare Κ in dicto plano erit & non erit; quod fieri non poteſt. igitur ΓΔ non eſt in ſuperficie cylindri.

Sed ſit extra; ſumaturque in circumferentia ΕΗ aliquod punctum Λ, & jungatur ΚΛ: ergo ΚΛ ex utraque parte producta neutram rectarum ΕΗ, ΖΘ ſecabit: quare ΚΛ non erit in plano ΖΕΗΘ. cætera manifeſta ſunt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ η'.

Ἐὰν ἐπὶ κυλίνδρου ἐπιφανείας δύο σημεῖα ληφθῇ, μὴ ἐπὶ μιᾶς ὄντα πλευρᾶς τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου· ἡ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις εἰσὶν οἱ Α, Β κύκλοι, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ, μὴ ὄντα ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ εὐθεῖα· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐντὸς πίπτει τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, πιπτέτω ἢ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ἢ ἐκτὸς αὐτῆς· καὶ ἐπεὶ τὰ Γ, Δ σημεῖα οὐκ ἔστιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, ἤχθω διὰ μὲν τοῦ Γ ἡ ΕΓΖ πλευρά, διὰ δὲ τοῦ Δ ἡ ΗΔΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΘ εὐθεῖαι· ἐντὸς ἄρα πίπτουσι τῶν κύκλων αἱ ΕΗ, ΖΘ. εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΓΔ τὸ Κ· τὸ δὴ Κ ἤτοι ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου, ἢ ἐκτός. ἔστω πρότερον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας· καὶ διὰ τοῦ Κ ἤχθω πλευρὰ τοῦ κυλίνδρου ἡ ΛΚΜ εὐθεῖα, πίπτουσα ἐπὶ τὰς ΕΗ, ΖΘ περιφερείας· ἐκβαλλομένη ἄρα ἡ ΛΚΜ εὐθεῖα οὐδετέραν τεμεῖ τῶν ΕΗ, ΖΘ εὐθειῶν· οὐκ ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ Κ· οὐδὲ τὸ Κ ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ. ἐπεὶ δὲ ἡ ΓΔ ἐστὶν ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΖΕΗΘ· ἔστιν ἄρα καὶ οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τὸ Κ, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἐκτὸς, καὶ ληφθέντος σημείου τινὸς ἐπὶ τῆς ΕΗ περιφερείας τοῦ Λ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΛ· ἐκβληθεῖσα δὴ ἐφ' ἑκάτερα ἡ ΚΛ οὐδετέραν τεμεῖ τῶν ΕΗ, ΖΘ εὐθειῶν· ὥστε οὐκ ἔσται ἡ ΚΛ ἐν τῷ ΖΕΗΘ ἐπιπέδῳ. καὶ τὰ λοιπὰ δῆλα.

Prop. IX. *Theor.*

Si cylindrus plano ſecetur, neque baſibus æquidiſtante, neque ſubcontrarie poſito, neque per axem, neque æ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ, μήτε παρὰ τὰς βάσεις, μήτε ὑπεναντίως, μήτε διὰ τοῦ ἄξονος,

μήτε

μήτε παραλλήλῳ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ· ἡ τομὴ οὐκ ἔσται κύκλος, οὐδὲ εὐθύγραμμον.

quidiſtante ei quod per axem fit parallelogrammo; ſectio neque circulus, neque rectilineum erit.

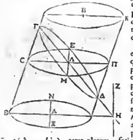
ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις οἱ Α, Β κύκλοι, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ, μήτε παρὰ τὰς βάσεις, μήτε ὑπεναντίως, μήτε διὰ τοῦ ἄξονος, μήτε παραλλήλως τῷ ἄξονι· τὸ δὴ τέμνον ἐπίπεδον ἤτοι τὰς βάσεις τέμνει ἀμφοτέρας, ἢ τὴν ἑτέραν, ἢ οὐδετέραν. πρῶτον δὲ μηδετέραν τεμνέτω, καὶ ποιείτω γραμμὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου τὴν ΓΕΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΕΔ τομὴ οὔτε κύκλος ἐστὶν, οὔτε εὐθύγραμμον.

Ὅτι μὲν οὐκ ἔστιν εὐθύγραμμον, δῆλον. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω εὐθύγραμμον, καὶ εἰλήφθω πλευρά τις αὐτοῦ ἡ ΓΕ. ἐπεὶ οὖν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου δύο σημεῖα εἴληπται τὰ Γ, Ε, μὴ ὄντα ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς τοῦ κυλίνδρου, (ἡ γὰρ πλευρὰ κατὰ δύο σημεῖα οὐ τέμνει τὴν τοιαύτην γραμμὴν) ἡ ἄρα τὰ Γ, Ε σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΓΕ γραμμή· τὸ ἄρα ΓΕΔ σχῆμα οὐκ ἔστιν εὐθύγραμμον.

Δεικτέον δὴ ὅτι οὐδὲ κύκλος. ἐπεὶ γὰρ τὸ ΓΕΔ τομῆς ἐπίπεδον τῷ τοῦ Α κύκλου ἐπιπέδῳ οὐκ ἔστι παράλληλον, ἐκβαλλόμενα τὰ ἐπίπεδα τεμεῖ ἄλληλα. τεμνέτω, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ ΖΗ, καὶ διὰ τοῦ Α κέντρου ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ ἡ ΘΑΗ, καὶ διὰ τῆς ΘΑ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον, ποιοῦν ἐν μὲν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον, ἐν δὲ τῇ ΓΕΔ τομῇ τὴν ΓΔ εὐθεῖαν· καὶ, τῆς ΓΔ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ Λ, ἤχθωσαν τῇ ΖΗ παράλληλοι, διὰ μὲν τοῦ Λ ἡ ΕΛΜ, διὰ δὲ τοῦ Α ἡ ΝΑΞ· αἱ ἄρα ΜΕ, ΝΞ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις. ἤχθω τοίνυν διὰ τῆς ΕΜ ἐπίπεδον παράλληλον τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου, ποιοῦν ἐν τῷ κυλίνδρῳ τομὴν τὴν ΟΕΠΜ· ἡ ΟΕΠΜ ἄρα τομὴ κύκλος ἐστὶν, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ ΟΠ, δίχα τετμημένη κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ γὰρ τῶν ΛΟΓ, ΛΠΔ τριγώνων, ὁμοίων ὄντων, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΛ τῇ ΛΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΟΛ τῇ ΛΠ· διάμετρος ἄρα καὶ ἡ ΕΛΜ τοῦ ΟΕΠ κύκλου. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΟΛ τῇ ΘΑ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΑΞ· ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΜ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΘΑ, ΑΞ ἴση ἐστίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΘΑΞ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΜ· ἡ ΕΛ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΟΠ διάμετρον τοῦ κύκλου· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΟΛ, ΛΠ. ἐπεὶ δὲ οὐκ ἔστιν ἡ τομὴ ὑπεναντία, ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΟΓ γωνία οὐκ ἔστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΟΓΛ· οὐδὲ ἡ ΟΛ ἄρα εὐθεῖα τῇ ΓΛ ἴση ἐστίν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΟΛ ἄρα, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΠ, τῷ ἀπὸ τῆς ΓΛ, τουτέστι τῷ ὑπὸ τῶν ΓΛ, ΛΔ, ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν ΟΛ, ΛΠ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΛ ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΔ οὐκ ἔστι τῷ ὑπὸ

SIT cylindrus, cujus baſes circuli Α, Β; & ſecetur plano neque æquidiſtante baſibus, neque ſubcontrarie poſito, neque per axem, neque axi æquidiſtante: vel igitur ſecans planum baſes utraſque ſecabit, vel alteram tantum, vel neutram. primum vero neutram ſecet, & faciat in ſuperficie cylindri lineam ΓΕΔ: dico ſectionem ΓΕΔ neque circulum eſſe, neque rectilineum.

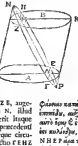
Nam rectilineum non eſſe manifeſto conſtat. ſit enim rectilineum, ſi fieri poteſt: & ſumatur latus quodpiam ipſius ΓΕ. quoniam igitur in cylindri ſuperficie duo puncta Γ, Ε ſumuntur, in eodem latere cylindri non exiſtentia; (latus enim in duobus punctis talem lineam non ſecat) erit recta linea, quæ puncta Γ, Ε conjungit, in ſuperficie ipſius cylindri; quod quidem [per præced.] fieri non poſſe jam demonſtratum eſt: ΓΕ igitur recta linea non eſt, neque figura ΓΕΔ rectilinea.



Demonſtrandum deinceps eſt, neque circulum eſſe. quoniam enim ſectionis ΓΕΔ planum plano circuli Α non eſt æquidiſtans: ſi plana producantur, ipſa ſe invicem ſecabunt. ſecent ergo ſeſe, & ſit ipſorum communis ſectio ΖΗ; perque Α centrum ducatur ΘΑΗ ad ΖΗ perpendicularis; & per ΘΑ perque axem ducatur planum, faciens in cylindro ſectionem parallelogrammum ΘΚ, in ſectione autem ΓΕΔ rectam lineam ΓΔ; &, ſectâ ΓΔ bifariam in puncto Λ, ducantur ipſi ΖΗ parallelæ, per Λ quidem recta ΕΛΜ, per Α vero ipſa ΝΑΞ: quare [per 9.11.] ΜΕ, ΝΞ inter ſeſe parallelæ erunt. ducatur deinde planum per ΕΜ baſi cylindri æquidiſtans, quod faciat in cylindro ſectionem ΟΕΠΜ; & erit [per 5. huj.] ſectio ΟΕΠΜ circulus, cujus diameter ΟΠ bifariam ſecatur in Λ. nam, cum triangula ΛΟΓ, ΛΠΔ ſimilia ſint, & ſit ΓΛ æqualis ipſi ΛΔ; erit & ΟΛ ipſi ΛΠ æqualis: quare ΕΛΜ circuli ΟΕΠ diameter erit. & quoniam recta ΟΛ ipſi ΘΑ parallela eſt, ut & ΛΜ ipſi ΑΞ; angulus ΟΛΜ [per 10.11.] angulo ΘΑΞ eſt æqualis: rectus autem eſt angulus ΘΑΞ; rectus igitur eſt ΟΛΜ, & ΕΛ perpendicularis eſt ad ΟΠ circuli diametrum: unde ſequitur quadratum ex ΕΛ æquale eſſe rectangulo ΟΛΠ. quoniam autem ſectio non eſt ſubcontraria, angulus ΛΟΓ angulo ΟΓΛ æqualis non erit: & idcirco latera ΟΛ, ΓΛ inæqualia: igitur quadratum ex ΟΛ, hoc eſt rectangulum ΟΛΠ, non eſt æquale quadrato ex ΓΛ, hoc eſt rectangulo ΓΛΔ. ſed rectangulo ΟΛΠ æquale eſt quadratum ex ΕΛ: quare quadratum ex ΕΛ non eſt æquale rectangulo

ΓΑΔ: & propterea [per 4. huj.] ſectio ΓΕΔ non eſt circulus. demonſtratum autem eſt neque rectilineum eſſe. quod erat demonſtrandum. ſimul vero & illud demonſtratum eſt, rectam lineam, quæ in ſectione ipſi ΖΗ ducta parallela biſariam dividit ipſam ΓΔ, diametro baſis æqualem eſſe.

Sed ſecet planum etiam ipſas baſes; baſim quidem Α rectâ lineâ ΓΕ, ipſam vero Β rectâ ΖΗ; perque Α ducatur ΘΑΛ perpendicularis ad ΓΕ; & per ΘΑ diametrum & axem ducatur planum, quod faciat ſectionem ΘΚ parallelogrammum: plani autem ΖΓΕΗ & parallelogrammi ΘΚ communis ſectio ſit ΛΜ. quoniam igitur planum ΖΕ neque per axem ductum eſt, neque axi æquidiſtans; recta ΛΜ in infinitum protracta occurret ipſi axi: quare & rectæ ΘΝ axi parallelæ; utræque enim ſunt in ΘΚ plano. occurrat in puncto Ν, & producatur ΘΝ utramque in partem. itaque ſi, axe & circulis manentibus, ipſa ΘΝ circumferatur unà cum diametris, quouſque redeat in eum locum à quo moveri cœpit; cylindri ſuperficies ſecundum altitudinem augebitur: &, producto plano ΖΕ, augebitur etiam ſectio uſque in punctum Ν. illud idem continget & ex parte ΓΛ: erit itaque ΝΗΕΡ cylindri ſectio, qualis in præcedenti theoremate: unde conſtat ΝΗΕΡ neque circulum eſſe, neque rectilineum: quare ſectio ΓΕΗΖ neque rectilineum eſt, neque circulus, neque portio circuli; ſed erit ejuſmodi ſectio portio ſectionis cylindri.



τῆ ΓΛ, ΛΔ ἴσον· οὐκ ἄρα κύκλος ἐστὶν ἡ ΓΕΔ τομή. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ εὐθύγραμμον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. καὶ συναπεδείχθη ὅτι ἡ τὴν ΓΔ ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ΖΗ διχοτομοῦσα εὐθεῖα ἴση ἐστὶ τῇ διαμέτρῳ τῆς βάσεως.

Ἀλλὰ δὴ τὸ τέμνον ἐπίπεδον τεμνέτω καὶ τὰς βάσεις, τὴν μὲν Α βάσιν τῇ ΓΕ εὐθείᾳ, τὴν δὲ Β τῇ ΖΗ, καὶ διὰ τοῦ Α ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΕ ἡ ΘΑΛ, καὶ διὰ τῆς ΘΑ διαμέτρου καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον, ὃ ποιεῖ τομὴν τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον, τῆς δὲ ΖΓΕΗ τομῆς καὶ τοῦ ΘΚ παραλληλογράμμου κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ ΛΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΖΕ ἐπίπεδον οὔτε διὰ τοῦ ἄξονος ἦκται, οὔτε παράλληλος τῷ ἄξονι· ἡ ΛΜ ἄρα ἐπ' ἄπειρον ἐκβαλλομένη τεμεῖ τὸν ἄξονα· τεμεῖ ἄρα καὶ τὴν ΘΝ παράλληλον οὖσαν τῷ ἄξονι. ἀμφότερα γὰρ ἐν τῷ ΘΚ ἐστιν ἐπιπέδῳ· τεμνέτω δὴ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα ἡ ΘΝ. ἐὰν ἄρα μένοντος τοῦ ἄξονος καὶ τῶν κύκλων, ἡ ΘΝ περιενεχθεῖσα σὺν ταῖς διαμέτροις ἀποκατασταθῇ, αὐξήσει τὴν τοῦ ἐξ ἀρχῆς κυλίνδρου ἐπιφάνειαν κατὰ τὸ ὕψος. καὶ προσεκβληθέντος τοῦ ΖΕ ἐπιπέδου, αὐξηθήσεται καὶ τομὴ μέχρι τοῦ Ν. τὸ δ' αὐτὸ ἔσται καὶ ἐπὶ τὰ ΓΛ μέρη· ἡ ΝΗΕΡ ἄρα τομή ἐστι κυλίνδρου, οἵα καὶ ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι· ἡ ΝΗΕΡ ἄρα τομὴ οὔτε κύκλος, οὔτε εὐθύγραμμόν ἐστι· καὶ ἡ ΓΕΗΖ ἄρα τομὴ οὔτε εὐθύγραμμον, οὔτε κύκλος, οὔτε τμῆμα κύκλου, ἀλλ' ἔστιν ἡ τοιαύτη τομὴ κυλίνδρου τομῆς τμῆμα.

Prop. X. *Theor.*

Si cylindrus plano per axem ſecetur; ſumatur autem aliquod punctum in ejus ſuperficie, quod non ſit in latere parallelogrammi per axem; & ab ipſo ducatur recta linea parallela rectæ cuipiam in eodem plano exiſtenti in quo cylindri baſis, quæque ad rectos angulos incidit baſi parallelogrammi per axem: cadet ea intra parallelogrammum, & producta uſque ad alteram partem ſuperficiei ab ipſo parallelogrammo biſariam ſecabitur.

SIT cylindrus, cujus baſes Α, Β circuli, & parallelogrammum per axem ΓΔ; ſumatur autem aliquod punctum Ε in ſuperficie cylindri, & ab ipſo ducatur recta linea ΕΖ parallela rectæ cuipiam, quæ perpendicularis ſit ad ΓΑ baſim parallelogrammi per axem: dico rectam ΕΖ intra ΓΔ parallelogrammum cadere; &, ſi ulterius producatur uſque ad alteram partem ſuperficiei, ab ipſo parallelogrammo biſariam ſecari.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι'.

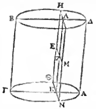
Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα παράλληλος εὐθείᾳ τινὶ, ἥτις, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσα τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου, πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου· ἐντὸς πεσεῖται τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ παραλληλογράμμου.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε παράλληλος ἤχθω εὐθείᾳ τινὶ καθέτῳ ἐπὶ τὴν ΓΑ βάσιν τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ ἔστω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἐντὸς πεσεῖται τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου, καὶ προσεκβαλλομένη μέχρι τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ παραλληλογράμμου.

Ἤχθω

Ἤχθω διὰ τοῦ Ε σημείου παρὰ τὸν ἄξονα ἡ Θ Ε Η εὐθεῖα, τέμνουσα τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως κατὰ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Θ ἤχθω ἡ Θ Κ παράλληλος τῇ ἐπὶ τὴν Γ Α καθέτῳ, ἤτοι παράλληλος ὑπόκειται ἡ Ε Ζ· τεμεῖ ἄρα ἡ Θ Κ τὴν Γ Α καὶ αὐτή. ἤχθω δὲ διὰ τῶν Η Θ, Θ Κ ἐπίπεδον τέμνον τὸν κύλινδρον, καὶ ποιείτω τὸ Η Ν παραλληλόγραμμον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Κ Λ κοινὴ τομὴ τῶν Γ Δ, Ν Η παραλληλογράμμων. ἐπεὶ τοίνυν αἱ Ε Ζ, Κ Θ τῇ αὐτῇ εἰσι παράλληλοι· καὶ ἀλλήλαις ἄρα εἰσὶ παράλληλοι. καί ἐστιν ἡ Θ Κ ἐν τῷ Κ Η ἐπιπέδῳ· καὶ ἡ Ε Ζ ἄρα ἐν τῷ Κ Η ἐστιν ἐπιπέδῳ· ἐκβαλλομένη ἄρα ἡ Ε Ζ πίπτει ἐπὶ τὴν Λ Κ, ἥτις ἐστὶν ἐν τῷ Γ Δ ἐπιπέδῳ· ἡ Ε Ζ ἄρα ἐντὸς πίπτει τοῦ Γ Δ παραλληλογράμμου. φανερὸν δὲ ὅτι, κἂν εἰς τὸ ἕτερον μέρος ἐκβληθῇ μέχρι τοῦ Μ, ὅπερ ἐστὶν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, δίχα ἔσται τετμημένη ἡ Ε Μ κατὰ τὸ Ζ. ἐπεὶ γὰρ ἡ Γ Α διάμετρος πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ Θ Κ· ἴση ἄρα ἡ Θ Κ τῇ Κ Ν. καὶ παράλληλοι αἱ Μ Ν, Λ Κ, Η Θ· ἴση ἄρα ἡ Μ Ζ τῇ Ζ Ε.

Ducatur enim per E recta Θ E H parallela axi, quæ baſis circumferentiam ſecet in Θ; & per Θ ducatur Θ K parallela perpendiculari ad Γ A, cui etiam parallelam poſuimus E Z: ergo & Θ K ipſam Γ A ſecabit. itaque juxta rectas lineas H Θ, Θ K ducatur planum ſecans cylindrum, quod faciat ſectionem parallelogrammum H N; & jungatur K Λ communis ſectio parallelogrammorum Γ Δ, N H. quoniam igitur rectæ E Z, K Θ eidem ſunt parallelæ, etiam inter ſe parallelæ ſunt: atque eſt Θ K in plano K H, quare & E Z in plano K H erit; adeoque producta conveniet cum Λ K quæ in plano Γ Δ eſt: recta igitur E Z intra Γ Δ parallelogrammum cadet. perſpicuum autem eſt, ſi ad alteram partem producatur uſque in punctum M, quod eſt in ſuperficie cylindri, bifariam ſecari E M in Z. nam cum diameter Γ A perpendicularis ſit ad Θ K; erit [per 3.3.] Θ K ipſi K N æqualis. ſed parallelæ ſunt ipſæ M N, Λ K, H Θ: ergo M Z ipſi Z E æqualis erit.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιαʹ.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι μὲν τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ· αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆς τομῆς τῆς ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου γενομένης ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου, παράλληλοι τῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων πεσοῦνται, καὶ προσεκβαλλόμεναι ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων· καὶ ἡ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ὀρθοῦ μένοντος τοῦ κυλίνδρου, πρὸς ὀρθὰς ἔσται καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τε διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου. σκαληνοῦ δὲ ὄντος, οὐκέτι· πλὴν ὅταν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου.

Prop. XI. *Theor.*

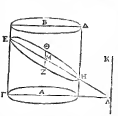
Si cylindrus ſecetur plano per axem, ſecetur etiam alio plano baſis planum extra circulum ſecante; communis autem planorum ſectio perpendicularis ſit ad baſim parallelogrammi per axem, vel ad eam quæ in directum ipſi conſtituitur: rectæ lineæ quæ à ſectione in ſuperficie cylindri à ſecante plano facta ducuntur, parallelæ ei quæ perpendicularis eſt ad baſim parallelogrammi per axem, vel ad eam quæ in directum ipſi conſtituitur, communi planorum ſectioni occurrent, & productæ uſque ad alteram ſectionis partem, à communi planorum ſectione bifariam dividentur; quæ vero perpendicularis eſt ad baſim parallelogrammi per axem, vel ad eam quæ in directum ipſi conſtituitur, cylindro recto exiſtente, etiam ad communem planorum ſectionem, parallelogrammi ſcilicet per axem & ſecantis plani, perpendicularis erit. Scaleno autem exiſtente cylindro, non item; præterquam cum parallelogrammum per axem ad ipſam baſim cylindri rectum fuerit.

Ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ Γ Δ, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος, ὡς εἴρηται, ἐπιπέδῳ

SIT cylindrus, cujus baſes quidem circuli A, B, parallelogrammum autem per axem Γ Δ; & ſecetur plano, ut dictum eſt, quod faciat

ciat ſectionem EZHΘ, ita ut planis ſectionis EZHΘ & baſis AΓ occurrentibus, communis ſectio KΛ perpendicularis ſit ad ipſam ΓΛA; & à ſectione BZHΘ ducatur recta ZM parallela ipſi KΛ, quæ producta pertingat ad alteram partem ſuperficiei in puncto Θ: dico rectam ZM occurrere ipſi EH, & ipſi MΘ æqualem eſſe.

Nam quoniam in ſectione BZHΘ ducta eſt ZM parallela ipſi KΛ; intra ΓΔ parallelogrammum cadet. quoniam autem ZM eſt in plano BZHΘ, atque eſt EH communis ſectio ipſius & parallelogrammi ΓΔ; occurret ZM ipſi BH, & ZM ipſi MΘ æqualis erit: id quod patet ex antecedenti theoremate. Reliquum eſt ut oſtendamus, ſi cylindrus rectus ſit, vel planum ΓΔ rectum ſuper baſim cylindri, rectam KΛ ad ipſam EHΛ perpendicularem eſſe. quoniam enim planum ΓΔ ad planum baſis rectum eſt, & KΛ in baſis plano exiſtens perpendicularis eſt ad ΓΛA communem planorum ſectionem; & ad reliquum ipſius ΓΔ parallelogrammi planum [per 4. defin. 11.] perpendicularis erit.



Quod ſi planum ΓΔ non ſit rectum ad baſim, ſcaleno exiſtente cylindro, KΛ ad ΛE perpendicularis non erit. ſi enim fieri poteſt, ſit KΛ perpendicularis ad ΛE; eſt autem & ad ΛΓ perpendicularis: quare [per 4. 11.] & ad planum quod per ipſas tranſit, hoc eſt ad planum ΓΔ: planum igitur per KΛ, hoc eſt planum baſis A, ad planum ΓΔ [per 18. 11.] rectum erit, contra hypotheſin: ergo KΛ ad ΛE non eſt perpendicularis.

Ex jam demonſtratis itaque conſtat, rectam EH ſectionis BZHΘ diametrum eſſe; omnes enim, quæ ad ipſam ducuntur parallelas ipſi KΛ, biſariam dividit, quemadmodum ZΘ.

ποιοῦντι τὴν ΕΖΗΘ τομήν, ὥστε, συμπιπτόντων τούτων τοῦ ΕΖΗΘ τομῆς καὶ τοῦ τῆς ΑΓ βάσεως ἐπιπέδου, τὴν κοινὴν τομὴν τὴν ΚΛ πρὸς ὀρθὰς εἶναι τῇ ΓΛΑ εὐθείᾳ, καὶ ἀπὸ τῆς ΕΖΗΘ τομῆς ἤχθω τις εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΚΛ ἡ ΖΜ, καὶ προσεκβληθεῖσα περατούσθω κατὰ τὸ ἕτερον μέρος τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὸ Θ· λέγω ὅτι ἡ ΖΜ πίπτει ἐπὶ τὴν ΕΗ, καὶ ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΖΜ τῇ ΜΘ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν τῇ ΕΖΗΘ τομῇ παράλληλος ἦκται τῇ ΚΛ ἡ ΖΜ· ἐντὸς ἄρα πίπτει τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου. ἐπεὶ δὲ ἐστιν ἡ μὲν ΖΜ εὐθεῖα ἐν τῷ ΕΖΗΘ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ ΕΗ κοινὴ τομή ἐστιν αὐτοῦ καὶ τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου· ἡ ΖΜ ἄρα ἐπὶ τὴν ΕΗ πίπτει. ὅτι δὲ καὶ ἡ ΖΜ τῇ ΜΘ ἴση ἐστί, φανερὸν καὶ αὐτό, διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα. Λοιπὸν δεῖ δεῖξαι, ὅτι ἡ ΚΛ, ὀρθοῦ μένοντος τοῦ κυλίνδρου, ἢ τοῦ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ὄντος τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΕΗΛ. ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν ΓΔ ἐπίπεδον πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ, τῇ δὲ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΓΛΑ πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΚΛ, ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ οὖσα· καὶ τῷ λοιπῷ ἄρα τῷ τοῦ ΓΔ παραλληλογράμμου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

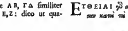
Εἰ δὲ τὸ ΓΔ οὐκ ἔστι πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, σκαληνοῦ δηλαδὴ ὄντος τοῦ κυλίνδρου, οὐκ ἔσται πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΛ τῇ ΛΕ. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΛ τῇ ΛΕ· ἔστι δὴ καὶ τῇ ΛΓ πρὸς ὀρθάς· καὶ τῷ δι᾽ αὐτῶν ἄρα ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῷ ΓΔ, πρὸς ὀρθὰς ἔσται ἡ ΚΛ· καὶ τὸ δι᾽ αὐτῆς ἄρα ἐπίπεδον, τουτέστι τὸ τῆς Α βάσεως, πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῷ ΓΔ, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ἡ ΚΛ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΛΕ.

Ἐκ δὴ τῶν δεδειγμένων φανερόν, ὅτι ἡ ΕΗ διάμετρός ἐστι τῆς ΕΖΗΘ τομῆς· πάσας γὰρ τὰς παρὰ τὴν ΚΛ κατηγμένας ἐπ᾽ αὐτὴν δίχα τέμνει, ὥσπερ τὴν ΖΘ.

Prop. XII. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ ſimiliter ſecentur; erit ut quadratum primæ ad quadratum ſecundæ, ita quod ſit ſub primæ partibus rectangulum ad rectangulum ſub partibus ſecundæ.

Rectæ namque lineæ AB, ΓΔ ſimiliter ſecentur in punctis E, Z: dico ut quadratum ex AB ad quadratum ex ΓΔ, ita eſſe rectangulum AEB ad rectangulum ΓZΔ.



Quoniam enim ut AE ad EB ita ΓZ ad ZΔ; erit componendo & permutando ut AB ad ΓΔ ita EB ad ZΔ. & rurſus quoniam ut AE

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὁμοίως τμηθῶσιν· ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς δευτέρας.

Εὐθεῖαι γὰρ αἱ ΑΒ, ΓΔ ὁμοίως τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Ε, Ζ σημεῖα· λέγω ὅτι ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. Ἐπεὶ γὰρ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, συνθέντι ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ οὕτως

οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ. ἀλλὰ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

ad EB ita ΓZ ad ZΔ; rectangulum AEB ad rectangulum ΓZΔ duplicatam rationem habebit ejus quam habet EB ad ZΔ, hoc eſt, quam habet AB ad ΓΔ. ſed & quadratum ex AB ad quadratum ex ΓΔ duplicatam rationem habet ejus quæ eſt AB ad ΓΔ. ergo ut quadratum ex AB ad quadratum ex ΓΔ ita rectangulum AEB ad rectangulum ΓZΔ. quod erat demonſtrandum.

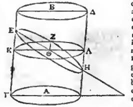
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τούτου τε τοῦ τῆς βάσεως καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἀπὸ δὲ τῆς τομῆς ἀχθῇ τις ἐπὶ τὴν διάμετρον παράλληλος τῇ εἰρημένῃ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων· ἡ ἀχθεῖσα δυνήσεταί τι χωρίον, πρὸς ὃ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως.

Prop. XIII. *Theor.*

Si cylindrus plano ſecetur per axem; & ſecetur alio plano baſis planum ſecante, ita ut communis ſectio baſis & ſecantis plani perpendicularis ſit ad baſim parallelogrammi per axem, vel ad eam quæ in directum ipſi conſtituitur; à ſectione autem ad diametrum ducatur recta communi planorum ſectioni parallela: poterit dicta recta ſpatium quoddam, ad quod rectangulum ſub partibus diametri ſectionis contentum eam rationem habet, quam habet quadratum diametri ſectionis ad quadratum diametri baſis.

Ἔστω κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ Α, Β κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ὁ κύλινδρος ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ κατ' εὐθεῖαν ὀρθὴν πρὸς τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν, καὶ ἔστω ἡ γενομένη τομὴ ἡ ΕΖΗ, κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἡ ΕΗ, διάμετρος οὖσα τῆς τομῆς, ὡς ἐδείχθη· ληφθέντος δέ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ Ζ, κατήχθω ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν διάμετρον εὐθεῖα παράλληλος τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ἡ ΖΘ· πίπτει ἄρα ἡ ΖΘ ἐπὶ τὴν ΕΗ, ὡς ἐδείχθη· λέγω δὴ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως.



Ἤχθω διὰ τοῦ Θ παράλληλος τῇ ΓΑ ἡ ΚΘΑ, καὶ διὰ τῶν ΖΘ, ΚΑ εὐθειῶν ἤχθω ἐπίπεδον, τομὴν ποιοῦν τὴν ΚΖΑ. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΚΑ τῇ ΓΑ παράλληλος, ἡ δὲ ΖΘ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων, οὔσῃ ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ· καὶ τὰ δι' αὐτῶν ἄρα ἐπίπεδα παράλληλά ἐστιν· ἡ ΚΖΑ ἄρα τομὴ κύκλος ἐστί. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΚΑ τῇ ΓΑ, ἡ δὲ ΖΘ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς οὔσῃ πρὸς τὴν ΓΑ· καὶ ἡ ΖΘ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΚΑ. καὶ ἔστι κύκλος ὁ ΚΖΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΑ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΕ τῇ ΑΗ παράλληλός ἐστιν· ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΑ οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΗ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν

SIT cylindrus, cujus baſes A, B circuli; & parallelogrammum per axem ΓΔ; ſecetur autem cylindrus plano occurrenti plano baſis ſecundum rectam lineam, quæ ad ipſam ΓA productam ſit perpendicularis; ſitque ſectio facta EZH: & communis ſectio parallelogrammi ΓΔ & ſecantis plani ſit recta EH, quæ diameter eſt ſectionis, ut oſtenſum eſt; ſumpto deinde in ſectione quovis puncto Z, ab eo ad diametrum ducatur recta linea ZΘ, parallela communi planorum ſectioni: cadet igitur ZΘ, ex iis quæ [per 11. huj.] demonſtrata ſunt, in ipſam EH: dico itaque rectangulum EΘH ad quadratum ex ZΘ eam rationem habere quam diametri EH quadratum ad quadratum diametri baſis.

Ducatur enim per Θ recta KΘA parallela ipſi ΓA; & per ZΘ, KA rectas planum ducatur, quod faciat ſectionem KZA. itaque quoniam recta KA parallela eſt ipſi ΓA, & ZΘ parallela communi planorum ſectioni quæ in baſis plano exiſtit; igitur [per 15.11.] quæ per ipſas tranſeunt plana inter ſe æquidiſtantia erunt: quare [per 5. huj.] circulus eſt ſectio KZA. rurſus quoniam KA ipſi ΓA eſt parallela; & ZΘ parallela communi ſectioni planorum, quæ perpendicularis eſt ad ΓA: erit & ZΘ ad KA perpendicularis. eſt autem circulus KZA; ergo [per 4.huj.] quadratum ex ZΘ rectangulo KΘA æquale erit. & cum parallela ſit KE ipſi AH, erit ut KΘ ad ΘA ita EΘ ad ΘH: quare rectangu-

lum ΕΘΗ ſimile eſt rectangulo ΚΘΛ: & propterea ut rectangulum ΕΘΗ ad ipſum ΚΘΛ, hoc eſt ad quadratum ex ΖΘ, ita [per 12. huj.] quadratum diametri ΕΗ ad quadratum ex ΚΛ, hoc eſt ad quadratum diametri baſis.

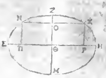
ΕΘ, ΘΗ ὅμοιόν ἐστι τῷ ὑπὸ ΚΘ, ΘΛ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως.

Prop. XIV. *Theor.*

Recta linea, quæ per punctum quod diametrum ſectionis bifariam dividit ordinatim in ſectione applicatur, ſecunda diameter erit.

SIT ſectionis ΕΖΗ diameter ΕΗ, quæ bifariam ſecetur in Θ; & ΖΘΜ ordinatum applicetur: dico ΖΜ ſecundam diametrum eſſe ſectionis.

Ducatur enim recta ΝΟΞ parallela ipſi ΕΗ, & ducantur ΝΠ, ΞΡ ipſi ΖΜ parallelæ: ergo & ΝΠ, ΞΡ ordinatim applicatæ ſunt. itaque quoniam [per præced. 13. huj.] quadratum ex ΝΠ ad rectangulum ΕΠΗ eandem habet rationem, quam habet quadratum diametri baſis cylindri ad quadratum diametri ſectionis, & habet quadratum ex ΞΡ ad rectangulum ΕΡΗ hanc eandem rationem; erit ut quadratum ex ΝΠ ad rectangulum ΕΠΗ ita quadratum ex ΞΡ ad rectangulum ΕΡΗ, & permutando. eſt autem quadratum ex ΝΠ æquale quadrato ex ΞΡ; parallelogrammum enim eſt ΝΠΡΞ: ergo & rectangulum ΕΠΗ æquale eſt rectangulo ΕΡΗ. quibus ſublatis ab æqualibus quadratis ex ΕΘ, & ΘΗ, erit [per 5. 2.] reliquum quadratum ex ΠΘ reliquo quadrato ex ΘΡ æquale: æqualis igitur eſt ΠΘ ipſi ΘΡ, hoc eſt ΝΟ ipſi ΟΞ. Eadem ratione & aliæ omnes ipſi ΕΗ parallelæ à ΖΜ bifariam ſecabuntur: ergo [ex definit.] ΖΜ ſecunda diameter eſt ſectionis.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Ἡ διὰ τῆς διχοτομίας τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς τεταγμένως ἀγομένη ἐν τῇ τομῇ, δευτέρα διάμετρός ἐστι.

ΕΣΤΩ γὰρ τῆς ΕΖΗ τομῆς διάμετρος ἡ ΕΗ, καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Θ. καὶ διήχθω ἡ ΖΘΜ τεταγμένως· λέγω ὅτι ἡ ΖΜ δευτέρα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

Ἤχθω παρὰ μὲν τὴν ΕΗ ἡ ΝΟΞ, παρὰ δὲ τὴν ΖΜ αἱ ΝΠ, ΞΡ· τεταγμέναι ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΝΠ, ΞΡ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΝΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΠΗ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΡΗ τὸν αὐτὸν λόγον· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΝΠ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΠΗ οὕτως τὸ ἀπὸ ΞΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΡΗ, καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΝΠ τῷ ἀπὸ ΞΡ, παραλληλόγραμμον γάρ ἐστι τὸ ΝΠΡΞ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΕΠΗ τῷ ὑπὸ ΕΡΗ. καὶ ἀπ' ἴσων ἀφῄρηται τῶν ἀπὸ ΕΘ, ΘΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΠΘ λοιπῷ τῷ ἀπὸ ΘΡ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΠΘ τῇ ΘΡ, τουτέστιν ἡ ΝΟ τῇ ΟΞ. ὁμοίως δὲ πᾶσαι αἱ παρὰ τὴν ΕΗ δίχα τέμνονται ὑπὸ τῆς ΖΜ· δευτέρα διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ.

Prop. XV. *Theor.*

Si cylindrus plano ſecetur baſis planum ſecante; communis autem ſectio plani baſis & ſecantis plani perpendicularis ſit ad baſim parallelogrammi per axem, vel ad eam quæ in directum ipſi conſtituitur: quæ à ſectione ad diametrum ducitur, parallela communi planorum ſectioni jam dictæ, poterit ſpatium quoddam, ad quod rectangulum ſub diametri partibus contentum eam rationem habet, quam habet diametri ſectionis quadratum ad quadratum ſecundæ diametri; quæ vero à ſectione ad ſecundam diametrum ducitur parallela diametro, poterit ſpatium, ad

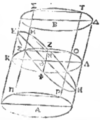
ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ τέμνοντι τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τούτων τῆς βάσεως καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλογράμμου, ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ· ἡ μὲν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀχθεῖσα παράλληλος τῇ εἰρημένῃ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων, δυνήσεται χωρίον, πρὸς ὃ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου· ἡ δὲ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον ἀχθεῖσα παράλληλος τῇ διαμέτρῳ δυνήσεται χωρίον, πρὸς ὃ τὸ

ὃ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς δευτέρας διαμέτρου λόγον ἔχει, ὃ τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, καὶ κατεσκευάσθω ὡς ἐν τῷ ιγ΄. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΘ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως τῆς διχοτομούσης τὴν ΕΗ τεταγμένως, ὡς ἐδείχθη πρὸς τῷ θ΄. θεωρήματι· ἡ δὲ διχοτομοῦσα τὴν διάμετρον τεταγμένως δευτέρα διάμετρός ἐστιν, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου· ἔστιν ἂν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ δὴ ὑποκείσθω τὸ μὲν Θ διχοτομεῖν τὴν ΕΗ διάμετρον, τὴν δὲ ΖΘΦ τεταγμένην εἶναι· δευτέρα ἄρα διάμετρος ἡ ΖΦ. κατήχθω ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τῆς τομῆς ἡ ΜΝ παράλληλος τῇ ΕΗ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΦΝ, ΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΦΖ δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου τῆς τομῆς. ἤχθω διὰ τῆς ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΓΔ παραλληλογράμμῳ τέμνον τὸν κύλινδρον· ποιήσει δὴ παραλληλόγραμμον τὴν τομήν. ποιείτω τὸ ΡΣ, ἔστωσαν δὲ κοιναὶ τομαὶ αὐτοῦ μὲν καὶ τῶν παραλλήλων κύκλων αἱ ΣΤ, ΞΟ, ΠΡ, αὐτοῦ δὲ καὶ τῆς ΕΖΗ τομῆς κοινὴ τομὴ ἔστω ἡ ΜΝ. ἐπεὶ οὖν παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΓΔ, ΡΣ τέμνεται ὑπὸ τοῦ ΚΖΛ ἐπιπέδου, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοι εἰσί· παράλληλος ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΝΞ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΜΝ παράλληλος· ἡ ἄρα ὑπὸ ΚΘΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΞΝΜ ἴση ἐστί. καὶ ἐπεὶ τὸ ΡΣ παραλληλόγραμμον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΓΔ παραλληλογράμμῳ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ γ΄. θεωρήματι· ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν ΣΠΡ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΕΓΑ ἴση ἐστί, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΣΞΝ τῇ ὑπὸ ΕΚΘ· ὅμοια ἄρα ἀλλήλοις τὰ ΕΚΘ, ΜΞΝ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ οὕτως ἡ ΞΝ πρὸς ΝΜ· καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῆς ΦΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΞΝ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΝΜ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΝΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΦΝ, ΝΖ (κύκλος γάρ ἐστιν ὁ ΚΖΛ καὶ ὀρθὴ ἡ ΘΖ ἐπὶ τὰς ΚΘ, ΞΝ) ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΦΖ δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ διαμέτρου, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΦΝ, ΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ. ὃ προέκειτο δεῖξαι.



quod rectangulum ſub ſecundæ diametri partibus eam habet rationem, quam quadratum ſecundæ diametri ad ipſius diametri quadratum.

SIT cylindrus, & conſtruantur omnia ſicut in decimo tertio theoremate. quoniam igitur oſtenſum eſt, rectangulum ΕΘΗ eſſe ad quadratum ex ΖΘ ſicut quadratum ex ΕΗ ad quadratum diametri baſis, hoc eſt ad quadratum ejus quæ ordinatim applicata bifariam ſecat ipſam ΕΗ, uti demonſtratum eſt in nono theoremate; ea autem quæ ordinatim applicatur & bifariam diametrum ſecat, ſecunda diameter eſt, ex præcedenti theoremate: ergo ut quadratum diametri ΕΗ ad quadratum ſecundæ diametri ita rectangulum ΕΘΗ ad quadratum ex ΖΘ. quod erat demonſtrandum.

Sed ponatur jam in puncto Θ bifariam ſecari diametrum ΕΗ, & rectam ΖΘΦ ordinatim applicatam eſſe; erit igitur ΖΦ ſecunda diameter. ducatur autem ad ipſam recta ΜΝ parallela ipſi ΕΗ: dico rectangulum ΦΝΖ ad quadratum ex ΜΝ eam rationem habere quam quadratum ex ΦΖ ſecundâ diametro ad quadratum diametri ſectionis ΕΗ. ducatur per rectam ΜΝ planum æquidiſtans parallelogrammo ΓΔ, quod cylindrum ſecet: faciet igitur [per 3. huj.] ſectionem parallelogrammum. faciat ΡΣ; & communes ſectiones ipſius & æquidiſtantium circulorum ſint ΣΤ, ΞΟ, ΠΡ; ipſius vero & plani ſectionis ΕΖΗ communis ſectio ΜΝ. itaque quoniam æquidiſtantia plana ΓΔ, ΡΣ ſecantur à plano ΚΖΛ, communes eorum ſectiones parallelæ erunt: parallela eſt igitur ΘΚ ipſi ΝΞ. erat autem & ΘΕ ipſi ΝΜ parallela: ergo [per 10.11.] angulus ΚΘΕ æqualis eſt angulo ΞΝΜ. & cum parallelogrammum ΡΣ parallelogrammo ΓΔ æquiangulum ſit, id quod demonſtravimus in tertio theoremate, angulus ΣΠΡ angulo ΕΓΑ æqualis erit, hoc eſt ΣΞΝ ipſi ΕΚΘ: ſimilia igitur triangula ſunt ΕΚΘ, ΜΞΝ: quare ut ΚΘ ad ΘΕ ita ΞΝ ad ΝΜ, & [per 22. 6.] ut quadratum ex ΚΘ ad quadratum ex ΘΕ, hoc eſt ut quadratum ex ΦΖ ſecundâ diametro ad quadratum diametri ΕΗ, ita quadratum ex ΞΝ ad quadratum ex ΝΜ. ſed quadratum ex ΝΞ æquale eſt rectangulo ΦΝΖ, quia ΚΖΛ circulus eſt & ΘΖ perpendicularis ad ΚΘ, ΞΝ; ut igitur quadratum ex ΦΖ ſecundâ diametro ad quadratum diametri ΕΗ ita rectangulum ΦΝΖ ad quadratum ex ΜΝ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ΄.

Ἐὰν κυλίνδρου τομῆς συζυγεῖς διάμετροι ὦσι, καὶ ποιηθῇ ὡς ἡ διάμετρος τῆς τομῆς πρὸς τὴν δευ-

Prop. XVI. *Theor.*

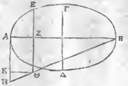
Si in cylindri ſectione conjugatæ diametri ſint; & fiat ut diameter ſectionis

ctionis ad ſecundam diametrum ita ſecunda diameter ad aliam quampiam: quæ à ſectione ad diametrum ordinatim applicata eſt poterit ſpatium, quod adjacet tertiæ illi proportionali, latitudinem habens eam quæ inter ordinatim applicatam & ſectionem interjicitur, deficiens vero figura ſimili ei quæ ſub diametro ipsâ & tertiâ proportionali continetur.

πέρας διάμετρον τῆς τομῆς οὕτως ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς ἄλλην τινά· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀχθῇ τεταγμένως δυνήσεται τὸ παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον παρακείμενον χωρίον, πλάτος ἔχον τὴν ἀπ' αὐτῆς τεταγμένως ἀχθείσης ἀπολαμβανομένην πρὸς τῇ τομῇ, ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς τρίτης ἀνάλογον.

SIT cylindri ſectio, cujus diameter quidem A B, ſecunda vero diameter Γ Δ, & fiat ut A B ad Γ Δ ita Γ Δ ad A H; apteturque A H ipſi A B ad rectos angulos; & junctâ B H, applicetur E Z ordinatim ad A B; & ducatur Z Θ ipſi A H parallela & Θ K parallela ipſi A Z: dico quadratum ex E Z æquale eſſe rectangulo A Θ.

ΕΣΤΩ κυλίνδρου τομή, ἧς διάμετρος μὲν ἡ A B, δευτέρα δὲ διάμετρος ἡ Γ Δ. καὶ γενέσθω ὡς ἡ A B πρὸς τὴν Γ Δ οὕτως ἡ Γ Δ πρὸς τὴν A H, καὶ κείσθω ἡ A H πρὸς ὀρθὰς τῇ A B, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ B H, καὶ ἐπὶ τὴν A B ἤχθω τεταγμένως ἡ E Z, καὶ παρὰ μὲν τὴν A H ἡ Z Θ, παρὰ δὲ τὴν A Z ἡ Θ K· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς E Z ἴσον ἐστὶ τῷ A Θ παραλληλογράμμῳ.



Quoniam enim ut quadratum ex A B ad quadratum ex Γ Δ ita recta A B ad ipſam A H, hoc eſt B Z ad Z Θ; ut autem quadratum ex A B ad quadratum ex Γ Δ ita rectangulum B Z A ad quadratum ex E Z, & ut B Z ad Z Θ ita B Z A rectangulum ad rectangulum Θ Z A, hoc eſt ad A Θ parallelogrammum: quadratum igitur ex E Z æquale erit rectangulo A Θ, quod quidem adjacet tertiæ proportionali A H, latitudinem habens A Z, & deficiens figura H K Θ ipſi H A B ſimili. vocetur autem A B tranſverſum figuræ latus, & A H latus rectum.

Ἐπεὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ Δ οὕτως ἡ A B πρὸς τὴν A H, τουτέστιν ἡ B Z πρὸς Z Θ· ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς A B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ Δ οὕτως τὸ ὑπὸ Z B, Z A πρὸς τὸ ἀπὸ Z Θ, ὡς δὲ ἡ B Z πρὸς Z Θ οὕτως τὸ ὑπὸ B Z, Z A πρὸς τὸ ὑπὸ Θ Z, Z A, τουτέστι τὸ A Θ παραλληλόγραμμον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς E Z ἴσον ἐστὶ τῷ A Θ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν A H τρίτην ἀνάλογον, πλάτος ἔχον τὴν A Z, ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ὑπὸ H K Θ ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ A H B. καλείσθω δὲ ἡ μὲν A B πλαγία τοῦ εἴδους πλευρά, ἡ δὲ A H ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά.

Ex quibus manifeſte conſtat, cylindri ſectionem A B Γ ellipſim eſſe. quæcunque enim hoc loco demonſtrata ſunt ineſſe huic ſectioni, omnia ſimiliter & coni ellipſi inſunt, ut demonſtratum eſt in elementis conicis, theoremate quinto decimo [libri primi] iis ſaltem qui ejus theorematis vim rite perceperint: & nos quoque in noſtris in idipſum commentariis geometrice demonſtravimus *.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, φανερόν ἐστιν ὅτι ἡ A B Γ τοῦ κυλίνδρου τομὴ ἔλλειψίς ἐστιν. ὅσα γὰρ ἐνταῦθα τῇ τομῇ ἐδείχθη ὑπάρχοντα, πάντα ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῆς κώνου τῇ ἐλλείψει ὑπῆρχεν· ὡς ἐν τοῖς κωνικοῖς δείκνυται, θεωρήματι ιε, τοῖς δυναμένοις λέγειν τὴν ἀκρίβειαν τοῦ θεωρήματος· καὶ ἡμεῖς ἐν τοῖς εἰς αὐτὰ ὑπομνήμασιν γεωμετρικῶς ἀπεδείξαμεν.

Prop. XVII. *Theor.*

Si in cylindri ſectione conjugatæ diametri ſint; & fiat ut ſecunda diameter ad diametrum ita diameter ad aliam quampiam: quæ à ſectione ad ſecundam diametrum ordinatim applicatur poterit ſpatium quod adjacet tertiæ proportionali, latitudinem habens eam quæ inter ordinatim applicatam & ſectionem interjicitur, deficiens vero figura ſimili ei quæ ſub ſecundâ diametro & tertia proportionali inventâ continetur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ΄.

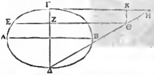
Ἐὰν ἐν κυλίνδρου τομῇ συζυγεῖς διάμετροι ὦσι, καὶ ποιηθῇ ὡς ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον οὕτως ἡ διάμετρος πρὸς ἄλλην τινά· ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον ἀχθῇ τεταγμένως, δυνήσεται τὸ παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον, πλάτος ἔχον τὴν ὑπ' αὐτῆς τεταγμένως ἀχθείσης ἀπολαμβανομένην πρὸς τῇ τομῇ, ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου καὶ τῆς προσευρεθείσης τρίτης ἀνάλογον.

* Vide Eutocii Comment. in prop. XVI. lib. primi Conicorum Apollonii.

ΕΣΤΩ

ΕΣΤΩ κυλίνδρου τομὴ ἡ ΑΒΓΔ, καὶ γενέσθω ὡς ἡ ΓΔ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν ΑΒ διάμετρον οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΗ, καὶ κείσθω ἡ ΓΗ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ, καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΕΖ, καὶ παρὰ μὲν τὴν ΓΗ ἡ ΖΘ, παρὰ δὲ τὴν ΓΔ ἡ ΘΚ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΘ παραλληλογράμμῳ.

SIT cylindri ſectio ΑΒΓΔ, & fiat ut ΓΔ ſecunda diameter ad diametrum ΑΒ ita ΑΒ ad ΓΗ; ponaturque ΓΗ ad rectos angulos ipſi ΓΔ, & jungatur ΔΗ; deinde ad ΓΔ ordinatim applicetur ΒΖ, & ducatur ΖΘ quidem ipſi ΓΗ parallela, ΘΚ vero parallela ipſi ΓΔ: dico quadratum ex ΕΖ parallelogrammo ΓΘ æquale eſſe.



Ἐπεὶ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΗ, τουτέστιν ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΖ, ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, τοῦτο γὰρ ἐδείχθη· ὡς δὲ ἡ ΔΖ πρὸς ΖΘ οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΖ, ΖΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖ, ΖΓ, τουτέστι τὸ ΓΘ ὀρθογώνιον· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ΓΘ, ὃ παραβέβληται παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον τὴν ΓΗ, πλάτος ἔχον τὴν ΖΓ, ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ὑπὸ ΘΚΗ ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΔΓΗ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ταῦτα συμφώνως παρακολουθεῖ τῇ ἐλλείψει ἐν τῷ ιε΄. θεωρήματι τοῦ πρώτου τῶν κωνικῶν· ἔλλειψις ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒΓΔ τομὴ τοῦ κυλίνδρου.

Quoniam enim ut quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΑΒ, ita recta ΓΔ ad ipſam ΓΗ, hoc eſt ΔΖ ad ΖΘ; ut autem quadratum ex ΓΔ ad quadratum ex ΑΒ ita rectangulum ΔΖΓ ad quadratum ex ΒΖ, quod [per 15. huj.] demonſtratum jam eſt: ut autem ΔΖ ad ΖΘ ita rectangulum ΔΖΓ ad rectangulum ΘΖΓ, hoc eſt ad ΓΘ: quadratum igitur ex ΕΖ æquale eſt rectangulo ΓΘ, quod quidem adjacet tertiæ proportionali ΓΗ, latitudinem habens ΖΓ, deficiens vero figura ΘΚΗ ſimili ei quæ ſub ΔΓΗ continetur. quod erat demonſtrandum.

Hæc autem manifeſtiſſime conveniunt ellipſi, ut ex quinto decimo theoremate primi Conicorum apparet: unde ſequitur ſectionem cylindri ΑΒΓΔ neceſſario ellipſim eſſe.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη΄.

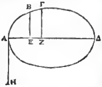
Ἐὰν ἐν κυλίνδρου τομῇ εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως· ἔσται τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα πρὸς μὲν τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ᾽ αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους πλευρᾶς, ὡς τοῦ εἴδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν· πρὸς ἑαυτὰ δὲ ὡς τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν, ὡς εἴρηται, ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν.

Prop. XVIII. *Theor.*

Si in ſectione cylindri rectæ lineæ ad diametrum ordinatim applicentur: erunt quadrata earum ad ſpatia contenta eis quæ inter ipſas & terminos tranſverſi lateris figuræ interjiciuntur, ut rectum figuræ latus ad tranſverſum; inter ſeſe vero ut ſpatia, quæ rectis modo dicto interceptis continentur.

ΕΣΤΩ κυλίνδρου τομὴ ἡ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ ΑΔ καὶ πλαγία πλευρὰ τοῦ εἴδους, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΑΗ, καὶ ἐπὶ τὴν ΑΔ τεταγμένως ἤχθωσαν αἱ ΒΕ, ΓΖ· λέγω ὅτι τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΗΑ πρὸς ΑΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ ΑΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΔ.

SIT cylindri ſectio ΑΒΓΔ, cujus diameter quidem & tranſverſum figuræ latus ΑΔ, rectum vero latus ΑΗ, & ad ipſam ΑΔ ordinatim applicentur ΒΕ, ΓΖ: dico ut quadratum ex ΒΒ ad rectangulum ΑΒΔ ita eſſe ΗΑ ad ΑΔ, & quadratum ex ΒΒ ad quadratum ex ΓΖ ſicut rectangulum ΑΕΔ ad rectangulum ΑΖΔ.



Ἐπεὶ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου οὕτως τὸ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΕΔ, καὶ ἡ ΑΗ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν ΑΔ πλαγίαν ὡς ἄρα ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ

Quoniam enim ut quadratum ſecundæ diametri ad diametri quadratum ita eſt quadratum ex ΒΕ ad rectangulum ΑΒΔ, & ita ΑΗ rectum latus ad tranſverſum ΑΔ: erit ut rectum latus ad tranſverſum ita quadratum ex ΒΕ ad rectangulum ΑΒΔ. ſimiliter autem & quadratum ex ΓΖ ad rectangulum ΑΖΔ: quare & permu-

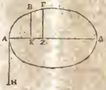
 tando

Digitized by Google

tando ut quadratum ex ΒΕ ad quadratum ex ΓΖ ita erit rectangulum ΑΕΔ ad rectangulum ΑΖΔ. quod erat demonſtrandum. & hæc in ellipſi contingere demonſtratum eſt in Conicis, theoremate vigeſimo primo.

ἀπὸ τῆς ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ΑΖΔ. ὃ προέκειτο δεῖξαι. καὶ ταῦτα δέδεικται ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως ἐν τοῖς κωνικοῖς θεωρήματι κα΄.

Ex aliis quidem multis ſectiones eaſdem eſſe oſtendere poſſumus, per ea quæ ipſis communiter accidunt; verum principaliora accidentia fere jam dicta ſunt. & cum hucuſque progreſſus fuerim, non ad me attinet, eorum quæ reſtant ſingula perſequentem, in alienis verſari: neceſſe eſt enim eum, qui de ellipſi ſubtiliter diſſerere velit, in medium afferre quæcunque de ipſa ab *Apollonio Pergæo* conſcripta ſunt. ſed ſi cui forte lubeat rem ulterius contemplari, licebit hæc comparare cum iis quæ in primo Conicorum libro traduntur; & exinde propoſiti veritatem confirmare: etenim quæcunque in illis contingunt circa coni ſectionem ellipſin vocatam, eadem & circa ſectionem cylindri contingere, ex iis quæ hoc loco demonſtrata ſunt, facile inveniet. quare ab his abſtinens, cum lemmatia nonnulla appoſuero, quæ ſectiones plane eaſdem eſſe oſtendunt, ad alia me convertam.



Ἔστι μὲν οὖν δι᾽ ἑτέρων πλειόνων ἐπιδεῖξαι τὴν ταυτότητα τῶν τομῶν διὰ τῶν κοινῇ συμβαινόντων αὐταῖς· οὐ μὴν ἀλλὰ τά γε ἀρχικώτερα τῶν συμπτωμάτων εἴρηται σχεδόν. ἐπεὶ δέ τοι μέχρι τοῦδε προαχθείσης τῆς θεωρίας, οὐκ ἐμοὶ ἥκει, τοὐντεῦθεν ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἕκαστα δείξαντι, τοῖς ἀλλοτρίοις ἐνδιατρίβειν· ἀνάγκη γάρ τινα ἀκριβολογεῖσθαι περὶ ἐλλείψεως ἐπεισκυκλῆσαι ὅσα τῷ Περγαίῳ Ἀπολλωνίῳ τεθεώρηται περὶ αὐτῆς. ἀλλ᾽ εἴ τῳ σπουδὴ περαιτέρω σκοπεῖν, ταῦτα παραβαλλέτω τοῖς ἐν τῷ πρώτῳ τῶν κωνικῶν εἰρημένοις. ἕξει αὐτῷ δι᾽ αὐτῶν βεβαιῶσαι τὸ προκείμενον· ὅσα γὰρ ἐν ἐκείνοις περὶ τὴν τοῦ κώνου τομὴν συμβαίνοντα, τὴν καλουμένην ἔλλειψιν, τοσαῦτα καὶ περὶ τὴν τοῦ κυλίνδρου τομὴν ἐκ τῶν ἐνταῦθα προδεδειγμένων εὑρήσει συμβαίνοντα. διόπερ τούτων μὲν ἀποσχών, ὀλίγα δὲ ἄττα λημμάτια προσθείς, δι᾽ ὧν καὶ αὐτῶν ἐνδείκνυται πῶς ἡ τῶν τομῶν ταυτότης, ἐπ᾽ ἄλλο τι τρέψομαι.

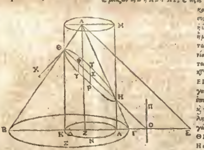
Prop. XIX. *Theor.*

Itaque dico fieri poſſe, ut conum ſimul & cylindrum una eademque ellipſi ſectos oſtendamus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ΄.

Λέγω τοίνυν ὅτι δυνατόν ἐστι δεῖξαι κῶνον ὁμοῦ καὶ κύλινδρον μιᾷ καὶ τῇ αὐτῇ τεμνομένους ἐλλείψει.

Constituatur triangulum ſcalenum ΑΒΓ ſuper baſim ΒΓ, quæ biſariam ſecetur in Δ; ſitque ΑΒ major quam ΑΓ; & ad rectam lineam ΓΑ ad Α punctum conſtituatur angulus ΓΑΕ, qui vel major ſit angulo ΑΒΓ, vel minor; occurrat autem ΑΕ ipſi ΒΓ Ε in puncto Ε; & inter ΒΕ, ΕΓ media proportionalis ſit ΕΖ; junctâque ΑΖ, ducatur in triangulo recta ΘΗ ipſi ΑΕ parallela; & per puncta Θ, Η ducantur ΘΚ, ΛΗΜ parallelæ ipſi ΑΖ, & compleatur parallelogrammum ΚΜ; deinde, juxta rectam ΒΕ ducto plano ad rectos angulos ſuper planum ΒΑΕ, deſcribatur in eo, circa diametrum quidem ΚΛ, circulus ΚΝΛ, qui cylindri baſis erit cujus parallelogrammum per axem eſt ΚΜ; circa diametrum vero ΒΓ deſcri-



Ἐκκείσθω τρίγωνον σκαληνὸν τὸ ΑΒΓ ἐπὶ τῆς ΒΓ βάσεως δίχα τεμνομένης κατὰ τὸ Δ· καὶ μείζων ἔστω ἡ ΑΒ τῆς ΑΓ. καὶ πρὸς τῇ ΓΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ συνεστάτω γωνία ἡ ὑπὸ τῶν ΓΑ, ΑΕ, ἢ μείζων ἢ ἐλάττων τῆς ΑΒΓ γωνίας, καὶ συμπιπτέτω ἡ ΑΕ τῇ ΒΓΕ κατὰ τὸ Ε, καὶ τῶν ΒΕ, ΕΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ, καὶ τῇ ΑΕ παράλληλος ἐν τῷ τριγώνῳ διήχθω ἡ ΘΗ, καὶ διὰ τῶν Θ, Η σημείων τῇ ΑΖ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΘΚ, ΛΗΜ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΚΜ παραλληλόγραμμον· καὶ, διὰ τῆς ΒΕ ἀχθέντος ἐπιπέδου πρὸς ὀρθὰς τῷ ΒΑΕ ἐπιπέδῳ, γεγράφθω ἐν τῷ ἀχθέντι, περὶ μὲν τὴν ΚΛ διάμετρον, ὁ ΚΝΛ κύκλος, βάσις ἐσόμενος κυλίνδρου οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΚΜ· περὶ δὲ τὴν ΒΓ

διάμετρον

διάμετρον ὁ ΒΞΓ κύκλος, βάσις ὑποκείσθω κώνου οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνόν ἐστι τὸ ΑΒΓ· καὶ τῆς ΘΗ ἐκβληθείσης ἐπὶ τὸ Ο, ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΕ ἡ ΟΠ, ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ οὖσα, καὶ ἤχθω διὰ τῶν ΟΠ, ΟΘ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον· ποιήσει δὴ τομὴν ἐν τῷ κώνῳ τῷ ἐπὶ τῆς ΒΞΓ βάσεως. ποιείτω τὴν ΘΡΗ· ἡ ΘΗ ἄρα εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς. τῆς οὖν ΘΗ δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ Σ, κατήχθωσαν τεταγμένως ἐπ' αὐτήν, δευτέρα μὲν διάμετρος ἡ ΡΣΤ, τυχοῦσα δὲ ἡ ΤΦ, καὶ γενέσθω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ διαμέτρου τῆς ΘΡΗ τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΡΤ δευτέρας διαμέτρου τῆς αὐτῆς τομῆς, οὕτως ἡ ΘΗ πλαγία τοῦ εἴδους πλευρὰ πρὸς τὴν ΘΧ ὀρθίαν.

Ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΘΚ τῇ ΑΖ παράλληλός ἐστιν, ἡ δὲ ΘΟ τῇ ΑΕ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΘΟ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΟ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ, ΕΓ * οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ διαμέτρου τῆς τοῦ κώνου τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΡΤ δευτέρας διαμέτρου τῆς αὐτῆς τομῆς· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΟ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΟΚ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ, τουτέστιν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ὡς ἐδείχθη πρότερον· ἡ ἄρα δευτέρα διάμετρος τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς ἴση ἐστὶ τῇ ΡΤ δευτέρᾳ διαμέτρῳ τῆς τοῦ κώνου τομῆς. καὶ ἔστιν ἡ διχοτομία τῆς ΘΗ κατὰ τὸ Σ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἄγεται τῇ ΘΗ δευτέρα διάμετρος τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ὥσπερ καὶ ἡ ΡΤ· ἡ ἄρα ΡΤ δευτέρα διάμετρός ἐστι τῆς τε κώνου καὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς. ὁμοίως δὲ ἡ ΘΗ διάμετρός ἐστι τῆς τοῦ κώνου καὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς· τὸ Ρ ἄρα σημεῖον ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἐν ταῖς τομαῖς ταῖς τε κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου αἱ αὐταί εἰσι διάμετροι, ἥ τε ΘΗ καὶ ἡ ΡΤ· καὶ ἡ τρίτη ἄρα ἀνάλογον ἡ αὐτή, τουτέστιν ἡ ΘΧ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά· ἡ ἄρα ΘΧ καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς ὀρθία ἐστὶ τοῦ εἴδους πλευρά. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΘΧ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΗΦ, ΦΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΦΤ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς, ὡς ἡ πλαγία τοῦ εἴδους πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης ἐπ' αὐτὴν τεταγμένως καὶ ποιούσης τὰ τμήματα· καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἄρα τομῆς ὡς ἡ ΘΗ πλαγία τοῦ εἴδους πλευρὰ πρὸς τὴν ΘΧ ὀρθίαν οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΗΦ, ΦΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἴσης τῇ ΤΦ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας ἀγομένης ἐπὶ τὴν ΘΗ. ἀλλ' ἡ ἴση τῇ ΤΦ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας ἐπὶ τὴν αὐτὴν ἀγομένη κατὰ τὸ Φ οὐχ ἑτέρα ἐστὶ τῆς ΤΦ· ἡ ἄρα ΦΤ καὶ ἐν τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶ τομῇ· τὸ ἄρα Τ σημεῖον, ἐπὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας ὄν, καὶ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἐπιφανείας. ὁμοίως δὲ δείκνυται, κἂν ἄλλας ὁμοίως τεταγμένως ἀγάγωμεν· ἡ ΘΡΗ ἄρα γραμμὴ ἐν ταῖς ἐπιφανείαις ἐστὶν ἀμφοτέρων τῶν σχημάτων· ἡ ΘΡΗ ἄρα τομὴ μία καὶ αὐτή ἐν ἀμφοτέροις ἐστὶ τοῖς σχήμασι. καὶ ἐπεὶ κατεσκευάσθη ἡ ὑπὸ ΓΑ, ΑΕ γωνία, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΗ, ΗΘ, ἤτοι μείζων ἢ ἐλάττων οὖσα

batur circulus ΒΞΓ, pro baſe coni cujus triangulum per axem ſit ΑΒΓ; &, protracta ΘΗ ad Ο, ducatur in circulorum plano recta ΟΠ ad rectos angulos ipſi ΒΕ; perque ΟΠ, ΟΘ ducatur planum: faciet igitur ſectionem in cono cujus baſis circulus ΒΞΓ. ſit autem ea ſectio ΘΡΗ; recta igitur ΘΗ diameter eſt ſectionis. eâ ideo bifariam diviſâ in Σ, ad ipſam ordinatim applicetur ſecunda diameter ΡΣΤ, & alia quævis ΤΦ; fiatque ut quadratum ex ΘΗ diametro ſectionis ΘΡΗ, ad quadratum ex ΡΤ ſecundâ diametro ejuſdem ſectionis, ita ΗΘ tranſverſum figuræ latus ad rectum ΘΧ.

Quoniam igitur ΘΚ quidem ipſi ΑΖ parallela eſt, ΘΟ vero ipſi ΑΕ: erit ut quadratum ex ΑΕ ad quadratum ex ΕΖ ita quadratum ex ΘΟ ad quadratum ex ΚΟ. ſed ut quadratum ex ΑΕ ad rectangulum ΒΕΓ * ita quadratum ex ΘΗ diametro ſectionis coni ad quadratum ex ΡΤ ſecundâ diametro ejuſdem ſectionis; ut autem quadratum ex ΘΟ ad quadratum ex ΟΚ ita quadratum ex ΘΗ ad quadratum ex ΚΛ, hoc eſt, ita quadratum ex ΘΗ diametro ſectionis cylindri ad quadratum ſecundæ diametri ejuſdem cylindri ſectionis, ſicut demonſtratum eſt ſuperius: quare ſecunda diameter ſectionis cylindri æqualis eſt ipſi ΡΤ ſecundæ diametro ſectionis coni. dividiturque ΘΗ bifariam in puncto Σ, & ipſi ad rectos angulos ducitur ſecunda diameter ſectionis cylindri, quemadmodum & ipſa ΡΤ: ergo ΡΤ ſecunda diameter eſt ſectionis tum coni tum cylindri. ſimiliter & ΘΗ eſt diameter ſectionis coni & cylindri: & propterea punctum Ρ & in coni & in cylindri ſuperficie erit. rurſus quoniam in ſectionibus coni & cylindri eædem diametri ſunt ΘΗ, ΡΤ, tertia etiam proportionalis eadem erit; hoc eſt ΘΧ rectum latus figuræ ſectionis coni: quare ΘΧ & in cylindri ſectione rectum eſt figuræ latus. quoniam igitur ut ΘΗ ad ΘΧ ita rectangulum ΗΦΘ ad quadratum ex ΦΤ; atque oſtenſum eſt in cylindri ſectione, ut tranſverſum figuræ latus ad rectum ita rectangulum ſub diametri partibus contentum ad quadratum ejus quæ ad ipſam ordinatim applicata partes efficit: erit & in cylindri ſectione ut ΘΗ tranſverſum figuræ latus ad ΘΧ rectum ita rectangulum ΗΦΘ ad quadratum rectæ ipſi ΤΦ æqualis & ſub angulis æqualibus ad ipſam ΘΗ ductæ. ſed recta, æqualis ipſi ΤΦ & ſub æqualibus angulis cum ipſa ΘΗ ad punctum Φ occurrens, non alia eſt quam ipſa ΤΦ; ergo ΦΤ & in cylindri ſectione erit: ac propterea punctum Τ, in coni ſuperficie exiſtens, in cylindri etiam erit ſuperficie. ſimili modo demonſtratio fiet & in aliis, quæ ad ipſam ordinatim applicabuntur; linea igitur ΘΡΗ in ſuperficiebus utriuſque figuræ continetur: quare ΘΡΗ una eademque ſectio eſt in utraque figura. præterea quoniam angulus ΓΑΕ, hoc eſt, angulus ΑΗΘ, factus eſt vel major vel minor angulo qui ad Β, ſe-

* Hoc eſt ad quadratum ex ΕΖ, per conſtructionem

ctio

ctio non erit ſubcontraria; ideoque ſectio ΘΡΗ non eſt circulus; ellipſis igitur eſt: quare ſectio coni expoſiti ac cylindri eadem ellipſis erit. quod erat demonſtrandum.

τῆς πρὸς τῷ Β· ἡ ἄρα τομὴ οὐκ ἔστιν ὑπεναντία· ἡ ΘΡΗ ἄρα τομὴ οὐκ ἔστι κύκλος· ἔλλειψις ἄρα ἐστὶ· καὶ τοῦ κώνου ἄρα τοῦ ἐκκειμένου καὶ τοῦ κυλίνδρου τομὴ ἡ αὐτὴ ἔλλειψίς ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

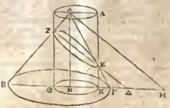
Prop. XX. *Probl.*

Cono dato & in eo ellipſi; invenire cylindrum eadem ellipſi ſectum, quâ conus ſectus eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Κώνου δοθέντος καὶ ἐλλείψεως ἐν αὐτῷ εὑρεῖν κύλινδρον τεμνόμενον τῇ αὐτῇ ἐλλείψει τῷ κώνῳ.

SIT datus conus, cujus per axem triangulum ſit ΑΒΓ; & data in ipſo ellipſis cujus diameter ΖΕ: protrahatur ea ad Δ, & ipſi ΖΔ parallela ducatur ΑΜ occurrens ipſi ΒΔ protractæ ad Μ; interque ΒΜ, ΜΓ media proportionalis ſit ΜΗ; &, junctâ ΑΗ, per puncta Ζ, Ε ducantur ΖΘ, ΚΕΛ parallelæ ipſi ΑΗ; & compleatur parallelogrammum ΘΛ. itaque ſi concipiamus cylindrum, cujus baſis quidem ſit circulus circa diametrum ΘΚ, parallelogrammum vero per axem ΘΛ: erit & in ipſo cylindro ſectio, cujus diameter ΖΕ, & ſimili modo, atque in antecedenti theoremate, demonſtrabimus ſecundam diametrum eandem eſſe, eaſdemq; omnes quæ ad diametrum ordinatim applicantur: inventus igitur eſt cylindrus, qui ſecatur eadem ellipſi qua conus datus. quod erat faciendum.



ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς κῶνος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα ἐν αὐτῷ ἔλλειψις ἧς διάμετρος ἡ ΖΕ, ἥτις ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ παράλληλος ἔστω τῇ ΖΔ ἡ ΑΜ συμπίπτουσα τῇ ΒΔ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Μ, καὶ τῶν ΒΜ, ΜΓ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ ΜΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ, καὶ διὰ τῶν Ζ καὶ Ε σημείων τῇ ΑΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΘ, ΚΕΛ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΘΛ παραλληλόγραμμον. ἐὰν δὴ νοήσωμεν κύλινδρον, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΘΚ κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΘΛ, ἔσται καὶ ἐν τῷ κυλίνδρῳ τομὴ ἧς διάμετρός ἐστιν ἡ ΖΕ. ὁμοίως δὲ τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι δειχθήσεται καὶ ἡ δευτέρα διάμετρος ἡ αὐτὴ οὖσα, καὶ πᾶσαι αἱ τεταγμένως ἀγόμεναι· εὕρηται ἄρα κύλινδρος, ὃς τέμνεται τῇ δοθείσῃ ἐλλείψει τοῦ δοθέντος κώνου. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXI. *Probl.*

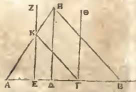
Cylindro dato & in eo ellipſi; invenire conum eadem ellipſi ſectum qua cylindrus ſectus eſt.

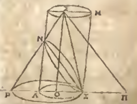
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα'.

Κυλίνδρου δοθέντος καὶ ἐλλείψεως ἐν αὐτῷ εὑρεῖν κῶνον τεμνόμενον τῇ αὐτῇ ἐλλείψει τῷ κυλίνδρῳ.

EXPONATUR ſeorſum recta linea ΑΒ, & in ea ſumatur quodvis punctum Δ, fiatque ut ΑΒ ad ΒΔ ita ΒΔ ad ΒΓ, ut autem

ΕΚΚΕΙΣΘΩ ἔξωθεν εὐθεῖά τις ἡ ΑΒ, καὶ τυχὸν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Δ, καὶ γενέσθω ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ, ὡς δὲ





ΑΒ ad ΒΓ ita ΑΔ ad ΔΕ, & à punctis Ε, Δ, Γ attollantur rectæ lineæ ΕΖ, ΔΗ, ΓΘ, quæ

ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΕ, καὶ ἀπὸ μὲν τῶν Ε, Δ, Γ σημείων τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς [illegible]

πτη γωνίαν, ἐφεστάτωσαν εὐθεῖαι παράλληλοι ἀλλήλαις αἱ ΕΖ, ΔΗ, ΓΘ, διὰ δὲ τοῦ Γ ἤχθω τις εὐθεῖα τέμνουσα τὰς ΕΖ, ΔΗ ἡ ΓΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΚ συμπιπτέτω τῇ ΔΗ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ.

Τούτων οὕτως ἰδίᾳ κατασκευασθέντων, ἔστω ὁ δοθεὶς κύλινδρος, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΛΜ, τῆς δὲ δοθείσης ἐν αὐτῷ ἐλλείψεως διάμετρος ἔστω ἡ ΝΞ, καὶ τετμήσθω ἡ ΛΞ βάσις τοῦ παραλληλογράμμου ὁμοίως τῇ ΕΓ, ἵν᾽ ᾖ ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΓ οὕτως ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΞ· ἔτι γενέσθω ὡς μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΒ οὕτως ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞΠ, ὡς δὲ ἡ ΓΕ πρὸς ΕΑ οὕτως ἡ ΞΛ πρὸς τὴν ΛΡ, καὶ διὰ τοῦ Ο ἤχθω παράλληλος ταῖς τοῦ παραλληλογράμμου πλευραῖς ἡ ΟΣ, ἡ δὲ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΡΝ συμπιπτέτω τῇ ΟΣ κατὰ τὸ Σ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΠ, ΣΞ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΡΠ εὐθεῖα ὁμοίως τῇ ΑΒ τέτμηται, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς μὲν ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΟ οὕτως ἡ ΟΠ πρὸς τὴν ΠΞ, ὡς δὲ ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΞ οὕτως ἡ ΡΟ πρὸς τὴν ΟΛ, τουτέστιν οὕτως ἡ ΡΣ πρὸς τὴν ΣΝ· παράλληλος ἄρα τῇ ΝΞ ἡ ΣΠ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν κῶνον, οὗ βάσις ὁ περὶ διάμετρον ΡΞ κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΣΡΞ, ἔσται καὶ ἐν τῷ κώνῳ τομή, ἧς διάμετρός ἐστιν ἡ ΝΞ. ὁμοίως δὲ τοῖς προδεδειγμένοις δειχθήσεται καὶ ἡ δευτέρα διάμετρος ἡ αὐτὴ οὖσα, καὶ πᾶσαι αἱ τεταγμέναι· τέτμηται ἄρα καὶ ὁ κῶνος τῇ αὐτῇ ἐλλείψει τοῦ δοθέντος κυλίνδρου. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

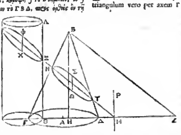
cum ipſa ΑΒ quemlibet angulum contineant: & ſint inter ſeſe parallelæ; deinde per Γ ducatur recta linea ΓΚ ſecans ipſas ΕΖ, ΔΗ; junctaque ΑΚ conveniat cum ΔΗ in puncto Η, & jungatur ΗΒ. *

His igitur ſeorſum in hunc modum præparatis, ſit datus cylindrus cujus parallelogrammum per axem ΛΜ, & datæ in eo ellipſeos diameter ſit ΝΞ; ſeceturque ΛΞ baſis parallelogrammi in eadem ratione, in qua ſecta eſt ΕΓ, ita ut ſit ΕΔ ad ΔΓ ſicut ΛΟ ad ΟΞ: rurſus fiat ut ΕΓ ad ΓΒ ita ΛΞ ad ΞΠ, atque ut ΓΒ ad ΒΑ ita ΞΛ ad ΛΡ; & per Ο ducatur ΟΣ parallela ipſius parallelogrammi lateribus; ductaque ΡΝ conveniat cum ΟΣ in Σ, & jungantur ΣΠ, ΣΞ. quoniam igitur recta linea ΡΠ ſimiliter ſecta eſt atque ipſa ΑΒ; erit ut ΡΠ ad ΠΟ ita ΟΠ ad ΠΞ. ſed & ut ΡΠ ad ΠΞ ita ΡΟ ad ΟΛ, hoc eſt, ita ΡΣ ad ΣΝ: parallela eſt igitur ΣΠ ipſi ΝΞ. quod ſi concipiamus conum, cujus quidem baſis ſit circulus circa diametrum ΡΞ, triangulum vero per axem ΣΡΞ; erit etiam in eo ſectio cujus diameter ΝΞ. eodemque modo quo ſupra, demonſtrabitur & ſecundam diametrum eandem eſſe, omneſque ad diametrum ordinatim applicatas eaſdem: conus igitur ſectus eſt eadem ellipſi qua datus cylindrus. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβʹ.

Κώνου δοθέντος εὑρεῖν κύλινδρον, καὶ τεμεῖν ἀμφοτέρους ἑνὶ ἐπιπέδῳ, διὰ τὸ τὰς τομὰς ποιοῦντι ἐν ἑκατέρῳ ὁμοίας ἐλλείψεις.

ΔΕΔΟΣΘΩ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὸ Α κέντρον κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Β σημεῖον, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΓΒΔ, πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει τοῦ κώνου· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ᾽ ἑκάτερα ἡ ΑΓΕ, ΑΔΖ, καὶ πρὸς τῇ ΔΒ καὶ πρὸς τῷ ἐν αὐτῇ σημείῳ τῷ Β συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΖ γωνία, ἤτοι μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ ΒΓΔ ἢ ἐλάσσων· καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ, τοῦ δὲ ζητουμένου κυλίνδρου βάσις ἔστω ἤτοι ὁ Α κύκλος, ἢ καὶ ἄλλος τις ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ Α κύκλῳ, οὐδὲν γὰρ διοίσει. ἔστω δὴ ὁ περὶ τὴν ΕΘ διάμετρον, καὶ διὰ τῶν Ε, Θ σημείων παράλληλοι τῇ ΒΗ εὐθείᾳ ἤχθωσαν αἱ ΕΚ, ΘΛ· ἐν τῷ



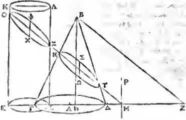
Prop. XXII. *Probl.*

Cono dato invenire cylindrum, & utrumque eodem plano ſecare, ita ut ſectiones faciat in utriſque ellipſes ſimiles.

SIT conus datus, cujus baſis quidem circulus circa centrum Α, vertex punctum Β, triangulum vero per axem ΓΒΔ ad baſim coni rectum; producaturque in utramque partem ΑΓΕ, ΑΔΖ; ac ad rectam lineam ΔΒ & ad punctum Β conſtituatur angulus ΔΒΖ vel major vel minor ipſo ΒΓΔ; atque inter ΓΖ, ΖΔ media proportionalis ſumatur ΖΗ, & jungatur ΒΗ; cylindri autem quæſiti baſis ſit vel circulus Α, vel alius aliquis in eodem plano quo circulus Α exiſtens; nihil enim differt. itaque ſit is circulus circa diametrum ΒΘ; & per puncta Ε, Θ ipſi ΒΗ parallelæ ducantur ΕΚ, ΘΛ: eodem igitur plano ſunt in quo triangulum

* *Hoc loco deſunt nonnulla in hunc ſenſum*: Et per jam oſtenſa, ΓΚ diameter erit ellipſeos, communis nempe ſectionis tam coni cujus baſis eſt circulus diametro ΑΓ ac vertex Η, quam cylindri cujus baſis eſt ΓΕ & planum per axem ΖΕΓΘ; ſive cylindrus rectus fuerit, ſive ſub quolibet angulo ſcalenus.

ΓΒΔ. & quoniam ΒΖ ſecat ΒΗ, ſi producatur, ſecabit etiam omnes, quæ ipſi ΒΗ parallelæ ſunt, in infinitum productas: ac proinde ipſi ΒΖ parallelæ ſecabunt eas quæ rectæ ΒΗ parallelæ ſunt. ducatur igitur ΜΝ ipſi ΒΖ parallela, quæ producta ſecet ΘΛ, ΒΚ in punctis Ξ, Ο; ipſi vero ΕΘ parallela ducatur ΚΛ; & circa diametrum ΚΛ deſcribatur circulus æquidiſtans ei qui eſt circa ΕΘ: concipietur itaque cylindrus, cujus baſes quidem circuli ΕΘ, ΚΛ, parallelogrammum vero per axem ΚΘ, quod ad baſim rectum ſit. ſi igitur per Μ ducatur recta ΜΡ ad rectos angulos ipſi ΓΔΖ, quæque ſit in eodem plano in quo circulus Α; & per rectas ΜΡ, ΜΟ planum ducatur: faciet illud ſectionem in cono quidem ellipſim ΝΣΤ, cujus diameter ΝΤ; in cylindro vero ellipſim ΟΦΞ, cujus diameter ΟΞ: dico ellipſim ΝΣΤ ipſi ΟΦΞ ſimilem eſſe.



Quoniam enim ΟΜ, ΒΖ parallelæ ſunt inter ſe, itemque parallelæ ΕΚ, ΘΛ, ΒΗ, & recta ΕΖ communiter omnes ſecat; erit ut ΜΟ ad ΜΕ, hoc eſt ut ΟΞ ad ΘΕ, ita ΒΖ ad ΖΗ: quare ut quadratum ex ΟΞ ad quadratum ex ΘΕ, ita quadratum ex ΒΖ ad quadratum ex ΖΗ, hoc eſt ad rectangulum ΓΖΔ [per conſtructionem.] ſed ut quadratum ex ΟΞ ad quadratum ex ΘΕ ita quadratum diametri ΟΞ ad quadratum conjugatæ diametri, videlicet ipſius ΦΧ. ut autem quadratum ex ΒΖ ad rectangulum ΓΖΔ ita [per 15. 1. conic.] quadratum diametri ΝΤ ad quadratum conjugatæ diametri ΣΩ: ergo ut quadratum ex ΟΞ ad quadratum ex ΦΧ ita quadratum ex ΝΤ ad quadratum ex ΣΩ; ac propterea ut ΟΞ ad conjugatam ΦΧ ita ΝΤ ad diametrum conjugatam ΣΩ. at vero diametrum ΟΞ ſecare ΦΧ ad rectos angulos, itemque ΝΤ ſimiliter ſecare ΣΩ, manifeſte apparet; quia ipſas ΦΧ, ΩΣ, & inter ſeſe & ipſi ΜΡ parallelas, recta linea ΜΟ ad rectos angulos ſecat: ſectio igitur ΟΦΞ ſimilis eſt ſectioni ΝΣΤ. neutra autem earum eſt circulus, quippe quia ſectio ſubcontraria non ſit; angulus enim ΔΒΖ, videlicet ΒΤΝ, non eſt æqualis angulo ΒΓΔ: quocirca utraque ſectionum ΟΦΞ, ΝΣΤ ellipſis eſt, ſuntque ſimiles inter ſeſe. quod erat faciendum.

αὐτῷ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ ΓΒΔ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΖ τέμνει τὴν ΒΗ, ἡ ΒΖ ἄρα ἐκβαλλομένη πάσας τὰς τῇ ΒΗ παραλλήλους ἐπ᾽ ἄπειρον ἐκβαλλομένας τέμνει· καὶ αἱ παράλληλοι ἄρα τῇ ΒΖ πάσας τὰς τῇ ΒΗ παραλλήλους τεμοῦσιν. ἤχθω τῇ ΒΖ παράλληλος ἡ ΜΝ, καὶ ἐκβληθεῖσα τεμνέτω τὰς ΘΛ, ΕΚ κατὰ τὰ Ξ, Ο σημεῖα, καὶ τῇ ΕΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ περὶ τὴν ΚΛ διάμετρον κύκλος παράλληλος τῷ περὶ τὴν ΕΘ· νοείσθω δὴ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ ΕΘ, ΚΛ κύκλοι, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΚΘ δηλονότι, καὶ αὐτὸ πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει. καὶ ἐὰν διὰ τοῦ Μ τῇ ΓΔΖ πρὸς ὀρθὰς ἀγάγωμεν τὴν ΜΡ, ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαν τῷ Α κύκλῳ, καὶ διὰ τῶν ΜΡ, ΜΟ διεκβάλλωμεν ἐπίπεδον, ποιήσει ἐν μὲν τῷ κώνῳ τὴν ΝΣΤ ἔλλειψιν, ἐν δὲ τῷ κυλίνδρῳ τὴν ΟΦΞ, διάμετροι δὲ τῆς μὲν ἡ ΝΤ, τῆς δὲ ἡ ΟΞ· λέγω δὴ ὅτι ἡ ΝΣΤ ἔλλειψις τῇ ΟΦΞ ἐλλείψει ὁμοία ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΟΜ, ΒΖ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις· ἀλλὰ καὶ αἱ ΕΚ, ΘΛ, ΒΗ παράλληλοι ἀλλήλαις, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ τέμνει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΜΟ πρὸς τὴν ΜΕ, τουτέστιν ὡς ἡ ΟΞ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΟΞ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΟΞ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΟΞ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου, φέρε τῆς ΦΧ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΝΤ διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου, φέρε τῆς ΣΩ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΟΞ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΦΧ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΝΤ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΣΩ· καὶ ὡς ἡ ΟΞ ἄρα πρὸς τὴν ΦΧ συζυγῆ διάμετρον οὕτως καὶ ἡ ΝΤ πρὸς τὴν ΣΩ συζυγῆ διάμετρον. ὅτι δὲ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας τέμνουσιν, ἥτε ΟΞ τὴν ΦΧ, καὶ ἡ ΝΤ τὴν ΣΩ, δῆλον· τὰς γὰρ ΦΧ, ΩΣ, παραλλήλους οὔσας ἀλλήλαις τε καὶ τῇ ΜΡ, ἡ ΜΟ τέμνει· ἡ ἄρα ΟΦΞ τομὴ τῇ ΝΣΤ τομῇ ὁμοία ἐστί. καὶ οὐκ ἔστι κύκλος οὐδετέρα αὐτῶν, διὰ τὸ μὴ ὑπεναντίαν εἶναι τὴν τομήν· τῆς ὑπὸ τῶν ΔΒΖ γωνίας, τουτέστι τῆς ὑπὸ τῶν ΒΤΝ, ἀνίσου οὔσης τῇ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ· ἐλλείψεις ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΟΦΞ, ΝΣΤ τομῶν, καί εἰσιν ὅμοιαι ἀλλήλαις. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XXIII. *Probl.*

Cylindro dato invenire conum, & utroſque eodem plano ſecare, ita ut ſectiones faciat in utriſque ellipſes ſimiles.

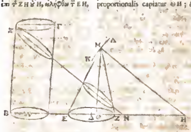
ΠΡΟΤΑΣΙΣ *κγ'.*

Κυλίνδρου δοθέντος εὑρεῖν κῶνον, καὶ τεμεῖν ἀμφοτέρους ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ποιοῦντι διὰ τῆς τομῆς ἐν ἑκατέρῳ ὁμοίας ἐλλείψεις.

ΔΕΔΟ-

Digitized by Google

Δεδόσθω κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ Α κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓ, πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΑ· τοῦ δὲ ζητουμένου κώνου βάσις ἔστω ἤτοι ὁ Α κύκλος, ἢ καὶ ἄλλος τις ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ Α, οἷον ὁ περὶ τὴν ΕΖ διάμετρον, ἐφ' ἧς κέντρον τὸ Δ· καὶ ληφθέντος σημείου τυχόντος ἐπὶ τῆς ΖΗ τοῦ Η, εἰλήφθω τῶν ΕΗ, ΗΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΘΗ, καὶ κέντρῳ τῷ Η, διαστήματι δὲ ἤτοι μείζονι ἢ ἐλάττονι τῆς ΗΘ, γεγράφθω ἐν τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ περιφέρεια κύκλου ἡ ΚΛ, καὶ διὰ τοῦ Θ ταῖς πλευραῖς τοῦ ΒΓ παραλληλογράμμου παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΗ, καὶ τῇ ΜΗ παράλληλος ἤχθω τέμνουσα τό τε τρίγωνον καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ἡ ΝΞ. ἐὰν δὴ διὰ τῆς ΝΞ διάγωμεν ἐπίπεδον, κατὰ τὸν ἀποδειχθέντα τρόπον, ἔσται ἡ τομὴ ὁμοία ἐν ἑκατέρῳ. δεῖξις δὲ ἡ αὐτὴ τῇ πρὸ τούτου. ὅτι δὲ καὶ ἐλλείψεις αἱ τομαὶ, καὶ οὐχὶ κύκλοι, δῆλον· τὸ γὰρ ἀπὸ τῆς ΜΗ ἤτοι μεῖζον κατεσκευάσθη ἢ ἔλαττον τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, τουτέστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ.



SIT cylindrus datus, cujus baſis circulus A; & parallelogrammum per axem BΓ ſuper baſim rectum; & producatur BA; coni vero quæſiti baſis ſit vel circulus A, vel alius aliquis in eodem exiſtens plano, qualis eſt cujus diameter EZ, in qua centrum Δ; & ſumpto quovis puncto H in recta ZH, inter EH, HZ media proportionalis capiatur ΘH; & centro H, intervalloque vel majore vel minore quam ſit HΘ, deſcribatur in plano BΓ circuli circumferentia KΛ, perque Θ ducatur ΘM parallelogrammi BΓ lateribus parallela; & jungantur ME, MZ, MH: dein ducatur NΞ ipſi MH parallela, tam triangulum quam parallelogrammum ſecans. itaque ſi per NΞ, eodem modo quo ante dictum eſt, planum ducatur, ſectio in utroque ſimilis erit. demonſtratio autem eadem eſt quæ ſupra. verum ſectiones ellipſes eſſe, non circulos, perſpicue conſtat; quadratum enim ex MH factum eſt vel majus vel minus quadrato ex HΘ, hoc eſt rectangulo EHZ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδʹ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ κατὰ δύο σημεῖα, τὸ δὲ πρὸς τῷ ἑνὶ πέρατι τῆς εὐθείας τμῆμα μὴ μεῖζον ᾖ τοῦ πρὸς τῷ λοιπῷ πέρατι τμήματος, τῷ δὲ συναμφοτέρῳ τούτῳ μέσου τμήματος καὶ τοῦ λοιποῦ τετραγώνῳ ἴσον παρὰ τὸ μὴ μεῖζον τμῆμα παραβληθῇ χωρίον, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ· ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων μὲν ἔσται τοῦ μέσου τμήματος, ἐλάττων δὲ συναμφοτέρου τούτου μέσου καὶ τοῦ πρὸς τῷ λοιπῷ πέρατι τμήματος.

Prop. XXIV. *Theor.*

Si recta linea ſecetur in duobus punctis, ſegmentum vero quod ad unum rectæ extremum non majus ſit eo quod ad alterum; applicetur autem ad non majus ſegmentum ſpatium æquale quadrato ex ſegmento medio & non minore ſimul ſumpto, excedens figurâ quadratâ: latus exceſſus majus quidem erit medio, minus vero quam medium & quod ad alterum rectæ terminum adjacet ſegmentum ſimul ſumptum.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τετμημένη κατὰ τὰ Γ καὶ Δ, ἡ δὲ ΑΓ τῆς ΔΒ μὴ ἔστω μείζων· λέγω δὴ ὅτι ἐὰν τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ ἴσον χωρίον παρὰ τὴν ΑΓ παραβληθῇ, ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων μὲν ἔσται τῆς ΓΔ, ἐλάττων δὲ τῆς ΓΒ.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ποιείσθω πρῶτον ἡ ΓΔ πλευρὰ εἶναι τοῦ ὑπερβλήματος. ἐπεὶ οὖν τὸ παρὰ τὴν ΑΓ παραβαλλόμενον, ὑπερβάλλον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ, ταὐτόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔΓ· ἔστι δὲ τὸ παρὰ τὴν ΑΓ παραβαλλόμενον, ὑπερβάλλον



SIT recta linea AB, quæ ſecetur in punctis Γ, Δ; & ſit AΓ non major quam ΔB: dico ſi ad AΓ applicetur ſpatium æquale quadrato ex ΓB excedens figurâ quadratâ, latus exceſsûs majus quidem eſſe quam ΓΔ, minus vero quam ΓB.

Si enim fieri poteſt, primum ponatur ΓΔ latus eſſe exceſſus. quoniam igitur id quod ad AΓ applicatur, excedens quadrato ex ΓΔ, idem eſt ac rectangulum AΔΓ, quod quidem æquale eſt quadrato eſt ΓB; erit rectangulum

AΔΓ

ΑΔΓ quadrato ex ΓΒ æquale. ſed quadratum ex ΓΒ non eſt minus quadrato ex ΑΔ; nam cum ΔΒ non ſit minor quam ΑΓ, neque erit ΓΒ minor quam ipſa ΑΔ: rectangulum igitur ΑΔΓ quadrato ex ΑΔ non eſt minus; quod fieri non poteſt. idem abſurdum ſequeretur, ſi latus exceſſus ponatur minus quam ΓΔ. Sed rurſum ſit ΓΒ exceſsûs latus; erit itaque rectangulum ΑΒΓ quadrato ex ΓΒ æquale: quod impoſſibile eſt. idemque ſequeretur, ſi latus exceſsûs ponatur majus ipſa ΓΒ: latus igitur exceſsûs majus erit quam ΓΔ, & minus quam ΓΒ.

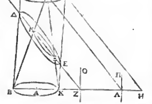


εἴδει τετραγώνῳ, ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ οὐκ ἔλαττον, οὐ γὰρ ἐλάττων ἡ ΔΒ τῆς ΑΓ, οὐδὲ ἡ ΓΒ τῆς ΑΔ· καὶ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ τετραγώνου οὐκ ἔστιν ἔλαττον, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ δὲ αὐτὸ δειχθήσεται, εἰ καὶ ἐλάττων τῆς ΓΔ ὑποτεθεῖσα γένηται ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος. ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος ἡ ΓΒ· ἔσται ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ, ὅπερ ἀδύνατον. τὸ αὐτὸ δὲ συμβήσεται, εἰ καὶ μείζων τῆς ΓΒ ὑποτεθεῖσα γένηται ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος· ἡ ἄρα πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων ἔσται τῆς ΓΔ, ἐλάττων δὲ τῆς ΓΒ·

Prop. XXV. *Theor.*

Dato cylindro ellipſi ſecto; conum conſtituere ſuper eandem baſim quam habet cylindrus, eâdemque altitudine, ita ut eodem plano ſectus ſectionem faciat ellipſin cylindri ellipſi ſimilem.

SIT datus cylindrus, cujus baſis quidem circulus circa centrum Α; parallelogrammum vero per axem ΒΓ; & in eo diameter datæ ellipſeos ſit ΕΔ, quæ producta occurrat ipſi ΒΑ in Ζ: perque Γ ducatur ΓΗ ipſi ΔΖ parallela occurrens rectæ ΒΑ in Η; &, protracta recta linea ΖΔ ad Θ, compleatur parallelogrammum ΗΘ.



Quoniam igitur parallelogrammi ΗΘ, latus ΖΗ lateri ΘΓ eſt æquale, latus autem ΘΓ non eſt minus ipſa ΒΚ; neque igitur ΖΗ ipſa ΒΚ minor erit. ſi igitur ad rectam ΒΚ applicetur ſpatium æquale quadrato ex ΚΗ excedens figurâ quadratâ, latus exceſsûs majus erit quam ΚΖ, & minus quam ΚΗ, per ea quæ proxime demonſtrata ſunt. itaque ſit latus exceſsûs ΚΛ, & per Λ ipſi ΗΓ parallela ducatur ΛΜ; junctiſque ΜΒ, ΜΚ, concipiatur conus, cujus vertex punctum Μ & baſis circulus Α; triangulumque per axem ΒΚΜ. ſi igitur intelligamus conum ſectum eodem plano à quo facta eſt ΕΔ diameter ſectionis cylindri; erit etiam in cono ſectio cujus diameter ΝΞ. & quoniam ad rectam ΒΚ applicatum eſt ſpatium æquale quadrato ex ΚΗ excedens quadrato ex ΚΛ; rectangulum ΒΛΚ quadrato ex ΚΗ æquale erit. & ſunt ΔΒ, ΚΓ inter ſe parallelæ, itemque parallelæ ſunt ΔΖ, ΜΛ, ΓΗ: ut igitur ΔΖ ad ΖΒ ita ΓΗ ad

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κέ.

Κυλίνδρου δοθέντος τετμημένου ἐλλείψει κῶνον συστήσασθαι ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κυλίνδρῳ, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, καὶ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τεμνόμενον, καὶ ποιοῦντα ὁμοίαν ἔλλειψιν τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψει.

ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς κύλινδρος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὸ Α κέντρον κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΒΓ, ἐν ᾧ διάμετρος τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἡ ΕΔ, ἥτις ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ΒΑ κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῇ ΔΖ διὰ τοῦ Γ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ, συμπίπτουσα τῇ ΒΑ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΖΔ ἐπὶ τὸ Θ, συμπεπληρώσθω τὸ ΗΘ παραλληλόγραμμον.

Ἐπεὶ οὖν τοῦ ΗΘ παραλληλογράμμου ἡ ΖΗ πλευρὰ τῇ ΘΓ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ΘΓ τῆς ΒΚ οὐκ ἔστιν ἐλάττων· καὶ ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΒΚ οὐκ ἔστιν ἐλάττων. ἐὰν ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΚΗ τετραγώνῳ ἴσον παραβάλλωμεν παρὰ τὴν ΒΚ ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἡ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος μείζων μὲν ἔσται τῆς ΚΖ, ἐλάττων δὲ τῆς ΚΗ, διὰ τὸ προδειχθέν. ἔστω τοίνυν ἡ ΚΛ πλευρὰ τοῦ ὑπερβλήματος, καὶ διὰ τοῦ Λ παράλληλος ἤχθω τῇ ΗΓ ἡ ΛΜ, καὶ ἐπιζευχθῶσιν αἱ ΜΒ, ΜΚ, καὶ νοείσθω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Μ σημεῖον, βάσις δὲ ὁ Α κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον δηλονότι τὸ ΒΚΜ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν καὶ τὸν κῶνον τετμημένον τῷ ἐπιπέδῳ, ὑφ᾽ οὗ γέγονεν ἡ ΕΔ διάμετρος τῆς τοῦ κυλίνδρου τομῆς· ἔσται καὶ ἐν τῷ κώνῳ τομή, ἧς διάμετρος ἡ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΚΗ τετραγώνῳ ἴσον παρὰ τὴν ΒΚ παραβέβληται, ὑπερβάλλον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΛ, ΛΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΗ τετραγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἐπεὶ οὖν αἱ ΔΒ, ΚΓ παράλληλοι ἀλλήλαις εἰσίν, ἀλλὰ καὶ αἱ ΔΖ, ΜΛ, ΓΗ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις· ὡς ἄρα ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΖΒ οὕτως

ἡ ΓΗ πρὸς τὴν ΗΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΛ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΛ, ΛΚ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΔ τῆς διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου· ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΛ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΛΚ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΝΞ τῆς τοῦ κώνου ἐλλείψεως διαμέτρου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τοῦ κώνου ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου· καὶ ὡς ἄρα ἡ διάμετρος τῆς ἐλλείψεως τοῦ κυλίνδρου πρὸς τὴν συζυγῆ διάμετρον, οὕτως ἡ διάμετρος τῆς τοῦ κώνου ἐλλείψεως πρὸς τὴν συζυγῆ διάμετρον. καί εἰσιν αἱ δεύτεραι διάμετροι πρὸς ἴσας γωνίας ταῖς διαμέτροις, ἀμφότεραι γὰρ παράλληλοί εἰσι ταῖς πρὸς ὀρθὰς τῇ ΒΗ, τῇ ΖΟ καὶ τῇ ΛΠ· ἡ ἄρα τοῦ κώνου ἔλλειψις ὁμοία ἐστὶ τῇ τοῦ κυλίνδρου ἐλλείψει, καὶ γέγονεν ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καὶ συνέστη ὁ κῶνος ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κυλίνδρῳ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἅπερ ἦν τὰ ἐπιταχθέντα.

ΗΚ, & idcirco ut quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΒ ita quadratum ex ΓΗ ad quadratum ex ΗΚ, hoc eſt quadratum ex ΜΛ ad rectangulum ΒΛΚ. ſed ut quadratum ex ΔΖ ad quadratum ex ΖΒ ita quadratum ex ΕΔ ad quadratum ex ΒΚ, hoc eſt quadratum diametri ellipſeos cylindri ΕΔ ad quadratum conjugatæ diametri; & ut quadratum ex ΜΛ ad rectangulum ΒΛΚ, ita quadratum ipſius ΝΞ diametri ellipſeos coni ad conjugatæ diametri quadratum: ergo ut quadratum diametri ellipſeos cylindri ad quadratum conjugatæ diametri ejus, ita quadratum diametri ellipſeos coni ad quadratum conjugatæ diametri ejuſdem: ut igitur diameter ellipſeos cylindri ad conjugatam diametrum ejus, ita ellipſeos coni diameter ad conjugatam ejus diametrum. ſunt autem ſecundæ diametri perpendiculares ad diametros; utraque enim parallelæ ſunt rectis ΖΟ, ΛΠ, quæ ſunt ad rectos angulos ipſi ΒΗ: quocirca coni ellipſis ellipſi cylindri ſimilis erit. & facta eſt ab eodem plano; conſtitutuſque eſt conus ſuper eandem baſin & eâdem altitudine. quæ omnia feciſſe oportebat.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ'.

Τὸν δοθέντα κύλινδρον ἢ κῶνον σκαληνὸν δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τοῦ ἑτέρου μέρους ἀπεριορίστως τεμεῖν δυσὶν ἐπιπέδοις, μὴ παραλλήλοις μὲν κειμένοις, ποιοῦσι δὲ ὁμοίας ἐλλείψεις.

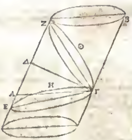
ΕΣΤΩ πρῶτον ὁ δοθεὶς κύλινδρος σκαληνός, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ὂν τῇ βάσει τοῦ κυλίνδρου, καὶ ὑποκείσθω ἡ πρὸς τῷ Α γωνία ὀξεῖα, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ πλευρὰν ἡ ΓΔ· ἐλαχίστη ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ πασῶν τῶν τῶν ΑΔ, ΓΒ παραλλήλους ἐμπιπτουσῶν. εἰλήφθωσαν ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ Δ ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΕΔ, ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΓ, ΓΖ· ἴση ἄρα ἡ ΕΓ τῇ ΖΓ. ἐὰν οὖν, κατὰ τὸν προδεδειγμένον τρόπον, ἀγάγωμεν διὰ τῶν ΓΕ, ΓΖ ἐπίπεδα, τεμεῖ τὸν κύλινδρον. τεμνέτω καὶ ποιείτω τὰς ΕΗΓ, ΖΘΓ ἐλλείψεις· λέγω δὴ ὅτι ὁμοιαί εἰσιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΛ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΛ· ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΛ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἑαυτῇ συζυγοῦς διαμέτρου, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΛΓ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΓ

Prop. XXVI. *Probl.*

Datum cylindrum vel conum ſcalenum poſſumus ex eadem parte infinite ſecare duobus planis, non æquidiſtanter poſitis, quæ ellipſes ſimiles efficiant.

SIT primum datus cylindrus ſcalenus, cujus per axem parallelogrammum ΑΒ rectum ſit ad baſim cylindri; ponaturque angulus ad Α acutus, & per Γ ducatur ΓΔ ad latus ΑΔ perpendicularis: minima igitur eſt ΓΔ omnium quæ inter parallelas ΑΔ, ΓΒ cadunt. ſumantur ex utraque parte puncti Δ rectæ æquales ΕΔ, ΔΖ, & jungantur ΕΓ, ΓΖ: erit igitur ΕΓ ipſi ΓΖ æqualis. ſi igitur per ΓΕ, ΓΖ, juxta prædictum modum, plana ducantur, ſecabunt cylindrum. ſecent itaque & faciant ellipſes ΕΗΓ, ΖΘΓ: dico eas inter ſe ſimiles eſſe.



Quoniam enim ut quadratum ex ΕΓ ad quadratum ex ΓΛ, ita quadratum ex ΖΓ ad quadratum ex ΓΛ; ratio autem quadrati ex ΕΓ ad quadratum ex ΓΛ ratio eſt quadrati ex ΕΓ diametri ſectionis ad quadratum conjugatæ diametri; & ratio quadrati ex ΖΓ ad quadratum ex ΛΓ ratio eſt quadrati diametri ſectionis ΖΓ ad quadratum conjugatæ ipſi diametri: erit ut ΕΓ

diameter ad conjugatam ejus diametrum, ita & diameter ZΓ ad conjugatam ipſi diametrum. ſed & ad æquales angulos ſecantur utræque diametri, ut ſæpius oſtenſum eſt: ergo ſimiles inter ſe ſunt EHΓ, ZΘΓ ellipſes. quod ſi alias ſumpſeris æquales rectas ex utraque parte puncti Δ, rurſus aliæ duæ ellipſes inter ſe ſimiles conſtituentur, idque in infinitum. notandum autem eſt in cylindro ellipſes ex eadem parte ſimiles etiam æquales eſſe; propterea quòd ratio diametrorum ad eandem lineam AΓ neceſſario eadem ſit.

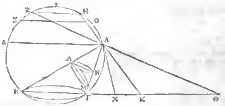
διάμετρος πρὸς τὴν ἑαυτῆς συζυγῆ διάμετρον, οὕτως καὶ ἡ ΖΓ διάμετρος πρὸς τὴν ἑαυτῆς συζυγῆ διάμετρον. ἀλλὰ καὶ πρὸς ἴσας γωνίας τέμνονται ἑκάτεραι αἱ διάμετροι, ὡς ἐδείχθη πολλάκις· ὅμοιαι ἄρα ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ ΕΗΓ, ΖΘΓ ἐλλείψεις. κἂν ἑτέρας δὲ ἀπολάβῃς ἴσας εὐθείας παρ' ἑκάτερα τοῦ Δ, συστήσονται πάλιν ἕτεραι δύο ἐλλείψεις ὅμοιαι ἀλλήλαις, καὶ τοῦτο ἐπ' ἄπειρον. ἐπισημαντέον δὲ ὅτι ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου ἀνάγκη τὰς ἐκ τοῦ αὐτοῦ μέρους ὁμοίας καὶ ἴσας εἶναι, διὰ τὸ λόγον εἶναι τῶν διαμέτρων τὸν αὐτὸν πρὸς τὴν αὐτὴν τὴν ΑΓ.

Prop. XXVII. *Probl.*

SED ſit datus conus ſcalenus, cujus per axem triangulum ABΓ ad baſim coni rectum, ſitque AB major quam AΓ, & circa ipſum circulus deſcribatur; & per A ducatur AΔ parallela ipſi BΓ, quæ circulum ſecabit; deinde, circumferentiâ ΔA bifariam ſectâ in E, ſumatur in ipſâ punctum aliquod Z, & ducatur ZH parallela ipſi ΔA; junctiſque ZA, HA & productis, occurrat ZA quidem rectæ BΓ in Θ, HA vero eidem in K; adeoque ut AK ad KH ita AΘ ad ΘZ. ſed ut AK ad KH ita quadratum ex AK ad rectangulum HKA; & ut AΘ ad ΘZ ita quadratum ex AΘ ad rectangulum AΘZ: ut igitur quadratum ex AK ad rectangulum HKA, hoc eſt [per 36.3.] ad rectangulum BKΓ, ita quadratum ex AΘ ad rectangulum ZΘA, hoc eſt ad rectangulum BΘΓ. itaque ſi ducantur rectæ lineæ parallelæ, AM quidem ipſi AK, AN vero ipſi AΘ, & per ipſas plana conum ſecantia; ſimiles habebuntur ellipſes. Quoniam enim ut quadratum ex AK ad rectangulum BKΓ ita eſt quadratum ex AΘ ad rectangulum BΘΓ; eſt autem quadratum ex AK ad rectangulum BKΓ ſicut quadratum ex AM diametro ellipſeos ad quadratum conjugatæ diametri ejus; & ut quadratum ex AΘ ad rectangulum BΘΓ ita quadratum ex AN diametro ellipſeos ad quadratum diametri ipſi conjugatæ: erit igitur ut diameter AM ad conjugatam ei diametrum ita diameter AN ad diametrum ipſi conjugatam: & idcirco AM, AN ſimilium ellipſium diametri ſunt. quod demonſtrandum erat. At ſi alias rectas ipſi ZH parallelas ducamus, ut ΞO; & à punctis Ξ, O rectas junctas producamus

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ'.

ΕΣΤΩ δὴ νῦν ὁ δοθεὶς κῶνος σκαληνὸς, οὗ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου, καὶ ἔστω ἡ ΑΒ τῆς ΑΓ μείζων, καὶ περιγεγράφθω κύκλος, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΑΔ, δηλονότι τέμνουσα τὸν κύκλον, καὶ τῆς ΔΑ περιφερείας δίχα τμηθείσης κατὰ τὸ Ε εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔΕ περιφερείας τὸ Ζ, καὶ ἤχθω παράλληλος τῇ ΔΑ ἡ ΖΗ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι ἡ μὲν ΖΑ συμπιπτέτω τῇ ΒΓ κατὰ τὸ Θ, ἡ δὲ ΗΑ κατὰ τὸ Κ· ὡς ἄρα ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΗ οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΖ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΘ πρὸς τὴν ΘΖ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΘ, ΘΖ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΘΑ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘ, ΘΓ. ἐὰν οὖν διάγωμεν εὐθείας παραλλήλους τῇ μὲν ΑΚ τὴν ΑΜ, τῇ δὲ ΑΘ τὴν ΑΝ, καὶ δι' αὐτῶν ἀχθέντα ἐπίπεδα τέμῃ τὸν κῶνον, ὁμοίας ἐλλείψεις ποιήσει. ἐπεὶ γὰρ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΘ, ΘΓ· ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΜ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΘ, ΘΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ διάμετρος πρὸς τὴν συζυγῆ διάμετρον οὕτως ἡ ΝΑ διάμετρος πρὸς τὴν συζυγῆ διάμετρον· αἱ ἄρα ΑΜ, ΑΝ ὁμοίων ἐλλείψεων εἰσὶ διάμετροι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. κἂν ἑτέρας δὲ τῇ ΖΗ παραλλήλους ἀγάγωμεν, ὡς τὴν ΞΟ, καὶ ἀπὸ τῶν Ξ καὶ Ο ἐπὶ τὸ Α ἐπιζεύξαντες



ζεύξαντες ἐκβάλλωμεν ἐπὶ τὴν ΒΘ, καὶ τῇ ἐκβληθείσῃ παραλλήλους ἀγάγωμεν ἐν τῷ τριγώνῳ· συστήσονται πάλιν δύο ἐλλείψεις ὅμοιαι ἀλλήλαις, καὶ τοῦτο ἐπ' ἄπειρον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

mus ad occurſum ipſius ΒΘ; ipſiſque parallelas in triangulo ducamus; rurſus duæ aliæ ellipſes inter ſe ſimiles formabuntur; atque hoc in infinitum. id quod erat probandum.

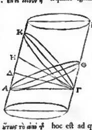
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

Τὸν δοθέντα κύλινδρον σκαληνὸν ἢ κῶνον δυνατόν ἐστιν ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων μερῶν ἀπειραχῶς τεμεῖν δυσὶν ἐπιπέδοις, ἃ ποιεῖ ἐλλείψεις ὁμοίας.

Prop. XXVIII. *Probl.*

Datum cylindrum ſcalenum vel conum poſſumus ex oppoſitis partibus infinite ſecare duobus planis, quæ ellipſes ſimiles faciant.

ΕΣΤΩ πρῶτον ἐπὶ τοῦ κυλίνδρου δεῖξαι, καὶ κείσθω ἡ αὐτὴ καταγραφὴ τῇ πρότερον, καὶ τῇ ΑΔ ἴση ἔστω ἡ ΔΗ· ἴση ἄρα ἡ ΓΑ τῇ ΗΓ. ἐπεὶ πᾶσιν ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΒ ἀγομένη εὐθεῖα μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ΑΓ, ΓΗ, καὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Γ μεταξὺ τῶν Η, Α σημείων πιπτουσῶν· δῆλον ὡς, ἐὰν ἐκ τῶν ἀντικειμένων μερῶν ἀγάγωμεν δύο εὐθείας ἴσας ἀλλήλαις, ἡ ἀπὸ τοῦ Γ ἀγομένη ὑπερπεσεῖται τὸ Η. ἤχθωσαν οὖν ἐκ τῶν ἀντικειμένων μερῶν αἱ ΑΘ, ΓΚ, ἴσαι οὖσαι ἀλλήλαις, δι' ὧν ἐὰν ἀχθῇ ἐπίπεδα ποιοῦντα ἐλλείψεις, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς ἑαυτῇ διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΓ διαμέτρου τῆς ἐλλείψεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τουτέστι πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου· αἱ ἄρα ΚΓ, ΑΘ διάμετροί εἰσιν ὁμοίων ἐλλείψεων.



SIT primum cylindrus, ut in ſuperiori figura; & rectæ ΑΔ æqualis ponatur ΔΗ: æqualis igitur eſt ΑΓ ipſi ΓΗ. & quoniam ea quæ à puncto Α ad ΓΒ ducitur major eſt alterutra ipſarum ΑΓ, ΓΗ, majorque omnibus quæ à Γ puncto inter puncta Α, Η cadunt; manifeſtum eſt, ſi ex oppoſitis partibus ducantur duæ rectæ lineæ inter ſe æquales, ea quæ ducitur à puncto Γ cadet ſupra Η. itaque ducantur ex oppoſitis partibus rectæ ΑΘ, ΓΚ æquales inter ſe, & per ipſas plana ellipſes facientia: erit igitur ut quadratum ex ΘΑ diametro ellipſeos ad quadratum ex ΑΓ, hoc eſt ad quadratum conjugatæ diametri, ita quadratum ex ΚΓ diametro ellipſeos ad quadratum ex ΑΓ, hoc eſt ad quadratum diametri ipſi conjugatæ: ergo ΚΓ, ΑΘ ellipſium ſimilium diametri ſunt.

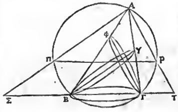
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

ΚΕΙΣΘΩ πάλιν ἡ καταγραφὴ τοῦ κώνου, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΓΒ ἐπὶ θάτερα, δέον ἔστω ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μερῶν ἀγαγεῖν ἐπίπεδα ποιοῦντα ὁμοίας ἐλλείψεις.

Διήχθω τις εἰς τὸν κύκλον εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΒΓ ἡ ΠΡ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΠ, ΑΡ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Σ, Τ σημεῖα· ὡς ἄρα ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΣΠ, οὕτως ἡ ΑΤ πρὸς τὴν ΤΡ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΣ, ΣΠ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΤ, ΤΡ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΤ, ΤΓ. ἐὰν ἄρα ταῖς ΣΑ, ΑΤ παραλλήλους εὐθείας ἀγάγωμεν ἐν τῷ τριγώνῳ, ὡς τὰς ΒΥ, ΓΦ, καὶ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα ποιοῦντα ἐλλείψεις· ἔσονται, διὰ τὰ πολλάκις εἰρημένα, αἱ ΒΥ, ΓΦ εὐθεῖαι ὁμοίων ἐλλείψεων διάμετροι.

Prop. XXIX. *Probl.*

SIT deinde conus, ut ſupra; &, producta ΓΒ, oporteat ab utraque parte ducere plana quæ ellipſes ſimiles faciant.



Ducatur in circulo recta quædam linea ΠΡ, ipſi ΒΓ parallela; & junctæ ΑΠ, ΑΡ ad puncta Σ, Τ producantur: ut igitur ΑΣ ad ΣΠ, ita ΑΤ ad ΤΡ, & ut quadratum ex ΑΣ ad rectangulum ΑΣΠ, hoc eſt ad rectangulum ΓΣΒ, ita quadratum ex ΑΤ ad rectangulum ΑΤΡ, hoc eſt ad rectangulum ΒΤΓ. quare ſi rectas lineas in triangulo duxerimus ipſis ΣΑ, ΑΤ parallelas, ut ΒΤ, ΓΦ; & per eas plana ellipſes facientia: erunt ΒΤ, ΓΦ ſimilium ellipſium diametri, per ea quæ ſuperius demonſtrata ſunt.

Prop.

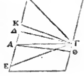
Prop. XXX. *Theor.*

Ex his manifeſtum eſt, conjugationi ſimilium ellipſium, quæ ex eadem parte fit, ſimilem eſſe conjugationem quandam ſimilium ellipſium ex oppoſitis partibus; quippe quæ diametros habeat ex contraria parte diametris reſpondentes.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λ'.

Καὶ φανερὸν ὅτι τῇ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους τῶν ὁμοίων ἐλλείψεων συζυγίᾳ γίνεταί τις ὁμοία ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων μερῶν ὁμοίων ἐλλείψεων συζυγία, ἀντιπεπονθυίας μὲν τινὰς διαμέτρους ἔχουσα ταῖς διαμέτροις.

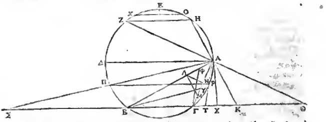
Si enim in cylindri figura fiat ut quadratum ex ΕΓ vel ΓΖ ad quadratum ex ΓΑ, ita quadratum ex ΓΑ ad quadratum ex ΑΘ vel ΓΚ; erit ut quadratum ex alterutra ipſarum ΕΓ, ΓΖ ad quadratum ex ΓΑ, hoc eſt ut quadratum diametri ſimilium ellipſium quæ ex eadem parte fiunt, ad quadratum ſecundæ diametri ipſis conjugatæ, ita quadratum ex ΓΑ ad quadratum ex alterutra ipſarum ΑΘ, ΓΚ, hoc eſt ita quadratum ſecundæ diametri ſimilium ellipſium quæ ex oppoſitis partibus fiunt ad quadratum conjugatæ ipſis diametri: ut igitur unius conjugationis tranſverſa diameter ad ſecundam diametrum, ita alterius conjugationis ſecunda diameter ad diametrum ipſius tranſverſam.



Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου καταγραφῆς κατασκευάσωμεν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἢ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ ἢ τῆς ΓΚ· γενήσεται ὡς τὸ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν ΕΓ, ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῶν ὁμοίων ἐλλείψεων τῶν ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ μέρους γενομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας συζυγοῦς διαμέτρου, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν ΑΘ, ΓΚ, τουτέστιν οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων γενομένων ὁμοίων ἐλλείψεων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου· ὡς ἄρα τῆς ἑκατέρας συζυγίας ἡ διάμετρος πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον οὕτως τῆς ἑτέρας συζυγίας ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον.

In cono autem, ſi rurſus fiat ut ΗΑ ad ΑΚ ita ΑΠ ad ΠΣ: erit ut ΑΚ ad ΚΗ ita ΠΣ ad ΣΑ; hoc eſt ut quadratum ex ΑΚ ad rectangulum ΗΚΑ ita rectangulum ΠΣΑ ad quadratum ex ΑΣ. ſed ut quadratum ex ΑΚ ad rectangulum ΗΚΑ, hoc eſt ad rectangulum ΒΚΓ, ita quadratum diametri duarum ſimilium ellipſium quæ ex eadem parte fiunt, nempe

Ἐπὶ δὲ τοῦ κώνου, ἐὰν πάλιν κατασκευάσωμεν ὡς τὴν ΗΑ πρὸς ΑΚ, οὕτως τὴν ΑΠ πρὸς τὴν ΠΣ· ἔσται ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΗ, οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΣΑ, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΠΣ, ΣΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΚ, ΚΑ, τουτέστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ, ΚΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῶν ἀπὸ



quadratum ex ΑΝ vel ΑΜ, ad quadratum ſecundæ diametri eidem conjugatæ; ut autem rectangulum ΠΣΑ, hoc eſt ΓΣΒ, ad quadratum ex ΣΑ, ita quadratum ſecundæ diametri ſimilium ellipſium quæ ex oppoſitis partibus fiunt ad conjugatæ diametri ΒΥ vel ΓΦ quadratum: ergo ut unius conjugationis diameter ad ſecundam ejus diametrum, ita alterius conjugationis ſecunda diameter ad diametrum ipſam.

τοῦ αὐτοῦ μέρους ὁμοίων δύο ἐλλείψεων, ἤτοι τῆς ΑΝ ἢ τῆς ΑΜ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας συζυγοῦς διαμέτρου· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΠΣ, ΣΑ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΣ, ΣΒ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΣΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας διαμέτρου τῶν ἀπὸ τῶν ἀντικειμένων μερῶν γενομένων ἐλλείψεων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς συζυγοῦς διαμέτρου τῆς ΒΥ ἢ τῆς ΓΦ· ὡς ἄρα τῆς ἑτέρας συζυγίας ἡ διάμετρος πρὸς τὴν δευτέραν διάμετρον, οὕτως τῆς ἑτέρας συζυγίας ἡ δευτέρα διάμετρος πρὸς τὴν διάμετρον.

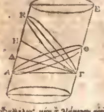
Καὶ

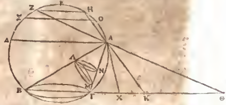
Καὶ γέγονε φανερὸν ἐκ τούτων, ὅτι ἐν παντὶ μὲν κυλίνδρῳ καὶ κώνῳ σκαληνῷ συνίστανται δύο συζυγίαι ἐλλείψεων, ὁμοίων μὲν ἀλλήλαις, ἀντιπεπονθότως δὲ τὰς διαμέτρους ἐχουσῶν, καὶ ὅτι παρὰ τὰς τέσσαρας ταύτας ἄλλη ὁμοία οὐ συνίσταται πλὴν τῶν παραλλήλων αὐταῖς, ἀεὶ γὰρ αἱ παράλληλοι τομαὶ ὁμοίας ποιοῦσιν ἐλλείψεις, ἐὰν ποιῶσι· καὶ ὅτι ἐπὶ μὲν τοῦ κυλίνδρου, ἡ διὰ τῆς Γ Η ἀγομένη τοῦ ἐπιπέδου ὑπεναντία τε ἐστὶ καὶ κύκλον ποιεῖ τὴν τομήν.

Ἐπὶ δὲ τοῦ κώνου, ἐὰν διὰ τοῦ Α τοῦ κύκλου ἐφάπτηταί τις, ὡς ἡ Α Χ, διὰ τὸ εἶναι τὸ ἀπὸ τῆς Α Χ τῷ ὑπὸ Β Χ, Χ Γ ἴσον, ἡ διὰ τῆς τῇ Α Χ παραλλήλου εὐθείας ἐν τῷ τριγώνῳ τοῦ ἐπιπέδου ἀγωγὴ ποιήσει κύκλους, ὑπεναντία γάρ ἐστι καὶ αὐτή, ὡς τῷ προσέχοντι γίνεται καταφανές· καὶ ὅτι τῇ δοθείσῃ ἐλλείψει ἐν κυλίνδρῳ σκαληνῷ καὶ κώνῳ τρεῖς ὁμοίας ἄλλας ἔστιν εὑρεῖν, μίαν μὲν αὐτῇ δοθείσῃ σύζυγον, δύο δὲ ἑαυτῶν μὲν συζύγους, τῶν δὲ λοιπῶν ὁμοίας κατὰ ἀντιπεπονθὸς τῶν διαμέτρων, ὥστε καὶ τῇ δοθείσῃ δυνατὸν τρεῖς ὁμοίας πορίσασθαι. δεῖ δὲ τὴν δοθεῖσαν μήτε ὑπεναντίαν εἶναι, ταύτῃ γὰρ οὐδεμία συνίσταται ὁμοία πλὴν τῶν

Ex quibus apparet, in omni cylindro & cono ſcaleno conſtitui duas conjugationes ellipſium inter ſe ſimilium, quæ ex contraria parte reſpondentes diametros habent, & præter has quatuor nullam aliam conſtitui ſimilem, niſi ipſis æquidiſtantes; etenim ſectiones æquidiſtantes ſimiles ſemper faciunt ellipſes, ſi modo ellipſes faciant: atque in cylindro patet planum juxta rectam Γ H ductum ſectionem facere ſubcontrariam & propterea circulum.

In cono autem, ſi ad punctum A recta circulum contingat, ut A X, & in triangulo ducantur rectæ ipſi A X parallelæ; quoniam quadratum ex A X rectangulo B X Γ eſt æquale, plana per dictas lineas tranſeuntia ſectiones faciunt circulos; etenim hæc ſubcontraria ſectio eſt, quod diligenter intuenti perſpicuum fiet. Præterea datâ ellipſi in cylindro ſcaleno & cono tres aliæ ſimiles inveniri poſſunt, una quidem ipſi datæ conjugata, duæ vero conjugatæ inter ſeſe ac prioribus ſimiles, ſed quæ diametros habeant ex contraria parte diametris reſpondentes. Oportet autem neque datam ſectionem ſubcontrariam eſſe; huic enim nulla





παραλλήλων· μήτε τὴν διάμετρον αὐτῆς παράλληλον εἶναι τῇ διὰ τῶν Ε καὶ Α ἀγομένῃ εὐθείᾳ, ἐν τῇ καταγραφῇ τοῦ κώνου· μονήρης γὰρ καὶ αὐτή, διὰ τὸ τὴν διὰ τοῦ Ε τῇ Α Δ παράλληλον ἀγομένην ἐφάπτεσθαι τοῦ κύκλου καὶ πίπτειν ἐκτός· ὥστε μὴ εἶναι τῷ Ε σημεῖον σύζυγον, ὡς τῷ Ξ τὸ Ο ἢ τῷ Ζ τὸ Η.

Περὶ μὲν οὖν τοῦ προτεθέντος ἡμῖν προβλήματος ἀπὸ πλειόνων ἀρκείτω καὶ τὰ εἰρημένα. ὥρα δ' ἂν εἴη μετελθεῖν ἐφ' ὅπερ ἀρτίως ἐπηγγειλάμεθα· ἀφορμὴ δέ μοι τῆς μελλούσης σκέψεως οὐκ ἄκαιρος, ὅτι δὲ ἥδε. Πείθων ὁ γεωμέτρης, ἐν συγγράμματι ἑαυτοῦ τὰς παραλλήλους ἐξηγούμενος, οἷς μὲν Εὐκλείδης εἶπεν οὐκ ἠρκέσθη, σαφέστερον δὲ δι' ὑποδείγματος αὐτὰς ἐνεφάνισε· φησὶ γὰρ τὰς παραλλήλους εὐθείας εἶναι τοιαύτας οἵας ἐν τοῖς τοίχοις ἢ τῷ ἐδάφει τὰς τῶν κιόνων σκιὰς ὁρῶμεν γινομένας, ὅταν ἀπὸ λαμπάδος τινὸς ἀπ' ἀντικρὺ καιομένης ἢ λύχνου. τοῦτο δὲ εἰ καὶ τοῖς πλείστοις παρέχει καταγελᾶν, ἀλλ' ἡμῖν οὐ καταγελαστόν, αἰδοῖ τοῦ γεγραφότος· φίλος γὰρ ἀνήρ. ἀλλὰ σκεπτέον ὅπως τὸ τοιοῦτον ἔχει μαθηματικῶς· οἰκεία δὲ ἡ σκέψις τοῖς ἐνταῦθα τεθεωρημένοις, δι' αὐτῶν γὰρ ἀποδειχθήσεται τὸ προκείμενον.

ſimilis conſtituitur præter æquidiſtantes: neque ipſius diametrum parallelam eſſe ei quæ per E & A ducitur in figura coni; hæc enim ſolitaria eſt, quia recta per E ducta ipſi A Δ parallela circulum contingit, & cadit extra: nec eſt aliud punctum compar puncto E, quemadmodum eſt O ipſi Ξ & Z ipſi H. *

De propoſito igitur nobis problemate hæc dicta ſufficiant. Tempus eſt ut ad ea aggrediar, quæ modo pollicitus ſum: mihi vero futuræ contemplationis occaſio non intempeſtiva fuit, nempe hæc. *Pitho* geometra, in adverſariis ejus rectas parallelas explicans, non contentus iis quæ ſcripſerat *Euclides*, ſatius duxit eas exemplo declarare: dixit enim lineas parallelas eſſe, quales in parietibus vel pavimento columnarum umbras, à lampade è regione ardente vel lucernâ factas, videmus. quod tametſi omnibus non parvum riſum moverit, mihi tamen ridiculum non videtur, propter meam in auctorem, qui amicus noſter eſt, obſervantiam. ſed videamus quomodo hoc mathematice ſe habeat; talis enim contemplatio hujus loci propria eſt; quippe quòd per ea quæ proxime demonſtrata ſunt propoſitum oſtendi poſſit.

* Sectio hæc, cujus diameter ipſi A E parallela eſt, rationem habet omnium minimam diametri ad latus ejus rectum: ac proinde, ſi proponatur ellipſis, cujus diameter ad latus ejus rectum minorem habet rationem; duæ tantum duci poſſunt rectæ, ſecundum quas deſignata plana ſectiones datæ ſimiles producant.

Prop. XXXI. *Theor.*

Rectæ lineæ, quæ ab eodem puncto cylindricam ſuperficiem ex utraque parte contingunt, in unius parallelogrammi lateribus tactiones faciunt.

SIT cylindrus, cujus baſes circuli A, B, axis recta linea AB; & ſumatur aliquod punctum Γ extra, à quo ducantur ΓΔ, ΓE cylindri ſuperficiem contingentes ex eadem parte in punctis Δ, E: dico omnia puncta tactuum Δ, E in una recta linea axi parallela reperiri.

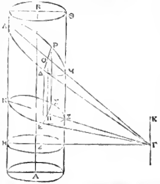
Ducatur enim à puncto Γ ad AB * perpendicularis ΓZ, & per ΓZ ducatur planum æquidiſtans plano circuli A, quod ſectionem faciat in cylindro circulum circa centrum Z; ita ut cylindrus conſtituatur, cujus baſes B, Z circuli, axiſque recta linea BZ: & per ΓZ & axem planum ducatur faciens in cylindro parallelogrammum HΘ; ipſi vero ZΓ ad rectos angulos ducatur ΓK in plano circuli Z, & per ΓK & utramque ipſarum ΓΔ, ΓE plana ducantur cylindrum ſecantia, quæ faciant in ſuperficie quidem cylindri curvas ΛΔM, NEΞ; in plano vero parallelogrammi rectas lineas ΛMΓ, NΞΓ: diametri igitur ſectionum ſunt ΛM, NΞ. ad eas igitur ordinatim applicentur ΔO, EΠ, & ad alteram partem ſuperficiei ad puncta P, Σ producantur. Itaque quoniam recta ΓΔ contingit ſectionem ΛΔMP in puncto Δ; & hujuſmodi cylindri ſectio oſtenſa eſt ellipſis, non circulus; ordinatimque applicata eſt ΔO: erit ut ΛΓ ad ΓM ita ΛO ad OM, id quod demonſtratum eſt ab *Apollonio* in 36ta primi libri Conicorum: & eadem ratione ut NΓ ad ΓΞ ita NΠ ad ΠΞ. eſt autem NH ipſi ΘM parallela; quare ut ΛΓ ad ΓM ita NΓ ad ΓΞ, & propterea ut ΛO ad OM ita NΠ ad ΠΞ: recta igitur puncta Π, O connectens eſt in plano HΘ, & utrique ipſarum BA, ΘM parallela.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λα'.

Αἱ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι, κατ' ἀμφότερα τὰ μέρη, πᾶσαι καθ' ἑνὸς παραλληλογράμμου πλευρῶν τὰς ἐπαφὰς ποιοῦνται.

ΕΣΤΩ κύλινδρος, οὗ βάσεις μὲν οἱ A, B κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ AB εὐθεῖα, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἤχθωσαν αἱ ΓΔ, ΓE εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας, ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, κατὰ τὰ Δ, E σημεῖα· λέγω ὅτι τὰ E, Δ τῶν ἐπαφῶν σημεῖα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἐστί.

Κατήχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὴν AB πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓZ, καὶ διὰ τῆς ΓZ ἤχθω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ τοῦ A κύκλου ἐπιπέδῳ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῷ κυλίνδρῳ τὸν περὶ τὸ Z κύκλον, ὥστε κύλινδρον ὑποστῆναι, οὗ βάσεις οἱ B, Z κύκλοι, ἄξων δὲ ἡ BZ εὐθεῖα, καὶ διὰ τῆς ΓZ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον, ποιοῦν ἐν τῷ κυλίνδρῳ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος παραλληλόγραμμον τὸ HΘ· καὶ τῇ ΓZ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓK ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ οὖσα, καὶ διὰ τῆς ΓK καὶ ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓE διεκβεβλήσθω ἐπίπεδα τέμνοντα τὸν κύλινδρον, καὶ ποιείτω διὰ τῆς τομῆς, ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κυλίνδρου, τὰς ΛΔM, NEΞ γραμμάς, ἐν δὲ τῷ τοῦ παραλληλογράμμου ἐπιπέδῳ, τὰς ΛMΓ, NΞΓ εὐθείας· διάμετροι ἄρα τῶν τομῶν εἰσιν αἱ ΛM, NΞ εὐθεῖαι. κατήχθωσαν τεταγμένως ἐπὶ τὰς ΛM, NΞ διαμέτρους αἱ ΔO, EΠ τεταγμένως, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπὶ θάτερον μέρος τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὰ P καὶ Σ. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται τῆς ΛΔMP γραμμῆς ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Δ, καὶ δέδεικται ἡ τοιαύτη τοῦ κυλίνδρου τομὴ ἔλλειψις οὖσα ἀλλ' οὐ κύκλος, καὶ κατῆκται τεταγμένως ἡ ΔO· ὡς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓM οὕτως ἡ ΛO πρὸς τὴν OM, ὡς δέδεικται τῷ Ἀπολλωνίῳ ἐν τῷ α' τῶν Κωνικῶν τριακοστῷ ἕκτῳ θεωρήματι. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ, ὡς ἡ NΓ πρὸς τὴν ΓΞ οὕτως ἡ NΠ πρὸς τὴν ΠΞ, ἐπεὶ δὲ ἡ NH τῇ ΘM παράλληλός ἐστιν· ὡς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓM οὕτως ἡ NΓ πρὸς τὴν ΓΞ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΛO πρὸς OM οὕτως ἡ NΠ πρὸς ΠΞ· ἡ ἄρα τὰ Π, O σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐν τῷ HΘ ἐπιπέδῳ ἐστὶ, καὶ παράλληλος ἑκατέρᾳ τῶν BA,



* Hæc demonſtratio cylindrum ſupponit rectum; ſed propoſitio non minus vera eſt de ſcaleno, ubicunque ſitum fuerit punctum Γ: nec modo diverſo probabitur, niſi quod angulus BZΓ, jam non ſit neceſſario rectus: oportebit autem planum circuli, cujus centrum Z, tranſire per datum punctum Γ, ita ut baſi A plano æquidiſtet.

ΘM.

Digitized by Google

ΘΜ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΔΟ, ΕΠ τῇ ΓΚ παράλληλός ἐστιν, αἱ ΔΟ, ΕΠ ἄρα καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. ἐὰν δὴ διὰ τῶν ΔΟ, ΕΠ εὐθειῶν ἀχθῇ ἐπίπεδον, τεμεῖ τὸ ΘΗ παραλληλόγραμμον κατὰ τὴν ΟΠ γραμμήν, καὶ ἔσται τὸ ΠΚΔΟ ἐπίπεδον παράλληλον ἐπιπέδῳ τινὶ τῶν διὰ τοῦ ΚΛ ἀγομένων καὶ τεμνόντων τὸ ΗΘ· τὸ ἄρα ΠΕΔΟ ἐπίπεδον τομὴν ποιήσει ἐν τῷ κυλίνδρῳ παραλληλόγραμμον, ὡς ἐδείχθη ἐν θεωρήματι τρίτῳ. καὶ ἔστιν ἡ ΕΔ γραμμὴ κοινὴ τομὴ τοῦ ΠΕΔΟ ἐπιπέδου καὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου ἐπιφανείας· ἡ ΕΔ ἄρα εὐθεῖά ἐστι καὶ πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πασῶν τῶν ἐφαπτομένων· καὶ ὅτι πάλιν ἐπὶ θάτερα μέρη αἱ ἁφαὶ κατὰ τὰ Ρ καὶ Σ γίνονται, καί εἰσιν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου τῇ ΕΔ· πᾶσαι ἄρα αἱ ἐφαπτόμεναι καθ' ἑνὸς παραλληλογράμμου πλευρῶν τὰς ἁφὰς ποιοῦνται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

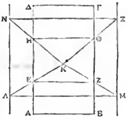
& quoniam ΔΟ, ΕΠ parallelæ ſunt ipſi ΓΚ, etiam inter ſe parallelæ erunt: quare ſi per eas planum ducatur, ſecabit parallelogrammum ΘΗ ſecundum rectam lineam ΟΠ, atque erit planum ΠΚΔΟ æquidiſtans plano alicui eorum quæ per axem ΚΛ ducta ſecant parallelogrammum ΗΘ: planum igitur ΠΕΔΟ ſectionem facit in cylindro parallelogrammum, ut oſtenſum eſt in theoremate tertio; & recta ΕΔ eſt communis ſectio ipſius & ſuperficiei cylindri: quare ΕΔ recta linea eſt & parallelogrammi latus. pari modo etiam in cæteris contingentibus idem demonſtrabitur; ſicutque rurſus tactus ex altera parte in punctis Ρ, Σ, quæ ſunt in una recta ipſi ΒΔ parallelâ: omnes igitur rectæ cylindrum contingentes in unius parallelogrammi lateribus tactiones faciunt. quod demonſtrandum proponebatur.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ'.

Prop. XXXII. *Theor.*

ΤΟΥΤΟΥ δειχθέντος, ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΚΓΔ, καὶ παρὰ τὴν ΑΒ αὐτοῦ βάσιν ἤχθωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Κ, μὴ ὂν ἐν τῷ τοῦ παραλληλογράμμου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ καὶ ἐκβληθεῖσαι προσπιπτέτωσαν ἐπιπέδῳ τινὶ παραλλήλῳ ὄντι τῷ ΑΚΓΔ κατὰ τὰ Λ, Μ, Ν, Ξ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΝ, ΜΞ· λέγω ὅτι ἡ ΜΞ τῇ ΛΝ παράλληλός ἐστι.

HOC demonſtrato, ſit parallelogrammum ΑΒΓΔ, & ejus baſi ΑΒ parallelæ ducantur ΕΖ, ΗΘ; ſumpto autem aliquo puncto Κ non exiſtente in plano parallelogrammi, jungantur ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ, ΚΘ, quæ productæ occurrant plano cuipiam æquidiſtanti ipſi ΑΚΓΔ in punctis Λ, Μ, Ν, Ξ, & jungantur ΛΝ, ΜΞ: dico rectam ΜΞ ipſi ΛΝ parallelam eſſe.



Τὸ γὰρ διὰ τῶν ΚΛ, ΕΖ εὐθειῶν ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον τεμεῖ καὶ τὸ ΛΜΝΞ ἐπίπεδον, καὶ ποιήσει ἐν αὐτῷ κοινὴν τομὴν ΛΜ παράλληλον οὖσαν τῇ ΕΖ· ὁμοίως δὴ καὶ τὸ διὰ τῶν ΚΝ, ΗΘ εὐθειῶν ἐπίπεδον ποιήσει παράλληλον τὴν ΝΞ τῇ ΗΘ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΛΚΝ τρίγωνον τέμνεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓΔ, ΛΜΞΝ, αἱ ἄρα κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις, τουτέστιν ἡ ΝΛ τῇ ΗΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΞΜ τῇ ΘΖ παράλληλος· ὡς ἄρα ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΛ οὕτως ἡ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΝ, καὶ ὡς ἡ ΗΚ πρὸς τὴν ΚΝ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΝΞ. ὡς δὲ ἡ ΕΚ πρὸς ΚΛ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΛΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΛΜ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΝΞ, καὶ ἐναλλάξ. καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῇ ΝΞ. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα καὶ ἡ ΜΞ εὐθεῖα τῇ ΛΝ.

Ἐὰν δὴ τὸ μὲν Κ σημεῖον ὑποθώμεθα εἶναι τὸ φωτίζον, τὸ δὲ ΑΓ παραλληλόγραμμον τὸ ἐπιπροσθοῦν τῶν ἀκτίνων, εἴτε καθ' αὑτὸ ὄν, εἴτε ἐν κυλίνδρῳ· συμβήσεται τὰς ἀπὸ τοῦ Κ φωτίζοντος ἀκτῖνας ἐκβαλλομένας ὁρίζεσθαι τῇ τε ΝΛ καὶ τῇ ΜΞ εὐθείᾳ, καὶ τὸ μεταξὺ τῶν ΝΛ, ΜΞ παραλλήλων ἐσκιασμένον

Planum enim per rectas ΚΛ, ΕΖ ductum ſecabit etiam planum ΛΜΝΞ, & in eo communem ſectionem faciet rectam lineam ΛΜ ipſi ΕΖ parallelam: ſimiliter & planum per ΚΝ, ΗΘ ductum faciet ΝΞ parallelam ipſi ΗΘ. quoniam igitur ΛΚΝ triangulum ab æquidiſtantibus planis ΑΒΓΔ, ΛΜΞΝ ſecatur, communes ipſorum ſectiones ΝΛ, ΗΕ [per 16.11.] inter ſe parallelæ ſunt. & eadem ratione parallelæ ſunt rectæ ΞΜ, ΘΖ: quare ut ΕΚ ad ΚΛ ita ΗΚ ad ΚΝ, & ut ΗΚ ad ΚΝ ita ΗΘ ad ΝΞ. ſed ut ΕΚ ad ΚΛ ita ΕΖ ad ΛΜ; ut igitur ΕΖ ad ΛΜ ita ΗΘ ad ΝΞ, & permutando. eſt autem ΕΖ æqualis ipſi ΗΘ; ergo & ΛΜ ipſi ΝΞ. & ſunt inter ſe parallelæ; recta igitur ΜΞ [per 33.1.] ipſi ΛΝ parallela eſt.

Si igitur ponamus punctum Κ eſſe corpus illuminans, & ΑΓ parallelogrammum quod ejus radiis opponatur, ſive per ſe ſive in cylindro: accidet ut radii, qui ab ipſo Κ producuntur, terminentur rectis lineis ΝΛ, ΜΞ; & quod intra parallelas ΝΛ, ΜΞ continetur umbroſum

ſum ſit. demonſtratum quidem eſt rectam ΔΛ ipſi ΓΒ, & ΝΛ ipſi ΞΜ parallelam eſſe. verum non ita apparebunt; nam intervallorum ΛΜ, ΝΞ quod propius viſui eſt illud majus apparet. hæc autem ex Opticis deſumpſimus. quoniam autem in promptu eſt & de cono ſimile quid comminiſci, propterea quod ellipſis communis ſit & cono & cylindro; ac jam dictum eſt de cylindro: age nunc & de cono dicamus.

ἴσαι. ὅτι μὲν οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΛ τῇ ΓΒ καὶ ἡ ΝΛ τῇ ΞΜ, δέδεικται. οὐ μὴν καὶ οὕτω φανεῖται· τῶν γὰρ ΛΜ, ΝΞ διαστημάτων τὸ ἐγγύτερον τῆς ὄψεως μεῖζον φαίνεται. ταῦτα δὲ παρειλήφαμεν ἐκ τῶν ὀπτικῶν. ἐπειδὴ δὲ παρακείμενόν ἐστι καὶ περὶ τοῦ κώνου θεωρῆσαι τὸ ὅμοιον, διὰ τὸ κοινὴν εἶναι τὴν ἔλλειψιν τοῦ τε κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου, εἴρηται δὲ περὶ τοῦ κυλίνδρου· φέρε καὶ περὶ τοῦ κώνου σκεψώμεθα.

PROP. XXXIII. *Theor.*

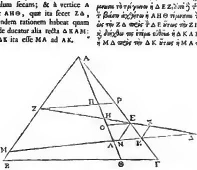
Si extra triangulum punctum aliquod ſumatur, & ab eo ducatur quædam recta linea triangulum ſecans; à vertice autem ad baſim alia recta agatur, quæ ita ductam ſecet, ut quam rationem habet tota ad partem extra triangulum aſſumptam, eandem habeat major portio ejus quæ intra triangulum continetur ad minorem parti exteriori adjacentem: quælibet recta linea, quæ ex eodem puncto ducta triangulum ſecat, ab ea quæ à vertice ad baſim ducitur in eadem proportione ſecatur. quod ſi rectæ ab eo puncto ad triangulum ductæ ſecentur in eadem proportione; recta linea, quæ intra triangulum ipſas ſecat, per trianguli verticem neceſſario tranſibit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγʹ.

Ἐὰν τριγώνου ληφθῇ σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸ τρίγωνον, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθῇ τις ἑτέρα εὐθεῖα τέμνουσα τὴν διαχθεῖσαν οὕτως, ὥστε ἔχειν ὡς ὅλη ἡ διαχθεῖσα πρὸς τὴν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου οὕτως τὸ ἐντὸς ἀπολαμβανόμενον τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλασσον πρὸς τῷ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου κείμενον· ἥτις ἂν ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὸ τρίγωνον, ἀνάλογον τέτμηται ὑπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν εὐθείας. κἂν πᾶσαι αἱ οὕτως ἠγμέναι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ τέμνουσα αὐτὰς εὐθεῖα, ἐν τῷ τριγώνῳ ἀγομένη, διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ τριγώνου ἐλεύσεται.

SUMATUR enim aliquod punctum Δ extra triangulum ΑΒΓ, à quo ducatur recta linea ΔΕΖ triangulum ſecans; & à vertice Α ad baſim ducatur ΑΗΘ, quæ ita ſecet ΖΔ, ut ΖΔ ad ΔΕ eandem rationem habeat quam ΖΗ ad ΗΕ; deinde ducatur alia recta ΔΚΛΜ: dico ut ΜΔ ad ΔΚ ita eſſe ΜΛ ad ΛΚ.

ΤΡΙΓΩΝΟΥ γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ διήχθω εὐθεῖα τέμνουσα τὸ τρίγωνον ἡ ΔΕΖ, ἀπὸ δὲ τῆς Α κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἀχθήτω ἡ ΑΗΘ τέμνουσα τὴν ΖΔ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως τὴν ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, καὶ διήχθω τις ἑτέρα εὐθεῖα ἡ ΔΚΛΜ· λέγω ὅτι ὡς ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ.



Per puncta enim Ε, Κ ducantur rectæ ΕΝ, ΚΞ ipſi ΑΒ parallelæ; & per Ε, Ζ ducantur ΕΟ, ΖΠΡ parallelæ ipſi ΜΔ. quoniam igitur in triangulo ΑΜΚ ducta eſt ΕΝ ipſi ΑΜ parallela, erit ut ΝΕ ad ΕΚ ita ΜΑ ad ΑΚ, hoc eſt ΖΑ ad ΑΡ. rurſus quoniam ΖΑ pa-

Ἤχθωσαν διὰ μὲν τῶν Ε, Κ σημείων τῇ ΑΒ παράλληλοι αἱ ΕΝ, ΚΞ, διὰ δὲ τῶν Ε, Ζ τῇ ΜΔ παράλληλοι αἱ ΕΟ, ΖΠΡ. ἐπεὶ οὖν τοῦ ΑΜΚ τριγώνου παρὰ τὴν ΑΜ πλευράν ἐστιν ἡ ΕΝ· ὡς ἄρα ἡ ΝΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως ἡ ΜΑ πρὸς τὴν ΑΚ, τουτέστιν οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΡ. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΖΑ τῇ

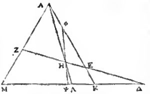
ΚΞ

Digitized by Google

ΚΞ παράλληλός ἐστιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΞ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΖ. ἐπεὶ οὖν ὡς μὲν ἡ ΝΕ πρὸς τὴν ΕΚ οὕτως ἡ ΖΑ πρὸς τὴν ΑΡ, ὡς δὲ ἡ ΕΚ πρὸς τὴν ΚΞ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΖ· δι' ἴσου ἄρα ἐν τεταραγμένῃ ἀναλογίᾳ ὡς ἡ ΕΝ πρὸς τὴν ΚΞ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΡ, τουτέστιν ἡ ΕΟ πρὸς τὴν ΠΡ. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΔΞ λόγῳ, ὁ δὲ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΔΞ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΕΔ καὶ τοῦ τῆς ΕΔ πρὸς ΔΞ· καὶ ὁ τῆς ΜΔ πρὸς ΔΚ λόγος ἄρα σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΕΔ καὶ τοῦ τῆς ΕΔ πρὸς τὴν ΔΞ. ἀλλ' ὁ μὲν τῆς ΖΔ πρὸς τὴν ΕΔ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, διὰ τὴν ὑπόθεσιν, ὁ δὲ τῆς ΕΔ πρὸς τὴν ΔΞ, τουτέστιν ὁ τῆς ΕΝ πρὸς τὴν ΞΚ, ὁ αὐτὸς ἐδείχθη τῷ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ· ὁ ἄρα τῆς ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ λόγου καὶ τοῦ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ. πάλιν ἐπεὶ ὁ τῆς ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΖΠ πρὸς τὴν ΠΡ, ὁ δὲ τῆς ΖΠ πρὸς τὴν ΠΡ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΖΠ πρὸς τὴν ΟΕ λόγου, τουτέστι τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, καὶ τοῦ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ· καὶ ὁ τῆς ΜΛ ἄρα πρὸς τὴν ΛΚ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΗΖ πρὸς τὴν ΗΕ λόγου καὶ τοῦ τῆς ΟΕ πρὸς τὴν ΠΡ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ τῆς ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν συγκείμενος· ὡς ἄρα ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἄλλαι διαχθῶσιν ἀπὸ τοῦ Δ· πᾶσαι γὰρ ὑπὸ τῆς ΑΘ διαιρεθήσονται τὸν εἰρημένον τρόπον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Κἂν αἱ ἀπὸ τοῦ Δ διαχθεῖσαι ἀνάλογον ὦσι τετμημέναι, ἵν' ᾖ ὡς μὲν ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ, ὡς δὲ ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ· ἡ τὰς ἐν τῷ τριγώνῳ ἀπολαμβανομένας εὐθείας, οἷον τὰς ΖΕ, ΜΚ, ἀνάλογον τέμνουσα εὐθεῖα διαγομένη διὰ τῆς κορυφῆς ἥξει τοῦ τριγώνου.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἡκέτω ἐκτὸς κατὰ τὸ Φ σημεῖον, καὶ διήχθω ἡ ΑΗΨ εὐθεῖα. ἐπεὶ οὖν, κατὰ τὸ προδειχθέν, εὐθεῖά τις ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἡ ΑΨ ἀγομένη τέμνει τὴν ΖΔ εὐθεῖαν, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ οὕτως τὴν ΖΗ πρὸς τὴν ΗΕ· καὶ τὴν ΜΔ ἄρα ἀνάλογον τεμεῖ· ὡς ἄρα ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΜΨ πρὸς τὴν ΨΚ, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ ὡς ἡ ΜΔ πρὸς τὴν ΔΚ οὕτως ἡ ΜΛ πρὸς τὴν ΛΚ· ἡ ἄρα ΛΗ ἐκβαλλομένη οὐχ ἥξει δι' ἄλλου σημείου πλὴν τοῦ Α. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδ'.

Αἱ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου κωνικῆς ἐπιφανείας ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι κατ' ἀμφότερα τὰ μέρη, πᾶ-

rallela eſt ipſi ΚΞ; ut igitur ΕΚ ad ΚΞ ita eſt ΕΑ ad ΑΖ; quoniam ideo ut ΝΕ ad ΕΚ ita ΖΑ ad ΑΡ, & ut ΕΚ ad ΚΞ ita ΕΑ ad ΑΖ: erit ex æquali in perturbata ratione, ut ΕΝ ad ΚΞ ita ΕΑ ad ΑΡ, hoc eſt ita ΕΟ ad ΠΡ. quoniam igitur ratio ΜΔ ad ΔΚ eadem eſt quæ ΖΔ ad ΔΞ, ratio autem ΖΔ ad ΔΞ componitur ex ratione ΖΔ ad ΕΔ & ΕΔ ad ΔΞ: erit ratio ΜΔ ad ΔΚ ex eiſdem rationibus compoſita. ſed ratio ΖΔ ad ΕΔ eadem eſt quæ ratio ΖΗ ad ΗΕ, ex hypotheſi; & ratio ΕΔ ad ΔΞ, hoc eſt ΕΝ ad ΞΚ, oſtenſa eſt eadem quæ eſt ΟΕ ad ΠΡ: ergo ratio ΜΔ ad ΔΚ componitur ex ratione ΖΗ ad ΗΕ & ratione ΟΕ ad ΠΡ. rurſus quoniam ratio ΜΛ ad ΛΚ eadem eſt quæ ratio ΖΠ ad ΠΡ, & ratio ΖΠ ad ΠΡ componitur ex ratione ΖΠ ad ΟΕ, hoc eſt ΖΗ ad ΗΕ, & ratione ΟΕ ad ΠΡ: ratio igitur ΜΛ ad ΛΚ compoſita eſt ex ratione ΗΖ ad ΗΕ & ratione ΟΕ ad ΠΡ. ſed ratio ΜΔ ad ΔΚ componitur ex eiſdem rationibus, ut jam oſtenſum eſt: ergo ut ΜΔ ad ΔΚ ita ΜΛ ad ΛΚ. pari modo & de aliis, quæ à puncto Δ ductæ fuerint, demonſtrabitur: omnes enim à recta ΑΘ in eadem, quam diximus, proportione ſecabuntur [Harmonicâ nempe.] quod erat demonſtrandum.

Quod ſi à puncto Δ ductæ lineæ in eadem proportione ſecentur, ita ut quam rationem habet ΖΔ ad ΔΕ eandem habeat ΖΗ ad ΗΕ; & rurſus quam habet ΜΔ ad ΔΚ eandem habeat ΜΛ ad ΛΚ: recta linea, proportionaliter ſecans eas quæ intra triangulum continentur, nempe rectas ΖΕ, ΜΚ, per verticem trianguli neceſſario tranſibit.

Si enim fieri poteſt, tranſeat extra verticem per punctum Φ; & ducatur recta linea ΑΗΨ. quoniam igitur, ex iis quæ proxime demonſtrata ſunt, recta quædam ΑΨ à vertice ducta ſecat ΖΔ, ita ut quam rationem habet ΖΔ ad ΔΕ eandem habeat ΖΗ ad ΗΕ; etiam ipſam ΜΔ in eadem proportione ſecabit: eritque ut ΜΔ ad ΔΚ ita ΜΨ ad ΨΚ, quod eſt abſurdum; poſuimus enim ΜΔ ad ΔΚ ſicut ΜΛ ad ΛΚ: quare ΛΗ producta non tranſibit per aliud punctum quam per verticem trianguli. quod erat demonſtrandum.

Prop. XXXIV. *Theor.*

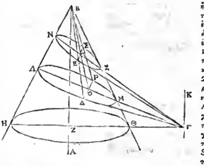
Omnes rectæ lineæ, quæ ab eodem puncto conicam ſuperficiem ex utra-

 que

que parte contingunt, in unius trianguli lateribus tactiones faciunt.

SIT conus, cujus baſis quidem circulus circa centrum Α, vertex punctum Β, axis autem recta linea ΑΒ; & ſumpto aliquo puncto Γ extra conum, ab eo ducantur ΓΔ, ΓΕ rectæ lineæ, conicam ſuperficiem ex eadem parte contingentes: dico omnia puncta tactionum Ε, Δ in eadem recta linea eſſe.

Ducatur à puncto Γ ad ΑΒ * perpendicularis ΓΖ; & per ΓΖ ducatur planum æquidiſtans plano circuli Α, quod ſectionem in cono faciat circulum circa centrum Ζ, ita ut conus conſtituatur, cujus baſis circulus Ζ, & axis ΖΒ. rurſus per ΓΖ & axem aliud planum ducatur, faciens in cono triangulum ΒΗΘ; & ipſi ΓΖ ad rectos angulos agatur ΓΚ, quæ in circuli Ζ plano exiſtat; deinde per ΓΚ & utramque ipſarum ΓΔ, ΓΕ ducantur plana conum ſecantia, quæ faciant in coni quidem ſuperficie ſectiones ΛΔΜ, ΝΕΞ, in plano autem trianguli ΒΗΘ rectas lineas ΛΓ, ΝΓ: diametri igitur ſectionum ΛΔΜ, ΝΕΞ ſunt rectæ ΛΜ, ΝΞ. itaque ad diametros ΛΜ, ΝΞ ordinatim applicentur ΔΟ, ΕΠ; quæ ad alteram partem ſuperficiei ad puncta Ρ, Σ producantur. quoniam igitur recta linea ΓΔ contingit ſectionem ΛΔΜ in puncto Δ, & ΔΟ ordinatim applicata eſt; erit [per 36. 1.] ut ΛΓ ad ΓΜ ita ΛΟ ad ΟΜ. eadem quoque ratione ut ΝΓ ad ΓΞ ita erit ΝΠ ad ΠΞ: ergo, per proxime demonſtrata, recta linea quæ connectit puncta Ο, Π, ſi producatur, per verticem tranſibit. ducatur igitur ΟΠΒ. & quoniam ΕΣ, ΔΡ ipſi ΓΚ ſunt parallelæ; etiam inter ſe parallelæ & in eodem plano erunt: itaque planum juxta rectas ΒΠΟ & ΕΣ, ΔΡ ductum ſectionem faciet in coni ſuperficie triangulum: adeoque puncta Ε, Δ, quæ ſunt in ſuperficie coni, erunt etiam in latere trianguli ſecantis triangulum ΒΗΘ ſecundum rectam lineam ΒΠΟ. ſimili modo demonſtrabitur idem evenire in quibuſvis aliis, uti & in contingentibus ad puncta Ρ, Σ. omnes igitur rectæ lineæ, quæ à puncto Γ ductæ conicam



σαι καθ' ἑνὸς τριγώνου πλευρῶν τὰς ἐπαφὰς ποιοῦνται.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ περὶ τὸ Α κέντρον κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Β σημεῖον, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, σημείου δέ τινος τοῦ Γ ληφθέντος ἐκτὸς τοῦ κώνου, ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Γ αἱ ΓΔ, ΓΕ εὐθεῖαι, ἐφαπτόμεναι τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι τὰ Ε, Δ σημεῖα τῶν ἐπαφῶν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ἐστί.

Κατήχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐπὶ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΖ, καὶ διὰ τῆς ΓΖ ἤχθω ἐπίπεδον παράλληλον τῷ τοῦ Α κύκλου ἐπιπέδῳ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῷ κώνῳ τὸν περὶ τὸ Ζ κέντρον κύκλον, ὥστε κῶνον ὑποστῆναι, οὗ βάσις μὲν ὁ Ζ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΖΒ· καὶ διὰ τῆς ΓΖ καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον ποιοῦν ἐν τῷ κώνῳ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΒΗΘ, καὶ τῇ ΓΖ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΚ, ἐν τῷ τοῦ Ζ κύκλου ἐπιπέδῳ οὖσα· καὶ διὰ τῆς ΓΚ καὶ ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ ἤχθω ἐπίπεδα τέμνοντα τὸν κῶνον, καὶ ποιείτω διὰ τῆς τομῆς, ἐν μὲν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὰς ΛΔΜ, ΝΕΞ γραμμάς, ἐν δὲ τῷ τοῦ ΒΗΘ τριγώνου ἐπιπέδῳ τὰς ΛΓ, ΝΓ εὐθείας· διάμετροι ἄρα τῶν ΛΔΜ, ΝΕΞ τομῶν εἰσιν αἱ ΛΜ, ΝΞ εὐθεῖαι. ἤχθωσαν τοίνυν ἐπὶ τὰς ΛΜ, ΝΞ διαμέτρους αἱ ΔΟ, ΕΠ τεταγμέναι, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπὶ θάτερον μέρος τῆς ἐπιφανείας κατὰ τὰ Ρ καὶ Σ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ εὐθεῖα τῆς ΛΔΜ γραμμῆς ἐφάπτεται κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κατῆκται τεταγμένως ἡ ΔΟ· ὡς ἄρα ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΜ οὕτως ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΜ· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ὡς ἡ ΝΓ πρὸς τὴν ΓΞ οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς τὴν ΠΞ· ἡ ἄρα τὰ Ο καὶ Π ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἥξει διὰ τῆς κορυφῆς, διὰ τὸ πρὸ τούτου. διήχθω τοίνυν ἡ ΟΠΒ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΕΣ, ΔΡ τῇ ΓΚ ἐστὶ παράλληλος· αἱ ἄρα ΔΡ, ΕΣ παράλληλοί τε εἰσὶν ἀλλήλαις καὶ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. τὸ οὖν διὰ τῆς ΒΠΟ καὶ τῶν ΕΣ, ΔΡ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον τὴν τομὴν ποιήσει τρίγωνον ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ· τὰ ἄρα Ε καὶ Δ σημεῖα, ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ὄντα τοῦ κώνου, ἐπὶ πλευρᾶς ἐστι τριγώνου τοῦ τέμνοντος τὸ ΒΗΘ τρίγωνον κατὰ τὴν ΒΠΟ εὐθεῖαν. ὁμοίως δείκνυται ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων πασῶν, καὶ ἐπὶ τῶν κατὰ τὰ Ρ καὶ Σ ἐφαπτομένων, τὸ αὐτὸ συμβαῖνον· πᾶσαι ἄρα αἱ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτόμεναι τῆς κω-

* Supponit hic conum rectum eſſe, ſed eâdem fere demonſtratione res in cono ſcaleno comprobari poteſt, uti diximus in nota ad vigeſimam nonam propoſitionem de Cylindro.

νικῆς

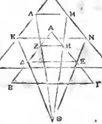
κωνικῆς ἐπιφανείας καθ' ἑνὸς τριγώνου πλευρῶν ἅπτονται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ſuperficiem contingunt, in unius trianguli lateribus tactus faciunt. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε'.

ΤΟΥΤΟΥ δὴ δειχθέντος, ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ παρὰ τὴν ΒΓ βάσιν αἱ ΔΕ, ΖΗ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Θ, μὴ ὂν ἐν τῷ τοῦ τριγώνου ἐπιπέδῳ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΘΔ, ΘΖ, ΘΗ, ΘΕ ἐκβληθεῖσαι προσπιπτέτωσαν ἐπιπέδῳ τινὶ, παραλλήλῳ ὄντι τῷ ΑΒΓ ἐπιπέδῳ, κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν σημεῖα· τὸ δὴ διὰ τῶν ΕΔ, ΚΘ εὐθειῶν ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον τεμεῖ τὸ ΚΛΜΝ ἐπίπεδον, καὶ ποιήσει ἐν αὐτῷ κοινὴν τομὴν τὴν ΚΝ εὐθεῖαν, παράλληλον οὖσαν τῇ ΕΔ. ὁμοίως δὴ καὶ τὸ διὰ τῶν ΖΗ, ΛΘ ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον ποιήσει παράλληλον τῇ ΖΗ τὴν ΛΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ΚΘΛ ἐπίπεδον τέμνεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ, ΚΛΜΝ, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΚΛ, ΔΖ παράλληλοί εἰσιν ἀλλήλαις. διὰ ταῦτα δὲ καὶ ἡ ΝΜ τῇ ΗΕ παράλληλός ἐστιν· ἐκβληθεῖσαι ἄρα αἱ ΚΛ, ΜΝ συμπεσοῦνται κατὰ τὸ Ξ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΚΞ, ΞΝ δυσὶ ταῖς ΔΑ, ΑΕ παράλληλοί εἰσιν· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τὸ Ξ γωνία τῇ πρὸς τὸ Α. πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ΞΚ, ΚΝ δυσὶ ταῖς ΑΔ, ΔΕ παράλληλοί εἰσιν· ἡ ἄρα ὑπὸ τῶν ΞΚ, ΚΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ ἴση· τὰ ἄρα ΞΚΝ, ΑΒΓ τρίγωνα ὅμοιά ἐστιν ἀλλήλοις.

Ἐὰν οὖν πάλιν τὸ μὲν Θ σημεῖον ὑποθώμεθα τὸ φωτίζον εἶναι, τὸ δὲ ΑΒΓ τρίγωνον τὸ ἐπιπροσθοῦν ταῖς ἀκτῖσιν, εἴτε καθ' αὑτὸ ὂν τὸ τρίγωνον εἴτε ἐν κώνῳ, συμβήσεται τὰς ἀπὸ τοῦ Θ φερομένας ἀκτῖνας, ἐκπιπτούσας διὰ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ποιεῖν τὸ ΚΝΞ τρίγωνον τῆς σκιᾶς, ὅμοιον ὂν τῷ ΑΒΓ. ταῦτα εἰ καὶ ὀπτικῆς θεωρίας ἔχεται, καὶ δοκεῖ διὰ τοῦτο τῆς παρούσης πραγματείας ἀλλότρια εἶναι· ἀλλ' οὖν ἐκεῖνό γε φανερὸν γέγονεν, ὅτι, ἄνευ τῶν περὶ τῆς τοῦ κυλίνδρου καὶ τῆς τοῦ κώνου τομῆς ἐνταῦθα δειχθέντων, τῆς ἐλλείψεως λέγω καὶ τῶν ἐφαπτομένων αὐτῆς εὐθειῶν, ἀδύνατον ἦν κατεργάσασθαι τὸ τοιοῦτον πρόβλημα. ὥστε οὐκ ἀλόγως, ἀλλὰ διὰ τὴν χρείαν, ἐπεισῆλθεν ὁ περὶ τούτων λόγος.



Prop. XXXV. *Theor.*

HOC igitur demonſtrato, ſit triangulum ΑΒΓ, cujus baſi ΒΓ parallelæ ducantur ΔΕ, ΖΗ; & ſumpto aliquo puncto Θ, quod non ſit in trianguli plano, jungantur ΘΔ, ΘΖ, ΘΗ, ΘΕ; quæ productæ occurrant plano alicui, quod plano ΑΒΓ æquidiſtet, in punctis Κ, Λ, Μ, Ν: planum igitur per rectas ΕΔ, ΚΘ ductum ſecabit etiam planum ΚΛΜΝ, & in eo communem ſectionem faciet rectam lineam ΚΝ ipſi ΔΕ parallelam. eodem modo & planum ductum per ipſas ΖΗ, ΛΘ faciet rectam lineam ΛΜ parallelam ipſi ΖΗ. quoniam igitur planum ΚΘΛ æquidiſtantibus planis ΑΒΓ, ΚΛΜΝ ſecatur, communes ipſorum ſectiones ΚΛ, ΔΖ parallelæ erunt. eadem ratione parallelæ ſunt rectæ ΜΝ, ΗΕ: ergo ΚΛ, ΜΝ productæ convenient inter ſe. conveniant in Ξ; & cum duæ rectæ ΚΞ, ΞΝ duabus ΔΑ, ΑΕ parallelæ ſint; erit angulus ad Ξ angulo ad Α æqualis. rurſus cum duæ ΞΚ, ΚΝ duabus ΑΔ, ΔΕ parallelæ ſunt, erit angulus ΞΚΝ angulo ΑΔΕ æqualis; triangula igitur ΞΚΝ, ΑΒΓ inter ſe ſimilia erunt.

Quod ſi punctum Θ fingamus eſſe corpus illuminans, & triangulum ΑΒΓ ejus radiis oppoſitum, ſive per ſe ſive in cono, eveniet ut radii, qui ab ipſo Θ emittuntur juxta triangulum ΑΒΓ, faciant triangulum umbræ ΚΝΞ ipſi ΑΒΓ ſimile. etſi enim hæc ad Opticam contemplationem pertineant, & ob id à propoſita tractatione aliena videantur, tamen perſpicue conſtat, abſque iis quæ hoc loco de coni & cylindri ſectione, hoc eſt de ellipſi & rectis lineis eam contingentibus, demonſtrata ſunt, problema hujuſmodi abſolvi non poſſe: quare non temere, ſed neceſſario de his ſermonem inſtituimus.

ΣΕΡΗ-

ΣΕΡΗΝΟΥ ΑΝΤΙΝΣΕΩΣ ΦΙΛΟΣΟΦΟΥ ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΥ ΤΟΜΗΣ.

SERENI ANTISSENSIS PHILOSOPHI DE SECTIONE CONI LIBER.

CUM ea ſectio, præſtantiſſime *Cyre*, quæ in Conis per verticem fit, in eorum quidem ſuperficiebus triangula efficiat, variamque & perpulchram præbeat contemplationem; à nullo autem eorum qui nos præceſſerunt, quod ſciam, pertractata ſit: non malè me facturum exiſtimavi, ſi locum hunc inexplicatum non relinquerem, ſed perſcriberem de his quæcunque ipſe cogitatione complectebar. Propemodum quidem hæc omnia, quæque profundiore geometriâ indigere videntur, me hoc libro comprehendiſſe arbitror: neque mirum alicui videri debeat, ſi nonnulla quæ dici debuerant prætermiſerim, utpote qui primus ad hanc contemplationem ſim aggreſſus. Quamobrem par eſt, ut vel tu, in eorundem ſtudium incumbens, vel poſteriorum aliquis, qui in hæc inciderit, noſtro exemplo ductus, à nobis omiſſa ſupplenda curaret. Quædam autem ſunt quæ conſultò prætererim, vel quod manifeſta eſſent, vel quod ab aliis tractata. Siquidem in omni cono ſectionem triangulum eſſe, ſi per

ΤΗΣ ἐν τοῖς κώνοις τομῆς, ἄριστε Κῦρε, ὅταν διὰ τῆς κορυφῆς αὐτῶν γίνηται, τρίγωνα μὲν ὑφισταμένης ἐν τοῖς κώνοις, ποικίλην δὲ καὶ γλαφυρὰν θεωρίαν ἐχούσης, καὶ μηδενὶ τῶν πρὸ ἡμῶν, ὅσα γε μὲ εἰδέναι, πραγματευθείσης· ἔδοξέ μοι μὴ καλῶς ἔχειν ἀνεξέργαστον ἀφεῖναι τὸν τόπον τοῦτον, εἰπεῖν δὲ περὶ αὐτοῦ ὅσα γε εἰς ἐμὴν ἀφῖκται κατάληψιν. σχεδὸν μὲν οὖν τάγε πλείω, καὶ βαθυτέρας δοκοῦντα δεῖσθαι γεωμετρίας, ἡγοῦμαι λόγου τετυχηκέναι παρ' ἡμῶν. οὐκ ἂν δὲ θαυμάσαιτό τις, εἰ καί τι τῶν ὀφειλόντων λεχθῆναι παρεῖται ὀφθείη, ἅτε πρῶτος ἐγχειρήσας τῇ τοιαύτῃ θεωρίᾳ. ὥστε εἰκὸς ἢ σὲ χρησάμενον εἰς τὴν αὐτὴν σκέψιν, ἢ τῶν ὕστερον ἐντευξομένων τινὰ, ὁρμώμενον ἐνθένδε, τὸ παροφθὲν ἡμῖν προσθεῖναι. ἔστι δὲ ἃ καὶ ἑκόντες παραλελοίπαμεν, ἢ διὰ τὸ σαφὲς, ἢ διὰ τὸ ἄλλοις δεδεῖχθαι. αὐτίκα τὸ μὲν ἐν παντὶ κώνῳ τρίγωνον εἶναι τὴν τομὴν, εἰ διὰ τῆς κορυφῆς τμηθείη,

τμηθείη, διὰ τὸ δεδεῖχθαι ἄλλοις ὡς οὕτως ἔχει, ἡμεῖς παρελιμπάνομεν, ἵνα μηδὲν ἀλλότριον τοῖς ὑφ' ἡμῶν εὑρεθεῖσι συντεταγμένον ᾖ. τὰ δ' ἐπιπολαιότερα καὶ τοῖς πολλοῖς εὔληπτα γράφειν οὐκ ἠξιώσαμεν, ἵνα μὴ τῶν ἐντυγχανόντων τὴν προσοχὴν τῆς διανοίας ἐκλύσωμεν. ἰτέον δὴ ἐπὶ τὴν προκειμένην ἀπόδειξιν.

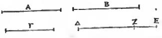
verticem ſecetur, cum ab aliis demonſtratum ſit, nos omiſimus, ne aliena noſtris inventis insererentur. Quæ vero magis obvia ſunt, & facillime intelligi poſſunt, non exiſtimavi me ſcribere oportere, ne legentium animos parum attentos redderem. igitur ad rem propoſitam accedamus.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ α'.

Ἐὰν τεσσάρων εὐθειῶν ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην· τὸ ὑπὸ πρώτης καὶ τετάρτης μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ δευτέρας καὶ τρίτης.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν ΔΕ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α, ΔΕ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν Β, Γ.

Ἐπεὶ ἡ Α πρὸς Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν ΔΕ, ἔστω ὡς ἡ Α πρὸς Β οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΔΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, ΔΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπὸ Α, ΔΕ τοῦ ὑπὸ Α, ΔΖ· καὶ τοῦ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ὑπὸ Α, ΔΕ.



Prop. I. *Theor.*

Si prima quatuor rectarum ad ſecundam majorem rationem habeat quam tertia ad quartam: rectangulum contentum ſub prima & quarta majus eſt eo quod ſub ſecunda & tertia continetur.

HABBAT recta A ad rectum B majorem rationem quam Γ ad ΔE: dico rectangulum ſub A & ΔE rectangulo ſub B & Γ majus eſſe.

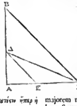
Quoniam enim A ad B majorem rationem habet quam Γ ad ΔE; fiat ut A ad B ita Γ ad ΔZ: rectangulum igitur ſub A & ΔZ æquale rectangulo ſub B & Γ. majus autem eſt quod fit ſub A & ΔE eo quod ſub A & ΔZ; ergo rectangulum ſub A & ΔE rectangulo ſub B & Γ majus erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ β'.

Ἐὰν τριγώνου ὀρθογωνίου ἀπὸ τῆς ἑτέρας τῶν γωνιῶν ἐπὶ μίαν τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν ἀχθῇ εὐθεῖα· ἡ ἀχθεῖσα πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ καθέτῳ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ἐξ ἀρχῆς ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν πρὸς τὴν τμηθεῖσαν πλευρὰν ὑπὸ τῆς ἀχθείσης.

Τριγώνου γὰρ ὀρθογωνίου τοῦ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχοντος τὴν Α γωνίαν, ἀπὸ μιᾶς τῶν γωνιῶν τῆς Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἤχθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ πρὸς ΔΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ.

Ἤχθω παρὰ τὴν ΓΒ ἡ ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ, ἀμβλεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΓ· μείζων ἄρα ἡ ΔΓ τῆς ΔΕ· ἡ ἄρα ΓΔ πρὸς ΔΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΑ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ.



Prop. II. *Theor.*

Si in triangulo orthogonio ab altero angulorum ad unum latus quod eſt circa angulum rectum recta ducatur: ducta illa habebit ad eam quæ inter ipſam & perpendicularem interjicitur majorem rationem, quam quæ à principio ſubtenditur recto angulo ad jam dictum latus.

SIT triangulum orthogonium ABΓ, rectum habens angulum ad A; & ab uno angulorum, videlicet à Γ, ad AB ducatur recta ΓΔ: dico ΓΔ ad ΔA majorem rationem habere quam ΓB ad BA.

Ducatur enim recta ΔE ipſi ΓB parallela. & quoniam rectus eſt angulus ΔAΓ, angulus ΔEΓ obtuſus erit: major igitur eſt ΔΓ quam ΔE; & idcirco ΓΔ ad ΔA majorem rationem habet quam EΔ ad ΔA, hoc eſt quam ΓB ad BA.

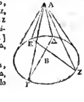
ΠΡΟΤΑΣΙΣ γ'.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τμηθῇ, τὰ γινόμενα ἐν ταῖς τομαῖς τρίγωνα τὰς ἴσας ἔχοντα βάσεις ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

Prop. III. *Theor.*

Si conus rectus planis per verticem ſecetur; triangula illa, quæ in ſectionibus fiunt & æquales habent baſes, inter ſe æqualia erunt.

SIT conus rectus, cujus vertex punctum A, & baſis circulus circa centrum B. cono itaque planis per verticem ſecto, generentur triangula ΑΓΔ, ΑΕΖ, æquales baſes habentia ΓΔ, ΕΖ (triangula enim ex his ſectionibus fieri alibi [per 3. 1. conic.] oſtenſum eſt.) dico triangula ΑΓΔ, ΑΒΖ æqualia eſſe.



Nam cum baſes ſint æquales, itemque æquales inter ſe ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ; erit triangulum triangulo quoque æquale.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος· τοῦ δὲ κώνου διὰ τῆς κορυφῆς τμηθέντος ἐπιπέδοις, γενήσθω τὰ ὑπὸ τῆς τομῆς γινόμενα τρίγωνα. (ὅτι γὰρ τρίγωνα ποιοῦσιν αἱ τοιαῦται τομαὶ ἐν ἄλλοις δέδεικται) γενήσθω δὴ τὰ ΑΓΔ, ΑΕΖ, ἴσας ἔχοντα τὰς ΓΔ, ΕΖ βάσεις· λέγω ὅτι τὰ ΑΓΔ ΑΕΖ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ αἵ τε βάσεις ἴσαι ἀλλήλαις, ἴσαι δὲ καὶ αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ· καὶ τὸ τρίγωνον ἄρα τῷ τριγώνῳ ἴσον.

Prop. IV. *Theor.*

In conis rectis ſimilia triangula inter ſe æqualia ſunt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ δ′.

Ἐν τοῖς ὀρθοῖς κώνοις τὰ ὅμοια τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

SIT enim in propoſita figura ΑΓΔ triangulum triangulo ΑΕΖ ſimile: dico & æquale eſſe. quoniam enim ut ΑΓ ad ΓΔ ita ΑΕ ad ΕΖ; erit permutando ut ΓΑ ad ΑΕ ita ΓΔ ad ΕΖ. & ſunt ΓΑ, ΑΕ æquales; ergo & æquales ſunt ΓΔ, ΕΖ. triangula vero æqualium baſium, quæ in conis rectis fiunt, inter ſe [per 3. huj.] ſunt æqualia: ergo & triangula ΑΓΔ, ΑΕΖ æqualia erunt.

ΕΣΤΩ γὰρ ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΑΕΖ ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ ἴσον ἐστίν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΔ οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐναλλὰξ ἄρα. καί εἰσιν ἴσαι αἱ ΓΑ, ΑΕ· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΔ, ΕΖ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων τρίγωνα ἐν τοῖς ὀρθοῖς κώνοις ἴσα ἐστίν· ἴσα ἄρα τὰ ΑΓΔ, ΑΕΖ τρίγωνα.

Prop. V. *Theor.*

Si conus rectus planis per verticem ſecetur, & per axem & extra axem; ſitque axis non minor ſemidiametro baſis: eorum quæ fiunt triangulorum maximum eſt illud quod per axem tranſit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ε′.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς ἐπιπέδοις τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, τῷ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῖς δὲ ἐκτὸς τοῦ ἄξονος, ὁ δὲ ἄξων τοῦ κώνου μὴ ἐλάττων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· τῶν γινομένων ἐν τῷ κώνῳ τριγώνων μέγιστον ἔσται τὸ διὰ τοῦ ἄξονος.

SIT conus, cujus vertex A, baſis circulus circa B centrum, & axis AB; cono itaque per verticem ſecto, fiant triangula, per axem quidem ΑΓΔ, extra axem vero ΑΕΖ; ponaturque ΕΖ ipſi ΓΔ parallela; axis autem AB non minor ſit ipſa ΒΓ: dico ΑΓΔ triangulum triangulo ΑΕΖ majus eſſe.



Jungatur BE, & ab ipſo B ad ΕΖ perpendicularis ducatur BH: ergo [per 3. 3.] ΕΖ bifariam dividetur in H; & juncta AH perpendicularis erit ad ΕΖ; triangulum enim ΒΑΖ æquicrure eſt. quoniam igitur AB non eſt minor ſemidiametro BE, & eſt BH minor quam BE; erit AB ipſa BH major. itaque abſcindatur ΒΘ æqualis ipſi EH, & jungatur ΗΘ: quoniam igitur EH ipſi ΒΘ eſt æqualis, communis autem eſt BH; ergo

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ· τμηθέντος δὲ τοῦ κώνου διὰ τῆς κορυφῆς, γενήσθω τρίγωνα, διὰ μὲν τοῦ ἄξονος τὸ ΑΓΔ, ἐκτὸς δὲ τοῦ ἄξονος τὸ ΑΕΖ, καὶ κείσθω παράλληλος ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ, ὁ δὲ ἄξων, τουτέστιν ἡ ΑΒ εὐθεῖα, μὴ ἐλάττων ἔστω τῆς ΒΓ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ΑΕΖ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν ΕΖ ἡ ΒΗ· δίχα ἄρα τέτμηται ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Η. ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ· ἡ ΑΗ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἰσοσκελὲς γὰρ τὸ ΕΑΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ οὐκ ἔστιν ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΒΕ, ἐλάττων δὲ ἡ ΕΗ τῆς ΒΕ· ἡ ἄρα ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΕΗ. ἀφῃρήσθω τοίνυν τῇ ΕΗ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΕΗ τῇ ΒΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΗ· δύο ἄρα

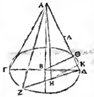
ἄρα δυσὶν ἴσαι, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΒΘ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΕΒ τῇ ΘΗ ἴση ἐστί, καὶ ὅμοια τὰ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς ΕΗ οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ. ἡ δὲ ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ, ὡς προεδείχθη, ὀρθογώνιον γὰρ τὸ ΑΒΗ· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα πρὸς ΕΗ, τουτέστιν ἡ ΓΒ πρὸς ΕΗ, τουτέστιν ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΒΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΗΑ, διὰ τὸ πρῶτον λημμάτιον. ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ ΓΔ, ΒΑ ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ ΕΖ, ΗΑ ἥμισυ τὸ ΕΑΖ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΓΔ ἄρα τρίγωνον τοῦ ΑΕΖ μεῖζόν ἐστι· καὶ πάντων ἄρα τῶν ἴσας βάσεις ἐχόντων τῇ ΕΖ, καὶ διὰ τοῦτο ἴσων ὄντων, μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΓΔ. ὁμοίως δὲ δείξομεν καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων τομῶν τῶν ἐκτὸς τοῦ ἄξονος· μέγιστον ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον.

duæ ΘΒ, ΒΗ duabus ΕΗ, ΗΒ æquales ſunt, & angulus ΕΗΒ æqualis angulo ΗΒΘ, nam uterque rectus: baſis igitur ΕΒ baſi ΘΗ eſt æqualis, & triangulum triangulo ſimile: quare ut ΒΕ ad ΕΗ ita ΗΘ ad ΘΒ. ſed ΗΘ ad ΘΒ majorem rationem habet quam ΗΑ ad ΑΒ, ut proxime [per 2.huj.] demonſtravimus; orthogonium enim triangulum eſt ΑΒΗ· ergo ΒΕ ad ΕΗ, hoc eſt ΓΒ ad ΕΗ, hoc eſt ΓΔ ad ΕΖ, majorem rationem habet quam ΗΑ ad ΑΒ: rectangulum igitur quod fit ſub ΓΔ, ΒΑ majus eſt eo quod ſub ΕΖ, ΗΑ, per primum theorema. ſed rectanguli quidem ſub ΓΔ, ΒΑ dimidium eſt ΑΓΔ triangulum; rectanguli vero ſub ΕΖ, ΗΑ dimidium eſt triangulum ΕΑΖ: quare triangulum ΑΓΔ majus eſt triangulo ΑΕΖ, & majus aliis omnibus quæ baſes habent æquales baſi ΕΖ, ac proinde inter ſe æqualia ſunt. pari modo demonſtrabitur, & in aliis ſectionibus quæ extra axem fiunt: triangulum igitur per axem omnium maximum erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ϛʹ.

Ἔστι τὸ αὐτὸ ἄλλως καὶ καθολικώτερον δεῖξαι, ὅτι καὶ ἁπλῶς τῶν τριγώνων τὸ μείζονα βάσιν ἔχον μεῖζόν ἐστι.

ΤΜΗΘΕΝΤΟΣ γὰρ τοῦ κώνου, γενέσθω τὰ ΑΓΔ, ΑΖΔ, ὥστε τὰς ΓΔ, ΖΔ βάσεις συμβάλλειν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ πέρας, καὶ ἔστω μείζων τῆς ΖΔ ἡ ΓΔ, ἐάν τε διὰ τοῦ κέντρου ὦσιν, ἐάν τε μή· λέγω ὅτι τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΖΔ μεῖζόν ἐστιν.



Ἤχθωσαν ἐπὶ τὰς ΖΔ, ΓΔ κάθετοι αἱ ΑΒ, ΑΗ, ἐπὶ δὲ τὴν ΑΔ ἡ ΒΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΖΔ μείζων ἐστί, καὶ ἡ ἡμίσεια ἄρα ἡ ΒΔ τῆς ΔΗ μείζων· τὸ ἀπὸ ΒΔ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΔΗ μεῖζόν ἐστι· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΑ λοιποῦ τοῦ ἀπὸ ΑΗ ἔλαττόν ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΔ· καὶ ἡ ΑΘ ἄρα πρὸς ΘΔ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ. γενέσθω ὡς τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΚ· κάθετος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΚ ἐπὶ τὴν ΑΔ, ὡς δειχθήσεται.

Καὶ ἐπεὶ ὑπόκειται ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ οὐκ ἐλάττων, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ, ἢ ἴση. ἔστω πρότερον μείζων· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΘ τῆς ΘΔ. τετμήσθω ἡ ΑΔ δίχα κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ὑπὸ ΑΘ, ΘΔ τοῦ ἀπὸ ΑΛ ἔλαττόν ἐστι τῷ ἀπὸ ΛΘ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΚ, ΚΔ τοῦ ἀπὸ ΑΛ ἔλαττόν ἐστι τῷ ἀπὸ ΛΚ, καί ἐστι μεῖζον τὸ ἀπὸ ΛΚ τοῦ ἀπὸ ΛΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΘΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΘ, τοῦ ὑπὸ ΑΚ, ΚΔ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΗΚ· ἡ ΘΒ ἄρα μείζων τῆς ΗΚ. καί εἰσιν αἱ

Prop. VI. *Theor.*

Licet idem aliter & univerſalius demonſtrare, quòd ſimpliciter in his triangulis, quod majorem baſim habet illud majus eſt.

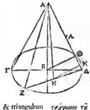
SECTO namque cono, fiant triangula ΑΓΔ, ΑΖΔ, ita ut baſes ΓΔ, ΖΔ inter ſe ad terminum Δ conveniant; & ſit ΓΔ major ipſa ΖΔ, ſive per centrum tranſeat, ſive non: dico triangulum ΑΓΔ majus eſſe triangulo ΑΖΔ.

Ducantur enim ad ΖΔ, ΓΔ perpendiculares ΑΒ, ΑΗ; & ad ΑΔ ducatur ΒΘ perpendicularis. itaque quoniam ΓΔ major eſt ipſa ΖΔ; erit ejus dimidia ΒΔ major quam ΔΗ· ergo quadratum ex ΒΔ quadrato ex ΔΗ majus erit; & propterea reliquum quadratum ex ΒΑ minus quadrato ex ΑΗ: quadratum igitur ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΔ minorem rationem habet quam quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΗΔ. ſed ut quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΔ ita eſt ΑΘ ad ΘΔ: ergo ΑΘ ad ΘΔ minorem habet rationem quam quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΗΔ. fiat ut quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΗΔ ita ΑΚ ad ΚΔ, & jungatur ΗΚ; quæ ad ΑΔ perpendicularis erit, uti mox demonſtrabitur.

Quoniam igitur ponimus ΑΒ non minorem ipsâ ΒΔ, erit ΑΒ vel major quam ΒΔ, vel ipſi æqualis. ſit primum major; ergo ΑΘ major eſt quam ΘΔ. ſecetur ΑΔ bifariam in Λ. & quoniam [per 5. 2.] rectangulum ΑΘΔ minus eſt quam quadratum ex ΑΛ quadrato ex ΛΘ; rectangulum vero ΑΚΔ minus quam quadratum ex ΑΛ quadrato ex ΛΚ, & majus eſt quadratum ex ΛΚ quadrato ex ΛΘ; erit rectangulum ΑΘΔ, hoc eſt quadratum ex ΒΘ, majus rectangulo ΑΚΔ, hoc eſt quadrato ex ΗΚ: recta igitur ΘΒ major

eſt

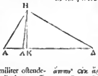
eſt recta H K. ſuntque B Θ, H K altitudines triangulorum A B Δ, A H Δ: quare triangulum A B Δ majus eſt triangulo A H Δ, ut & eorundem dupla, videlicet triangulum A Γ Δ majus triangulo A Z Δ. ſed ipſi A Z Δ æquale eſt aliud omne baſim habens ipſi Z Δ æqualem: triangulum igitur A Γ Δ majus eſt quolibet triangulo, cujus baſis eſt æqualis ipſi Z Δ.



Quod ſi A B ſit æqualis ipſi B Δ, erit & A Θ ipſi Θ Δ æqualis: & ſimiliter rectangulum A Θ Δ, hoc eſt quadratum ex B Θ, majus erit rectangulo A K Δ, hoc eſt quadrato ex H K: propterea que recta B Θ major quam H K, & triangulum A B Δ triangulo A H Δ majus. eodem modo demonſtrabitur etiam, ſi alias baſes duxerimus: quare triangulum majorem habens baſim triangulo minorem habente majus erit.

At vero rectam H K ad A Δ perpendicularem eſſe, hoc modo oſtendetur.

Sit triangulum orthogonium A H Δ rectum habens angulum ad H, & à puncto H ad baſim ducatur H K, ita ut quam rationem habet quadratum ex A H ad quadratum ex H Δ eandem habeat recta A K ad K Δ: dico H K ad A Δ perpendicularem eſſe.

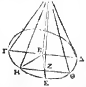


Si enim non ita ſit, ſit H Λ perpendicularis: ut igitur quadratum ex H A ad quadratum ex H Δ ita A Λ ad Λ Δ. erat autem ut quadratum ex A H ad quadratum ex H Δ ita A K ad K Δ; quare ut A Λ ad Λ Δ ita erit A K ad K Δ, quod eſt abſurdum: igitur H Λ non eſt perpendicularis. ſimiliter oſtendemus neque aliam ullam perpendicularem eſſe præter ipſam H K: ergo H K ad A Δ perpendicularis erit.

Prop. VII. *Theor.*

Si in cono recto triangulum per axem majus ſit quovis triangulo extra axem conſtituto: axis coni non minor erit ſemidiametro.

SIT conus cujus vertex quidem A punctum, axis recta A B; baſis autem circulus circa centrum B; & triangulum per axem A Γ Δ, quod majus ſit omni triangulo extra axem in cono conſtituto: dico rectam A B ſemidiametro baſis non minorem eſſe.



Si enim fieri poteſt, ſit minor: & ducatur in circulo recta B E ad Γ Δ perpendicularis. quoniam igitur angulus A B E rectus eſt, recta quæ puncta A, E conjungit, major eſt ſemidiametro B E: quare ſi à puncto A in angulo A B E aptetur recta linea ipſi ſemidiametro æqualis, inter puncta B & E

B Θ, H K ὕψη τῶν A B Δ, A H Δ τριγώνων· μεῖζον ἄρα τὸ A B Δ τοῦ A H Δ, ὥστε καὶ τὰ διπλάσια· τὸ ἄρα A Γ Δ τοῦ A Δ Z μεῖζόν ἐστιν. ἀλλὰ τῷ A Z Δ ἴσον ἕκαστον οὗ ἡ βάσις ἴση ἐστὶ τῇ Z Δ· τὸ ἄρα A Γ Δ παντὸς τριγώνου μεῖζόν ἐστιν, οὗ ἡ βάσις ἴση ἐστὶ τῇ Z Δ.

Εἰ δὲ ἡ A B τῇ B Δ ἴση, ἴση ἄρα καὶ ἡ A Θ τῇ Θ Δ· ὁμοίως ἄρα τὸ ὑπὸ A Θ, Θ Δ, τουτέστι τὸ ἀπὸ B Θ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ A K, K Δ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ H K· ἡ ἄρα B Θ μείζων ἐστὶ τῆς H K, καὶ τὸ A B Δ τρίγωνον τοῦ A H Δ τριγώνου μεῖζον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἄλλας βάσεις διαγάγωμεν· ὥστε τὸ οὕτως ἔχον μείζονα βάσιν τρίγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἔχοντος ἐλάσσονα.

Ὅτι δὲ ἡ H K κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν A Δ, δείκνυται οὕτως.

Τριγώνου γὰρ ὀρθογωνίου τοῦ A H Δ, ὀρθὴν ἔχοντος τὴν πρὸς τὸ H γωνίαν, διῃρήσθω ἡ A Δ βάσις ὑπὸ τῆς H K, ὥστε εἶναι ὡς τὸ ἀπὸ A H πρὸς τὸ ἀπὸ H Δ οὕτως ἡ A K πρὸς K Δ· λέγω ὅτι κάθετός ἐστιν ἡ H K ἐπὶ τὴν A Δ.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ H Λ κάθετος· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ H A πρὸς τὸ ἀπὸ H Δ οὕτως ἡ A Λ πρὸς τὴν Λ Δ. ἦν δὲ ὡς τὸ ἀπὸ A H πρὸς τὸ ἀπὸ H Δ οὕτως ἡ A K πρὸς K Δ· ἔσται ἄρα ὡς ἡ A Λ πρὸς Λ Δ οὕτως ἡ A K πρὸς K Δ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κάθετός ἐστιν ἡ H Λ. ὁμοίως δὲ δείκνυται ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς H K· ἡ ἄρα H K κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν A Δ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ζ'.

Ἐὰν ἐν κώνῳ ὀρθῷ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον μέγιστον ᾖ πάντων τῶν ἐκτὸς τοῦ ἄξονος συνισταμένων τριγώνων· ὁ ἄξων τοῦ κώνου οὐκ ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A, ἄξων δὲ ἡ A B εὐθεῖα, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ B κέντρον κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ A Γ Δ, μέγιστον ὂν πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων ἐκτὸς ἄξονος· λέγω ὅτι ἡ A B οὐκ ἔστιν ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου.

Εἰ γὰρ δυνατὸν ἔστω ἐλάττων, καὶ ἤχθω ἐν τῷ κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς τῇ Γ Δ ἡ B E. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ A B E γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ ἄρα τὰ A, E σημεῖα ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς B E· ἐὰν ἄρα ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ A ὑπὸ τὴν A B E γωνίαν ἐναρμοσθῇ, μεταξὺ πεσεῖται τῶν B καὶ E σημείων.

μένων. ἐναρμοζέσθω ἡ ΑΖ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ διὰ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΓΔ ἤχθω ἡ ΗΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ· γενήσεται δή, ὡς ἐν τῷ ε΄. θεωρήματι ἐδείχθη, τὰ ΑΒΖ, ΗΒΖ τρίγωνα ὅμοια· καὶ ἴσαι αἱ ὁμόλογοι πλευραί· ὡς ἄρα ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς ΗΖ, τουτέστιν ἡ ΓΒ πρὸς ΗΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖ, ΖΗ, τουτέστιν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΗΘ τριγώνῳ, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκειται γὰρ τὸ ΑΓΔ μέγιστον εἶναι. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου.

cadet. itaque aptetur, ſitque ΑΖ; perque Ζ ducatur ΗΘ ipſi ΓΔ parallela, & jungatur ΒΗ: fient igitur triangula ΑΒΖ, ΗΒΖ ſimilia, ut in quinto theoremate demonſtratum eſt, & latera homologa inter ſe æqualia erunt; ut igitur ΖΑ ad ΑΒ ita ΒΗ ad ΗΖ, hoc eſt ΓΒ ad ΗΖ: quare [per 16. 6.] rectangulum ΑΒΓ æquale eſt rectangulo ΑΖΗ, hoc eſt triangulum per axem æquale erit triangulo ΑΗΘ, quod fieri non poteſt; poſuimus enim triangulum ΑΓΔ maximum eſſe. igitur ΑΒ non minor eſt ſemidiametro baſis.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ η΄.

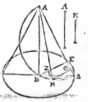
Κῶνον ὀρθόν, οὗ ὁ ἄξων οὐκ ἔστιν ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τρίγωνον, λόγον ἔχον δεδομένον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον. δεῖ δὴ τὸν δεδομένον λόγον ἐλάττονος εἶναι πρὸς μεῖζον.

Prop. VIII. *Probl.*

Conum rectum, cujus axis non ſit minor ſemidiametro baſis, plano per verticem ducto ita ſecare, ut faciat triangulum quod ad triangulum per axem rationem habeat datam. oportet autem datam rationem eſſe minoris ad majus.

ΕΣΤΩ κορυφὴ μὲν τοῦ κώνου τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ἐν ᾧ κάθετος ἡ ΑΒ ἐστί· δεῖ δὴ τὸν κῶνον τεμεῖν τριγώνῳ, ὃ λόγον ἕξει πρὸς τὸ ΑΓΔ τὸν ἐπιταχθέντα. ἐπιτετάχθω δὲ ὁ τῆς Κ ἐλάττονος πρὸς μείζονα τὴν Λ λόγος.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΒΔ ὀρθογώνιόν ἐστι, γεγράφθω περὶ αὐτὸ ἡμικύκλιον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β κάθετος ἤχθω ἡ ΒΕ, καὶ ὡς ἡ Κ πρὸς Λ οὕτως ἔστω ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ, καὶ διὰ τοῦ Ζ παράλληλος ἤχθω τῇ ΕΔ ἡ ΖΗ, διὰ δὲ τοῦ Η τῇ ΖΕ παράλληλος ἡ ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΗΘ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Κ πρὸς Λ οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΒ, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς ΒΕ, ὡς δὲ ἡ ΘΗ πρὸς ΒΕ οὕτως τὸ ὑπὸ ΗΘ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕ, ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΗΘ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΕ, ΑΔ οὕτως τὰ ἡμίση, τουτέστι τὸ ΑΗΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΔ· ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς Λ οὕτως τὸ ΑΗΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΒΔ· τὸ ΑΗΔ ἄρα πρὸς τὸ ΑΒΔ ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἐστίν. ἐὰν οὖν ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου ἐναρμόσωμεν διπλῆν τῆς ΗΔ, καὶ διὰ τῆς ἐναρμοσθείσης καὶ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπίπεδον ἐκβάλλωμεν, ποιήσει τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ διπλάσιον τοῦ ΑΗΔ· ἕξει ἄρα τὸ συνιστάμενον τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον, ὃν τὸ ΑΗΔ ἔχει πρὸς τὸ ΑΒΔ, τουτέστιν ὃν ἡ Κ πρὸς Λ.



SIT coni vertex Α, baſis circulus circa Β centrum, & triangulum per axem ΑΓΔ, in quo ſit ΑΒ perpendicularis; & oporteat conum ſecare triangulo, quod ad triangulum ΑΓΔ rationem datam habeat. ſit autem data ratio ea quæ eſt Κ minoris ad Λ majorem.

Quoniam igitur triangulum ΑΒΔ rectangulum eſt, deſcribatur circa ipſum ſemicirculus; atque à puncto Β ducatur ΒΕ perpendicularis; & quam rationem habet Κ ad Λ eandem habeat ΖΕ ad ΕΒ; deinde per Ζ ducatur ΖΗ ipſi ΕΔ parallela, & per Η ipſa ΗΘ parallela ipſi ΖΕ: & erit ΖΕ æqualis ipſi ΗΘ. itaque quoniam ut Κ ad Λ ita ΖΕ ad ΕΒ, hoc eſt ΘΗ ad ΒΕ; ut autem ΘΗ ad ΒΕ ita eſt rectangulum ſub ΗΘ & ΑΔ ad rectangulum ſub ΒΕ & ΑΔ; & ut rectangulum ſub ΗΘ & ΑΔ ad rectangulum ſub ΒΕ & ΑΔ ita eorundem dimidia, videlicet triangulum ΑΗΔ ad triangulum ΑΒΔ; erit itaque ut Κ ad Λ ita ΑΗΔ triangulum ad triangulum ΑΒΔ: quare triangulum ΑΗΔ ad ipſum ΑΒΔ eſt in data ratione. ſi igitur in baſi coni aptabimus rectam duplam ipſius ΗΔ, perque ipſam & verticem planum ducemus; faciet id in cono triangulum ipſius ΑΗΔ duplum: quod quidem ad triangulum ΑΓΔ eandem rationem habebit quam ΑΗΔ triangulum ad triangulum ΑΒΔ, hoc eſt quam Κ habet ad Λ.

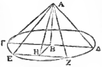
ΠΡΟΤΑΣΙΣ θ΄.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τμηθῇ, τῷ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος, τοῖς δὲ ἐκτὸς τοῦ ἄξονος, τῶν δὲ γινομένων τριγώνων ἐκτὸς τοῦ ἄξονος ἓν ὁτιοῦν ἴσον ᾖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ· ὁ τοῦ κώνου ἄξων ἐλάττων ἔσται τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

Prop. IX. *Theor.*

Si conus rectus planis per verticem ſecetur, & per axem & extra axem; triangulorum autem, quæ fiunt extra axem, unum aliquod æquale ſit triangulo per axem: axis coni ſemidiametro baſis minor erit.

SECTO enim cono fiant triangula, per axem quidem ΑΓΔ, extra axem vero ΑΕΖ, quod triangulo ΑΓΔ ſit æquale; ſitque ΕΖ ipſi ΓΔ parallela, & ducantur ΑΒ, ΑΗ perpendiculares, & jungantur ΒΕ, ΒΗ: dico axem ΑΒ ſemidiametro ΒΔ minorem eſſe.



Quoniam enim ΑΕΖ triangulum æquale eſt triangulo ΑΓΔ; & eorundem dupla æqualia erunt, videlicet rectangulum ſub ΕΖ & ΗΑ æquale rectangulo ſub ΓΔ & ΒΑ: ergo [per 14.6.] ut ΓΔ ad ΕΖ, hoc eſt ΓΒ ad ΕΗ [ſive ΒΕ ad ΕΗ] ita ΗΑ ad ΑΒ. quoniam igitur duo triangula ΒΕΗ, ΗΑΒ unum angulum ΕΗΒ uni angulo ΑΒΗ æqualem habent; (eſt enim uterque rectus) circa alios autem angulos latera ſunt proportionalia, eſtque reliquorum ΕΒΗ, ΑΗΒ uterque recto minor; triangula inter ſe ſimilia erunt: ut igitur ΕΗ ad ΗΒ ita ΑΒ ad ΗΒ; quare ΑΒ ipſi ΕΗ eſt æqualis. ſed ΕΗ minor eſt ſemidiametro ΒΕ; ergo ΑΒ coni axis ſemidiametro minor erit. quod erat demonſtrandum.

ΤΜΗΘΕΝΤΟΣ γὰρ τοῦ κώνου, γενέσθω τρίγωνα, διὰ μὲν τοῦ ἄξονος τὸ ΑΓΔ, ἐκτὸς δὲ τὸ ΑΕΖ, ἴσον ὂν τῷ ΑΓΔ, ἔστω δὲ παράλληλος ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ, καὶ κάθετοι αἱ ΑΒ, ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ, ΒΗ· λέγω δὴ ὅτι ἡ ΑΒ ὁ ἄξων ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΒΔ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΓΔ, καὶ τὰ διπλάσια ἄρα ἴσα, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΖ, ΗΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΔ, ΒΑ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἡ ΓΒ πρὸς ΕΗ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΒΕΗ, ΗΑΒ μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ ἴσην ἔχει, (ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα) περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ΒΕΗ, ΗΑΒ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἑκατέρα δὲ τῶν λοιπῶν τῶν ὑπὸ ΕΒΗ, ΑΗΒ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς ΗΒ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΕΗ. ἐλάττων δὲ ἡ ΕΗ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΒΕ· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα, ἄξων οὖσα τοῦ κώνου, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

Corollarium.

Quod autem demonſtratum eſt in lineis parallelis ΓΔ, ΕΖ; conſtabit etiam ſi non fuerint parallelæ: quippe cum [per 3.huj.] oſtenſum ſit triangula baſes æquales habentia inter ſe æqualia eſſe.

Πόρισμα.

Ἐπεὶ τοίνυν ἐδείχθη ἐπὶ παραλλήλων τῶν ΓΔ, ΕΖ, φανερὸν ὡς, κἂν μὴ παράλληλοι ὦσιν, οὐδὲν διοίσει· ἐδείχθη γὰρ ὡς τὰ ἴσας ἔχοντα βάσεις τρίγωνα ἴσα ἐστί.

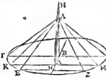
PROP. X. *Theor.*

Iiſdem manentibus, demonſtrandum eſt, ſi rurſus planum ducatur conum per verticem ſecans, facienſque in baſi rectam lineam, cujus magnitudo media ſit inter baſes æqualium triangulorum; triangulum illud utriſque triangulis æqualibus majus eſſe.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ι.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, δεικτέον ὅτι ἐὰν διαχθῇ πάλιν ἐπίπεδον τέμνον τὸν κῶνον διὰ τῆς κορυφῆς, καὶ ποιῇ ἐν τῇ βάσει εὐθεῖαν τῷ μεγέθει μεταξὺ τῶν βάσεων τῶν ἴσων τριγώνων· ἐκεῖνο τὸ τρίγωνον μεῖζον ἔσται ἑκατέρου τῶν ἴσων τριγώνων.

SIT, ut in antecedenti figura, triangulum per axem ΑΓΔ æquale triangulo baſim habenti ΕΖ; & ducatur qualibet recta linea ΚΜ, cujus magnitudo ſit inter ΓΔ, ΕΖ; ponatur autem utrique earum parallela, & per ipſam & verticem planum ducatur: dico triangulum ΑΚΜ utroque ipſorum ΑΓΔ, ΑΕΖ majus eſſe.



Secetur enim rurſus ΚΜ bifariam in Λ, & jungantur ΑΛ, ΒΚ, ΒΛ. itaque quoniam ΑΓΔ triangulum æquale eſt triangulo ΑΕΖ: erit ΑΒ ipſi ΕΗ, hoc eſt dimidiæ ipſius ΕΖ, æqualis, ut proxime demonſtratum fuit. ſed ΚΛ eſt major quam ΕΗ: ergo & ΚΛ ipſa ΑΒ major erit. ponatur ΒΝ æqualis ipſi ΚΛ,

ΕΣΤΩ γὰρ, ἐπὶ τῆς ὁμοίας καταγραφῆς, τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΓΔ ἴσον τῷ βάσιν ἔχοντι τὴν ΕΖ, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ ΚΜ μεγέθει μεταξὺ τῶν ΓΔ, ΕΖ, καὶ ἑκατέρᾳ αὐτῶν κείσθω παράλληλος, καὶ διήχθω τὸ ἐπίπεδον· λέγω δὴ ὅτι τὸ ΑΚΜ τρίγωνον μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ΑΓΔ, ΑΕΖ.

Τετμήσθω γὰρ πάλιν δίχα ἡ ΚΜ τῷ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΒΚ, ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΑΕΖ τριγώνῳ, ἡ ἄρα ΑΒ τῇ ΕΗ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΕΖ ἴση ἐστὶν, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου συναπεδείχθη. μείζων δὲ ἡ ΚΛ τῆς ΕΗ· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ΚΛ. κείσθω οὖν τῇ ΚΛ ἴση ἡ

ΒΚ

Digitized by Google

ΒΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΝ· διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοῖς προειρημένοις ἔσται τὸ ΒΚΑ τρίγωνον τῷ ΑΝΒ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὅμοιον· ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς ΚΑ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΚΑ, τουτέστιν ἡ ΓΔ πρὸς ΚΜ, οὕτως ἡ ΑΝ πρὸς ΝΒ. ἡ δὲ ΑΝ πρὸς ΝΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΑ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΒΑ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΚΜ, ΛΑ, τουτέστι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΑΚΜ τριγώνου· μεῖζον ἄρα τὸ ΑΚΜ τοῦ ΑΓΔ καὶ τοῦ ΑΕΖ τριγώνου.

& jungatur ΑΝ, ac eadem ratione qua ſupra, demonſtrabimus triangulum ΒΚΑ æquale & ſimile triangulo ΑΝΒ: quare ut ΒΚ ad ΚΑ, hoc eſt ut ΓΒ ad ΚΑ, hoc eſt ΓΔ ad ΚΜ, ita ΑΝ ad ΝΒ. ſed ΑΝ ad ΝΒ minorem rationem habet quam ΑΑ ad ΑΒ; & propterea rectangulum ſub ΓΔ & ΒΑ minus eſt rectangulo ſub ΚΜ & ΑΑ, hoc eſt triangulum ΑΓΔ minus triangulo ΑΚΜ: triangulum igitur ΑΚΜ & triangulo ΑΓΔ & triangulo ΑΕΖ majus erit.

Πόρισμα.

Τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ πάντων τριγώνων, ὧν αἱ βάσεις μεγέθει μεταξύ εἰσι τῶν ΓΔ καὶ ΕΖ· οὐδὲν γὰρ διοίσει κἂν μὴ παράλληλοι ὦσιν αἱ βάσεις, ὡς καὶ πρότερον ἐδείχθη.

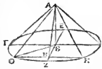
Corollarium.

Idem demonſtrabitur etiam in omnibus triangulis, quorum baſes magnitudine inter ΓΔ, ΒΖ intermediæ ſint, nihil enim differt ſi baſes non ſint parallelæ, ut ſupra demonſtratum fuit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ια'.

Δοθέντα κῶνον ὀρθόν, οὗ ὁ ἄξων ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς, ὥστε τὸ γινόμενον τρίγωνον ἴσον εἶναι τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος, οὗ ἄξων μὲν ὁ ΑΒ, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΓΔ· καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὸν κῶνον ἐπιπέδῳ, ποιοῦντι τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ ἴσον τῷ ΑΓΔ.



Ἤχθω τῇ ΓΔ ἐν τῷ κύκλῳ πρὸς ὀρθὰς διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΒΖ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἐναρμοσθω ἡ ΑΗ, ὑποτείνουσα μὲν τὴν ὑπὸ ΑΒΖ γωνίαν, ἴση δὲ οὖσα τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, (τοῦτο δὲ ῥᾴδιον ποιῆσαι) καὶ διὰ τοῦ Η παράλληλος τῇ ΓΔ ἤχθω ἡ ΘΗΚ· ἡ ΘΗΚ ἄρα κατὰ τὸ Η δίχα τέτμηται καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΕΒΖ. διεκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΘΚ, ΗΑ ἐπίπεδον, ποιοῦν τὸ ΑΘΚ τρίγωνον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΓΔ.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ, ὡς ἄρα ἡ ΑΗ πρὸς ΗΒ οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς ΗΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΒΘΗ, ΗΑΒ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχει (ὀρθαὶ γὰρ αἱ ὑπὸ ΘΗΒ, ΑΒΗ) περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τὰς δὲ λοιπὰς ὀρθῆς ἐλάσσονας· ὅμοια ἄρα τὰ ΒΘΗ, ΗΑΒ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΒΘ πρὸς ΘΗ, τουτέστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΔ, ΒΑ ἴσον τῷ ὑπὸ ΘΚ, ΗΑ, καὶ τὰ ἡμίσεα· τὸ ΑΓΔ τρίγωνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XI. *Probl.*

Datum conum rectum, cujus axis ſit minor ſemidiametro baſis, plano per verticem ita ſecare, ut faciat triangulum æquale ei quod per axem conſtituitur.

Sit datus conus rectus, cujus axis quidem ΑΒ; triangulum vero per axem ΑΓΔ: & oporteat eum plano per verticem ita ſecare, ut faciat triangulum triangulo ΑΓΔ æquale.

Ducatur in circulo per centrum recta ΕΒΖ ad rectos angulos ipſi ΓΔ. & quoniam ΑΒ minor eſt ſemidiametro baſis, aptetur ΑΗ ſubtendens angulum ΑΒΖ, quæ ſemidiametro ſit æqualis (quod quidem facile effici poteſt) deinde per Η ducatur ΘΗΚ ipſi ΓΔ parallela: ergo [per 3. 3.] ΘΗΚ ad Η bifariam ſecatur & ad ΕΒΖ eſt perpendicularis. ducatur juxta rectas ΘΚ, ΗΑ planum triangulum ΑΘΚ efficiens: dico ΑΘΚ triangulo ΑΓΔ æquale eſſe.

Jungatur enim ΒΘ, & quoniam ΑΗ eſt æqualis ipſi ΒΘ, erit ut ΑΗ ad ΗΒ ita ΘΒ ad ΒΗ: quod cum duo triangula ΒΘΗ, ΗΑΒ unum angulum uni angulo æqualem habeant (ſunt enim ΘΗΒ, ΑΒΗ utrique recti) & circa alios angulos latera proportionalia ſint, reliquorum vero uterquo recto minor; erunt ΒΘΗ, ΗΑΒ triangula inter ſe ſimilia: quare ut ΒΘ ad ΘΗ, hoc eſt ΓΔ ad ΘΚ, ita ΗΑ ad ΑΒ: & idcirco rectangulum quod fit ſub ΓΔ & ΒΑ æquale eſt rectangulo ſub ΘΚ & ΗΑ; proinde eorum dimidia, videlicet triangulum ΑΓΔ æquale erit triangulo ΑΘΚ. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιβ'.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τμηθῇ, τῶν δὲ γινομένων ἐν τῷ κώνῳ τριγώνων ἑνὸς ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἴση ᾖ τῇ ἡμι-

Prop. XII. *Theor.*

Si conus rectus planis per verticem ſecetur, & in uno triangulorum ſectione factorum recta à vertice ad baſim perpendicularis ducta æqualis ſit dimidiæ

dimidiæ baſis: erit illud triangulum majus omnibus triangulis diſſimilibus in cono conſtitutis.

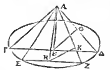
SIT in cono recto triangulum ΑΓΔ, quod perpendicularem ΑΒ æqualem habeat ipſi ΒΔ dimidiæ ΓΔ baſis: dico ΑΓΔ triangulum majus eſſe omnibus triangulis diſſimilibus quæ in cono conſtituuntur.

Sumatur enim aliud quodvis triangulum ΑΕΖ ipſi diſſimile, in quo ſit perpendicularis ΑΗ; & à puncto quidem Β ad ΑΔ perpendicularis ducatur ΒΘ; à puncto autem Η ad ΑΖ itidem ducatur perpendicularis ΗΚ. quoniam igitur triangulum ΑΓΔ diſſimile eſt triangulo ΑΕΖ, & ΑΒΔ ipſi ΑΗΖ diſſimile erit. ſunt autem orthogonia, & æquicrure eſt ΑΒΔ: ergo ΑΗΖ non eſt æquicrure; & quadratum quidem ex ΑΒ æquale eſt quadrato ex ΒΔ, quadratum vero ex ΑΗ quadrato ex ΗΖ non eſt æquale. ut autem quadratum ex ΑΒ ad quadratum ex ΒΔ ita recta ΑΘ ad ΘΔ; & ut quadratum ex ΑΗ ad quadratum ex ΗΖ ita ΑΚ ad ΚΖ: recta igitur ΑΔ in partes æquales dividitur, ΑΖ vero in partes inæquales. itaque quoniam id quod ſub æqualibus partibus continetur majus eſt contento ſub partibus inæqualibus; erit ΑΘΔ rectangulum majus rectangulo ΑΚΖ. ſed rectangulo ΑΘΔ æquale eſt quadratum ex ΒΘ; & rectangulo ΑΚΖ æquale quadratum ex ΗΚ: quadratum igitur ex ΒΘ quadrato ex ΗΚ majus erit; idcircoque linea ΒΘ major quam ΗΚ. ut autem ΒΘ ad ΗΚ ita rectangulum ſub ΒΘ, ΑΔ ad rectangulum ſub ΗΚ, ΑΖ; & ita dimidium ad dimidium, hoc eſt triangulum ΑΒΔ ad triangulum ΑΗΖ: majus igitur eſt ΑΒΔ triangulum triangulo ΑΗΖ, & eorundem dupla, videlicet triangulum ΑΓΔ majus triangulo ΑΕΖ. ſimiliter oſtendetur ΑΓΔ majus eſſe omnibus triangulis ipſi diſſimilibus. quod erat demonſtrandum.

σίας τῆς βάσεως· τοῦτο μεῖζον ἔσαι πάντων τῶν ἀνομοίων ἐν τῷ κώνῳ τριγώνων.

ΕΝ γὰρ κώνῳ ὀρθῷ τρίγωνον ἔσω τὸ ΑΓΔ, ἔχον τὴν ΑΒ κάθετον ἴσην τῇ ΒΔ, ἡμισείᾳ οὔσῃ τῆς ΓΔ βάσεως· λέγω ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον μεῖζόν ἐστι πάντων τῶν ἀνομοίων ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων.

Εἰλήφθω γὰρ ἄλλο τυχὸν τρίγωνον ἀνόμοιον αὐτῷ τὸ ΑΕΖ, ἐν ᾧ κάθετος ἡ ΑΗ· καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΑΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ Η ἐπὶ τὴν ΑΖ κάθετος ἤχθω ἡ ΗΚ. ἐπεὶ οὖν ἀνόμοιόν ἐστι τὸ ΑΓΔ τῷ ΑΕΖ, ἀνόμοιον ἄρα καὶ τὸ ΑΒΔ τῷ ΑΗΖ. καὶ ἔστιν ὀρθογώνια, καὶ ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΔ· τὸ ΑΗΖ ἄρα ἀνισοσκελές· καὶ τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἄνισον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ οὕτως ἡ ΑΘ πρὸς ΘΔ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΖ οὕτως ἡ ΑΚ πρὸς ΚΖ· ἡ μὲν ἄρα ΑΔ εἰς ἴσα τέτμηται, ἡ δὲ ΑΖ εἰς ἄνισα. ἐπεὶ οὖν αἱ ΔΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ ἡ μὲν εἰς ἴσα διῄρηται, ἡ δὲ εἰς ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἴσων τμημάτων τοῦ ὑπὸ τῶν ἀνίσων μεῖζόν ἐστι· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΘΔ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΚΖ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ ΑΘΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΒΘ, τὸ δὲ ὑπὸ ΑΚΖ ἴσον τῷ ἀπὸ ΗΚ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΘ τοῦ ἀπὸ ΗΚ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΘ τῆς ΗΚ. ὡς δὲ ἡ ΒΘ πρὸς ΗΚ οὕτως τό τε ὑπὸ ΒΘ, ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΚ, ΑΖ, καὶ τὸ ἥμισυ πρὸς τὸ ἥμισυ, τουτέστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΗΖ· μεῖζον ἄρα τὸ ΑΒΔ τοῦ ΑΗΖ, καὶ τὸ διπλάσιον τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι πάντων τῶν ἀνομοίων μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Prop. XIII. *Probl.*

Datum conum rectum, cujus axis ſit minor ſemidiametro baſis, plano per verticem ita ſecare, ut faciat triangulum majus omnibus triangulis diſſimilibus in cono conſtitutis.

SIT datus conus rectus, cujus vertex quidem Α punctum; baſis circulus circa centrum Β, axis vero ΑΒ minor ſemidiametro baſis: & oporteat conum juxta præſcriptum ſecare.

Ducatur planum per axem quod faciat triangulum ΑΓΔ, & erit ΑΒ perpendicularis & minor quam ΒΔ. deinde in plano circuli ducatur ΒΕ ad rectos angulos ipſi ΓΒ; & quo quadratum ex ΔΒ ſuperat quadratum ex ΒΑ, ejus dimidium ſit quadratum ex ΒΗ; perque

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιγ'.

Τὸν δοθέντα κῶνον ὀρθὸν, οὗ ὁ ἄξων ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδῳ, ὥστε τὸ γενόμενον τρίγωνον μεῖζον εἶναι πάντων τῶν ἀνομοίων αὐτῷ ἐν τῷ κώνῳ γινομένων τριγώνων.

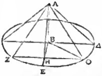
ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς κῶνος ὀρθὸς, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ, ἐλάττων ὢν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· καὶ δέον ἔστω τεμεῖν τὸν κῶνον ὡς προστέτακται.

Ηχθω τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον, ποιοῦν τὸ ΑΓΔ τρίγωνον· ἡ ΑΒ ἄρα κάθετος ἐλάττων ἐστὶ τῆς ΒΔ. ἤχθω ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ τῇ ΓΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· καὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τούτου ἥμισυ ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· καὶ διὰ τοῦ

Η παράλ-

Digitized by Google

Η παράλληλος ἤχθω τῇ Γ Δ ἡ Ζ Η Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Α Η, Β Θ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ Β Δ, τουτέστι τὸ ἀπὸ Β Θ, τοῦ ἀπὸ Β Α μεῖζόν ἐστι δυσὶ τοῖς ἀπὸ Β Η, τὸ δὲ ἀπὸ Α Η τοῦ ἀπὸ Α Β μεῖζόν ἐστιν ἑνὶ τῷ ἀπὸ Β Η· τὸ ἄρα ἀπὸ Β Θ τοῦ ἀπὸ Α Η μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ Β Η. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ Η Θ τοῦ ἀπὸ Β Η μεῖζον τὸ ἀπὸ Β Θ· ἑκατέρου ἄρα τῶν ἀπὸ Α Η, Η Θ τῷ αὐτῷ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ Β Θ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ Α Η τῷ ἀπὸ Η Θ, καὶ ἡ Α Η τῇ Η Θ ἴση. καί ἐστι καὶ ἡ Ζ Η τῇ Η Θ ἴση· ἡ ἄρα Α Η ἴση ἐστὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς Ζ Θ· ἐὰν ἄρα διὰ τῶν Ζ Θ, Η Α διεκβάλλωμεν ἐπίπεδον, ἔσται τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ. γεγονέτω τὸ Α Ζ Θ. ἐπεὶ οὖν τρίγωνόν ἐστιν ἐν κώνῳ τὸ Α Ζ Θ, οὗ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς κάθετος ἡ Α Η ἴση ἐστὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς βάσεως· τὸ Α Ζ Θ ἄρα μεῖζόν ἐστι πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ γινομένων τριγώνων ἀνομοίων αὐτῷ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

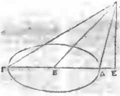
H ducatur Z H Θ parallela ipſi Γ Δ; & jungantur A H, B Θ.

Quoniam quadratum ex B Δ, hoc eſt ex B Θ, ſuperat quadratum ex B A duobus quadratis ex B H, quadratum autem ex A H ſuperat quadratum ex A B uno quadrato ex B H: ergo quadratum ex B Θ ſuperat quadratum ex A H ipſius B H quadrato. ſed quadratum ex B Θ ſuperat quadratum ex H Θ quadrato ex B H; quadratum igitur ex B Θ utrumque quadratum ex A H & ex H Θ eodem quadrato ſuperat: adeoque quadratum ex A H æquale eſt quadrato ex H Θ, & recta A H rectæ H Θ æqualis. eſt autem & Z H æqualis ipſi H Θ; quare A H æqualis eſt dimidiæ ipſius Z Θ: ſi igitur per Z Θ, H A planum ducatur, fiet in cono triangulum, quod ſit A Z Θ. itaque quoniam triangulum A Z Θ eſt in cono, à cujus vertice ducta perpendicularis A H æqualis eſt dimidiæ baſi: erit [per 12. huj.] A Z Θ triangulum majus omnibus triangulis diſſimilibus in ipſo cono conſtitutis. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιδ'.

Τὸν δοθέντα κῶνον διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τεμεῖν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, ἄξων δὲ ὁ Α Β· καὶ δέον ἔστω τὸν κῶνον τεμεῖν διὰ τῆς Α Β πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει.



Εἰ μὲν οὖν ὀρθός ἐστιν ὁ κῶνος, δῆλον ὅτι ἡ Α Β πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ βάσει, καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς Α Β ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ βάσει· ὥστε τὸ Α Γ Δ τρίγωνον, διὰ τῆς Α Β ὄν, πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ βάσει.

Ἀλλὰ δὴ σκαληνὸς ἔστω ὁ κῶνος· ἡ ἄρα Α Β οὐκ ἔστι πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει. πιπτέτω τοίνυν ἡ ἀπὸ τῆς Α κορυφῆς κάθετος ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Β Ε, καὶ διεκβεβλήσθω τὸ τοῦ Α Β Ε τριγώνου ἐπίπεδον, ποιοῦν ἐν τῷ κώνῳ τὸ Α Γ Δ τρίγωνον· λέγω ὅτι τὸ Α Γ Δ πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ τοῦ κώνου βάσει. ἐπεὶ γὰρ ἡ Α Ε κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον· καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς Α Ε ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ· καὶ τὸ Α Γ Δ ἄρα τρίγωνον πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Prop. XIV. *Probl.*

Datum conum plano per axem ad rectos angulos ipſi baſi ſecare.

SIT datus conus, cujus vertex A punctum, baſis circulus circa centrum B; axis vero A B: & oporteat conum ſecare ſecundum rectam A B ad rectos angulos ipſi baſi.

Si igitur conus ſit rectus, perſpicuum eſt rectam A B ad baſim perpendicularem eſſe; & ob id [per 18, 11.] omnia quæ per ipſam tranſeunt plana ad rectos angulos erunt: quare & triangulum A Γ Δ per lineam A B ductum ad rectos angulos erit ipſi baſi.

Sed ſit conus ſcalenus: ergo A B non eſt ad baſim perpendicularis. cadat à vertice A perpendicularis ad baſis planum in puncto E; & junctâ B E, producatur trianguli A B E planum, quod in cono ſectionem faciat triangulum A Γ Δ: dico A Γ Δ triangulum ad rectos angulos eſſe baſi coni. quoniam enim A E perpendicularis eſt ad baſis planum; & omnia quæ per ipſam A E tranſeunt plana eidem ad rectos angulos erunt: ergo & triangulum A Γ Δ ad rectos angulos erit plano baſis. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιε'.

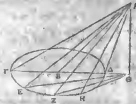
Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τμηθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τὸ γινόμενον τρίγω-

Prop. XV. *Theor.*

Si conus ſcalenus plano per axem ſecetur ad rectos angulos ipſi baſi: tri-

angulum in cono factum ſcalenum erit, cujus latus majus maxima erit linearum omnium, quæ à vertice coni ad baſis circumferentiam ducuntur; & minus latus linearum omnium ſimiliter ductarum minima erit; è reliquis vero, quæ maximæ propinquior eſt major erit quam quæ ab ipſâ remotior.

SIT conus ſcalenus, cujus vertex A punctum, baſis circulus ΓΕΔ, & axis AB; cono autem ſecto per axem ad rectos angulos ipſi ΓΕΔ circulo, fiat triangulum AΓΔ; & axis ad partes Δ vergat. cum igitur conus ſcalenus ſit, non erit AB perpendicularis ad circulum ΓΕΔ. ducatur AΘ ad ipſum perpendicularis, quæ proinde erit in plano trianguli AΓΔ, & in rectam ΓΒΔ productam cadet. itaque quoniam major eſt ΓΘ quam ΘΔ, & quadratum ex ΓΘ quadrato ex ΘΔ erit majus. commune apponatur quadratum ex ΘA: quadrata igitur ex ΓΘ, ΘA majora ſunt quadratis ΔΘ, ΘA, hoc eſt quadratum ex ΓA majus quadrato ex AΔ: ergo recta AΓ major ipſa AΔ.



Dico AΓ maximam eſſe rectarum omnium quæ à vertice ad baſis circumferentiam ducuntur; AΔ vero minimam.

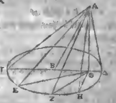
Ducantur enim ΘE, ΘZ, ΘH, & jungantur AE, AZ, AH. itaque quoniam [per 7 & 8. 3.] ΓΘ maxima eſt ex iis quæ à Θ in circumferentiam cadunt; erit quadratum ex ΘΓ majus quadratis ex ΘE, ΘZ, ΘH, ΘΔ. commune apponatur quadratum ex ΘA; quadrata igitur ex utriſque ΓΘ, ΘA facta majora ſunt eis quæ fiunt ex EΘ, ΘA; ZΘ, ΘA; ΔΘ, ΘA; hoc eſt quadratum ex AΓ majus eſt quolibet è quadratis ex AE, AZ, AH, AΔ: adeoque recta AΓ major eſt qualibet rectarum AE, AZ, AH, AΔ. ſimiliter demonſtrabitur etiam quavis alia majorem eſſe: igitur AΓ, uti diximus, maxima eſt omnium rectarum, quæ in ipſo cono ducuntur. eadem ratione demonſtrabitur rectam AΔ minimam eſſe. è cæteris vero AE major eſt quam AZ, & AZ major quam AH; & quæ propinquior eſt ipſi AΓ ſemper major eſt quam quæ ab eadem magis diſtat. quod erat demonſtrandum.

Prop. XVI. *Theor.*

Si in triangulo recta linea ducatur à vertice ad punctum quod baſim bi-

κῶνον ἔσται σκαληνόν, ἡ μὲν μείζων πλευρὰ μεγίστη ἔσται πασῶν τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένων εὐθειῶν, ἡ δὲ ἐλάττων πλευρὰ ἐλαχίστη πασῶν τῶν ὁμοίως ἀγομένων εὐθειῶν, τῶν δὲ ἄλλων εὐθειῶν ἡ τῇ μεγίστῃ ἔγγιον τῆς ἀπώτερον ἔσται μείζων.

ΕΣΤΩ κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ ΓΕΔ κύκλος, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ· τοῦ δὲ κώνου τμηθέντος διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῷ ΓΕΔ κύκλῳ, τὸ γινόμενον τρίγωνον ἔστω τὸ ΑΓΔ, προσνευέτω δὲ ὁ ἄξων ἐπὶ τὸ Δ μέρος. ἐπεὶ οὖν, σκαληνοῦ ὄντος τοῦ κώνου, οὐκ ἔστιν ἡ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τῷ ΓΕΔ κύκλῳ, ἔστω πρὸς ὀρθὰς αὐτῷ ἡ ΑΘ· ἡ ΑΘ ἄρα ἐν τῷ τοῦ ΑΓΔ ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πεσεῖται ἐπὶ ΓΒΔ ἐκβληθεῖσαν. ἐπεὶ οὖν μείζων ἡ ΓΘ τῆς ΘΔ, καὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΘΔ μεῖζον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΘΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΓΘ, ΘΑ τῶν ἀπὸ ΔΘ, ΘΑ μείζονά ἐστι, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΔ· μείζων ἄρα ἡ ΑΓ τῆς ΑΔ.



Λέγω δὴ ὅτι ἡ ΑΓ καὶ πασῶν ἁπλῶς μεγίστη ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγομένων εὐθειῶν, ἡ δὲ ΑΔ ἐλαχίστη.

Ἤχθωσαν γὰρ αἱ ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΘ μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ ἄρα μέγιστόν ἐστι τῶν ἀπὸ ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ, ΘΔ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ ΘΑ· συναμφότερον ἄρα τὸ ἀπὸ τῶν ΓΘ, ΘΑ μεῖζόν ἐστιν ἑκάστου συναμφοτέρου τοῦ ἀπὸ τῶν ΕΘ, ΘΑ· ΖΘ, ΘΑ· ΔΘ, ΘΑ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΑΓ ἑκάστου τῶν ἀπὸ ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ΑΔ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα μείζων ἐστὶν ἑκάστης τῶν ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ΑΔ. ὁμοίως δειχθήσεται ὅτι καὶ τῶν ἄλλων· μεγίστη ἄρα ἡ ΑΓ πασῶν τῶν ὡς εἴρηται ἀγομένων εὐθειῶν ἐν τῷ κώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ μὲν ΑΔ ἐλαχίστη· τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν ΑΕ τῆς ΑΖ μείζων, ἡ δὲ ΑΖ τῆς ΑΗ, καὶ ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῇ ΑΓ τῆς ἀπώτερον ἐστι μείζων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιϛ΄.

Ἐὰν τριγώνου ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως εὐθεῖα ἀχθῇ καὶ ἀπὸ τῶν

πλευρῶν

πλευρῶν τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τῆς βάσεως, καὶ τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν εὐθείας.

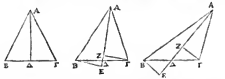
fariam dividit: quadrata è lateribus facta æqualia erunt quadratis quæ fiunt ex baſis partibus, una cum duplo quadrati ejus quæ à vertice ad baſim ducta eſt.

ΕΣΤΩ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ βάσις κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ ΑΒ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ΑΔ.

Εἰ μὲν οὖν ἰσοσκελές ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, φανερὰ ἡ δεῖξις, διὰ τὸ ἑκατέραν τῶν πρὸς τῷ Δ γωνιῶν ὀρθὴν. ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ ΒΑ μείζων· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΔΓ. ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ, καὶ κατήχθωσαν ἐπ' αὐτὴν κάθετοι αἱ ΒΕ, ΓΖ· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ΕΒΔ, ΓΖΔ ὀρθογώνια, διὰ τὸ παραλλήλους εἶναι τὰς ΒΕ, ΖΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΔ

SIT triangulum ΑΒΓ, cujus baſis ſecetur bifariam in Δ; & ducatur ΑΔ: dico quadrata ex ΑΒ, ΑΓ quadratis ex ΒΔ, ΔΓ una cum duplo quadrati ex ΑΔ æqualia eſſe.

Si enim æquicrure ſit ΑΒΓ triangulum, demonſtratio manifeſta erit, propterea quod uterque angulorum qui ad Δ eſt rectus. ſed ſit ΒΑ major quam ΑΓ: ergo ΒΔΑ angulus major eſt angulo ΑΔΓ. producatur ΑΔ, & ad ipſam perpendiculares ducantur ΒΕ, ΓΖ. ſimilia igitur ſunt triangula orthogonia ΕΒΔ, ΓΖΔ, propter parallelas ΒΕ, ΖΓ: quare ut ΒΔ ad ΔΓ ita



πρὸς ΔΓ οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ. ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ, καὶ τὸ ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ τῷ ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ τῶν ἀπὸ ΑΔ, ΔΒ μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΕ, τουτέστι τῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΓ τῶν ἀπὸ ΔΑ, ΔΓ ἔλαττόν ἐστι τῷ αὐτῷ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΒΔ, ΔΓ καὶ τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ΑΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΕΔ ad ΔΖ. æqualis autem eſt ΒΔ ipſi ΓΔ: ergo & ΕΔ æqualis eſt ipſi ΔΖ, & rectangulum ΑΔΕ rectangulo ΑΔΖ æquale; & duplum rectanguli ΑΔΕ duplo rectanguli ΑΔΖ. itaque quoniam [per 12. 2.] quadratum ex ΑΒ majus eſt quadratis ex ΑΔ, ΔΒ duplo rectanguli ΑΔΕ, hoc eſt duplo rectanguli ΑΔΖ; quadratum vero ex ΑΓ [per 13. 2.] minus eſt quadratis ex ΑΔ, ΔΓ duplo rectanguli ΑΔΖ: erunt quadrata ex ΒΑ & ΑΓ ſimul æqualia quadratis ex ΒΔ, ΔΓ una cum duplo quadrati ex ΑΔ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζ.

Ἐὰν τεσσάρων εὐθειῶν ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τετάρτης. κἂν τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς τρίτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τετάρτης· ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ τρίτη πρὸς τὴν τετάρτην.

Prop. XVII. *Theor.*

Si prima quatuor rectarum ad ſecundam majorem rationem habeat quam tertia ad quartam; etiam quadratum primæ ad quadratum ſecundæ majorem habebit rationem quam tertiæ quadratum ad quadratum quartæ. quòd ſi quadratum primæ ad quadratum ſecundæ majorem rationem habeat quam tertiæ quadratum ad quadratum quartæ; prima quoque ad ſecundam majorem rationem habebit quam tertia ad quartam.

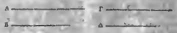
ΕΣΤΩΣΑΝ εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, Δ, ἐχέτω δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· λέγω ὅτι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ὁ τοῦ μείζονος ἄρα διπλάσιος μείζων

SINT quatuor rectæ lineæ Α, Β, Γ, Δ; & habeat Α ad Β majorem rationem quam Γ ad Δ: dico quadratum ipſius Α ad quadratum ex Β majorem habere rationem quam quadratum ex Γ ad quadratum ex Δ.

Etenim cum ratio Α ad Β major ſit quam habet Γ ad Δ; erit dupla majoris rationis major quam dupla

dupla minoris. eſt autem [per 20.6.] rationis majoris A ad B dupla ratio quadrati ex A ad quadratum ex B; & rationis minoris Γ ad Δ dupla eſt ratio quadrati ex Γ ad quadratum ex Δ: ergo ratio quadrati ex A ad quadratum ex B major eſt ratione quadrati ex Γ ad quadratum ex Δ. Rurſus quadratum ex A ad quadratum ex B majorem rationem habeat quam quadratum ex Γ ad quadratum ex Δ: dico A ad B majorem rationem habere quam Γ ad Δ. nam cum ratio quadrati ex A ad quadratum ex B major ſit quam quadrati ex Γ ad quadratum ex Δ, erit majoris rationis dimidia major quam dimidia minoris. ſed rationis quidem majoris quadrati ex A ad quadratum ex B dimidia eſt ratio A ad B; rationis vero minoris quadrati ex Γ ad quadratum ex Δ dimidia eſt ratio Γ ad Δ: ratio igitur A ad B major eſt quam Γ ad Δ. quod erat demonſtrandum.



ἐστὶ τῆς ἐλάττονος διπλασίων. ἔστι δὲ τοῦ μὲν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου μείζονος ὄντος διπλάσιος ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγος· τοῦ δὲ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ λόγου ἐλάττονος ὄντος διπλάσιος ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγος· καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. Πάλιν δὴ τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β μείζονα λόγον ἐχέτω ἤπερ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· λέγω ὅτι ἡ Α πρὸς τὴν Β μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. ἐπεὶ γὰρ ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγου, καὶ ὁ τοῦ μείζονος ἄρα ἡμίσεος τοῦ ἐλάττονος ἡμίσεος μείζων ἐστίν. ἔστι δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγου μείζονος ὄντος ἥμισυς ὁ τῆς Α πρὸς τὴν Β, τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ ἐλάττονος ὄντος ἥμισυς ὁ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ ὁ τῆς Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγος μείζων ἐστὶ τοῦ τῆς Γ πρὸς τὴν Δ. ὅ.ἔ.δ.

Prop. XVIII. *Theor.*

Si duæ magnitudines æquales diſſimiliter dividantur; & alterius partium major ad minorem rationem majorem habeat quam partium alterius major ad minorem, vel æqualis ad æqualem: prius dictarum partium major omnium maxima, minor vero omnium minima erit.

Sint duæ magnitudines æquales AB, ΓΔ, dividaturque AB in E & ΓΔ in Z; & ſit AE major quam EB; & ΓZ non minor quam ZΔ, ita ut AE ad EB majorem rationem habeat quam ΓZ ad ZΔ; dico magnitudinum AE, EB, ΓZ, ZΔ maximam quidem eſſe AE, minimam vero EB.



Quoniam enim AE ad EB majorem rationem habet quam ΓZ ad ZΔ; componendo AB ad BE majorem habebit quam ΓΔ ad ΔZ; permutandoque AB ad ΓΔ majorem quam EB ad ZΔ. eſt autem AB ipſi ΓΔ æqualis; minor igitur eſt EB quam ZΔ. eſtque ZΔ non major quam ΓZ; quare eſt EB quam ΓZ minor. ſed & erat minor quam AE; ergo EB minima erit. rurſus quoniam AB eſt æqualis ipſi ΓΔ, quarum pars EB minor eſt parte ΔZ; erit reliqua EA major quam reliqua ΓZ. & ΓZ non eſt minor quam ZΔ: quare AE major eſt quam ZΔ. erat autem & major quam EB; adeoque AE omnium maxima erit, uti EB minima.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιη'.

Ἐὰν δύο μεγέθη ἴσα ἀνομοίως διαιρεθῇ, τῶν δὲ τοῦ ἑτέρου τμημάτων τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ τῶν λοιπῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον, ἢ τὸ ἴσον πρὸς τὸ ἴσον· τῶν προειρημένων τμημάτων τὸ μὲν μεῖζον μέγιστον ἔσται τῶν τεσσάρων τμημάτων, τὸ δὲ ἔλασσον ἐλάχιστον τῶν τεσσάρων.

Ἔστω δύο μεγέθη ἴσα τὰ ΑΒ, ΓΔ, καὶ διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΔ τῷ Ζ, ἔστω δὲ τὸ μὲν ΑΕ τοῦ ΕΒ μεῖζον, τὸ δὲ ΓΖ τοῦ ΖΔ μὴ ἔλαττον, ὥστε τὸ ΑΕ πρὸς ΕΒ μείζονα λόγον ἔχειν ἤπερ τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω ὅτι τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΓΖ, ΖΔ μεγεθῶν μέγιστον μέν ἐστι τὸ ΑΕ, ἐλάχιστον δὲ τὸ ΕΒ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΕ πρὸς ΕΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΖ πρὸς ΖΔ, καὶ συνθέντι ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς ΒΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΔ πρὸς ΔΖ, καὶ ἐναλλὰξ τὸ ΑΒ πρὸς ΓΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΕΒ πρὸς ΖΔ. καί ἐστιν ἴσον τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· ἔλαττον ἄρα τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. τὸ δὲ ΖΔ τοῦ ΓΖ οὐ μεῖζον· καὶ τοῦ ΓΖ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ ΕΒ. ἦν δὲ καὶ τοῦ ΑΕ ἔλαττον· ἐλάχιστον ἄρα τὸ ΕΒ. πάλιν ἐπεὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ ἴσον, ὧν τὸ ΕΒ τοῦ ΔΖ ἔλαττον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΑ λοιποῦ τοῦ ΓΖ μεῖζον. τὸ δὲ ΓΖ τοῦ ΖΔ οὐκ ἔλαττόν ἐστι· καὶ τοῦ ΖΔ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΕ. ἦν δὲ καὶ τοῦ ΕΒ μεῖζον· μέγιστον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕ, τὸ δὲ ΕΒ ἐλάχιστον.

Prop. XIX. *Theor.*

Si duo triangula baſes æquales habeant, itemque rectas quæ à vertice ad pun-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιθ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τάς τε βάσεις ἴσας ἔχῃ, ἔχῃ δὲ καὶ τὰς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βά-

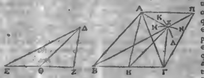
σεως

σεως ἠγμένας εὐθείας ἴσας, τῆς δὲ ἑτέρας ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ τῆς λοιπῆς μείζων πρὸς τὴν ἐλάττονα, ἢ ἡ ἴση πρὸς τὴν ἴσην· οὗ ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχει ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστι.

ctum quo biſecatur baſis ducuntur; alterius autem majus latus ad minus majorem rationem habeat quam reliqui majus latus ad minus, vel æquale ad æquale: triangulum illud, cujus majus latus ad minus majorem habet rationem, altero minus erit.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἴσας ἔχοντα τὰς ΒΓ, ΕΖ βάσεις, ὧν ἑκατέρα τετμήσθω δίχα κατὰ τὰ Η καὶ Θ σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΗ, ΔΘ ἴσαι ἔστωσαν· ἔστω δὲ ἡ μὲν ΕΔ τῆς ΔΖ μείζων, ἡ δὲ ΒΑ τῆς ΑΓ μὴ ἐλάττων, ὥστε τὴν ΒΔ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχειν ἤπερ τὴν ΒΑ πρὸς ΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΒΓ, ΕΖ ἴσαι τέ εἰσι καὶ εἰς ἴσα διῄρηνται, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΔΘ ἴση· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα ἴσα ἐστί· τὰ ἄρα ἀπὸ ΒΗ, ΗΓ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΑΗ τοῖς ἀπὸ ΕΘ, ΘΖ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΘΔ ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ ΒΗ, ΗΓ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΑΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ, (τοῦτο γὰρ ἐδείχθη) τοῖς δὲ ἀπὸ ΕΘ, ΘΖ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΘΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΕΔ, ΔΖ· καὶ συναμφότερον ἄρα τὸ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ τῶν ΕΔ, ΔΖ ἴσον ἐστί. ἐπεὶ δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ· καὶ τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ. ἐπεὶ οὖν δύο ἴσων μεγεθῶν, τοῦ τε συναμφοτέρου ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ καὶ τοῦ συναμφοτέρου ἀπὸ τῶν ΕΔ, ΔΖ, τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὸ ἔλαττον, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ τοῦ λοιποῦ τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν τμῆμα, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ· τὸ μὲν ἄρα ἀπὸ ΕΔ, μέγιστον ὄν, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ. τὸ δὲ ἀπὸ ΔΖ, ἐλάχιστον ὄν, ἔλαττόν ἐστιν ἑκατέρου τῶν ἀπὸ ΒΑ, ΑΓ, διὰ τοῦ πρὸ τούτου θεωρήματος· καὶ ἡ μὲν ΕΔ ἄρα ἑκατέρας τῶν ΒΑ, ΑΓ μείζων ἐστίν. ἡ δὲ ΔΖ ἑκατέρας τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάττων· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΕΔ γραφόμενος κύκλος ὑπερπεσεῖται τὴν ΒΑ. γεγράφθω ὁ ΚΛ, καὶ ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ἴσῳ τῇ ΔΖ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν ΑΓ. γεγράφθω ὁ ΜΝ· τεμοῦσι δὴ ἀλλήλους οἱ ΚΛ, ΜΝ κύκλοι, ὡς δειχθήσεται. τεμέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΞΑ, ΞΒ, ΞΗ, ΞΓ· ἡ μὲν ἄρα ΒΞ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΞΓ τῇ ΔΖ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΒΞΓ τρίγωνον τῷ ΒΔΖ ἴσον ἐστίν· ὥστε ἴση καὶ ἡ ΞΗ τῇ ΔΘ, τουτέστι τῇ ΑΗ· ἐξ ὧν

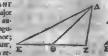


Sint duo triangula ABΓ, ΔEZ baſes BΓ, EZ æquales habentia; quarum utraque bifariam ſecetur in punctis H, Θ; ductæque AH, ΔΘ inter ſe æquales ſint; & ſit EΔ major quam ΔZ; BA vero non minor quam AΓ, ita ut EΔ ad ΔZ majorem rationem habeat quam BA ad AΓ: dico triangulum ΔEZ minus eſſe triangulo ABΓ.

Quoniam enim BΓ, EZ & æquales ſunt & in partes æquales dividuntur; ſuntque æquales AH, ΔΘ; erunt & quæ ex ipſis fiunt quadrata æqualia: quadrata igitur ex BH, HΓ una cum duplo quadrati ex AH æqualia ſunt quadratis ex EΘ, ΘZ una cum duplo quadrati ex ΘΔ. ſed quadratis ex BH, HΓ una cum duplo quadrati ex AH æqualia ſunt quadrata ex BA, AΓ, ut [per 16. huj.] oſtenſum eſt; & quadratis ex EΘ, ΘZ una cum duplo quadrati ex ΘΔ æqualia ſunt quadrata ex EΔ, ΔZ: utraque igitur quadrata ex BA, AΓ utriſque quadratis ex EΔ, ΔZ æqualia erunt. & quoniam EΔ ad ΔZ majorem rationem habet quam BA ad AΓ; habebit quadratum ex EΔ ad quadratum ex ΔZ [per 17. huj.] majorem rationem quam quadratum ex BA ad quadratum ex AΓ. igitur cum duarum magnitudinum æqualium, videlicet ejus quæ conſtat quadratis ex BA, AΓ & ejus quæ quadratis ex EΔ, ΔZ, major pars ad minorem, videlicet quadratum ex EΔ ad quadratum ex ΔZ, majorem rationem habeat quam reliqua pars ad reliquam, videlicet quam quadratum ex BA ad quadratum ex AΓ; erit quadratum ex EΔ, quod [per 18. huj.] eſt maximum, utroque quadrato ex BA vel ex AΓ majus. quadratum vero ex ΔZ minimum erit, & utroque quadrato ex BA vel ex AΓ minus, per antecedens theorema: quare recta EΔ major eſt utrâque ipſarum BA, AΓ; & ΔZ utrâque minor: circulus igitur, qui centro B & intervallo ipſi EΔ æquali deſcribitur, videlicet KΛ, tranſibit ultra rectam BA; & circulus centro Γ intervalloque æquali ipſi ΔZ deſcriptus, hoc eſt MN, ſecabit ipſam AΓ: qui quidem duo circuli KΛ, MN ſeſe invicem ſecabunt, ut mox demonſtrabitur. ſecent autem ſeſe in puncto Ξ; & jungantur ΞA, ΞB, ΞH, ΞΓ: eſt igitur BΞ ipſi EΔ æqualis, & ΞΓ æqualis ipſi ΔZ, eratque BΓ æqualis ipſi EZ; quare totum triangulum BΞΓ triangulo BΔZ eſt æquale; ac propterea ΞH æqualis ipſi ΔΘ, hoc eſt ipſi AH: unde

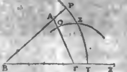
[I] N   conſequitur

conſequitur angulum ΞAH acutum eſſe. & quoniam BA non eſt minor quam AΓ, angulus AHB [per 25.1.] angulo AHΓ non erit minor: angulus igitur AHΓ non eſt major recto. erat autem ΞAH angulus recto minor; ergo anguli AHΓ, ΞAH duobus rectis minores ſunt, ac proinde recta AΞ ipſi HΓ non eſt parallela. ducatur per A ipſi BΓ parallela recta AΠ; & protrahatur BΞ ad Π, junganturque ΓΠ: triangulum igitur ABΓ [per 38.1.] triangulo BΠΓ eſt æquale; & idcirco BAΓ majus eſt ipſo BΞΓ, hoc eſt triangulo BΔZ. quod erat demonſtrandum.



Circulos autem KΛ, MN ſeſe invicem ſecare, hoc modo demonſtrabitur.

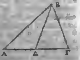
Sit enim lateri majori EΔ æqualis BAP; ac ponatur ΓΣ ipſi ΔZ æqualis, in directum ipſi BΓ: tota igitur BΣ æqualis eſt utriſque EZ, ZΔ. & quoniam EZ, ZΔ ſimul excedunt ipſam BΔ, erit & BΣ ipſâ EΔ major: itaque circulus centro B & intervallo BP deſcriptus ipſam ΓΣ ſecabit. ſecet ad T, ac intra circulum ducatur recta quædam ΓA major quam ΓΣ ſive ΔZ; itaque circulus centro Γ & intervallo ΓΣ deſcriptus occurret ipſi AΓ. occurrat ad O: circulus igitur, per puncta Σ, O tranſiens, per circumferentiam PT tranſibit neceſſario; atque adeo circuli KΛ, MN ſeſe invicem ſecabunt.



Prop. XX. *Theor.*

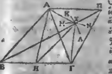
Si duo triangula, quorum latera inæqualia, baſes æquales habeant, itemque rectas quæ à vertice ad punctum quo biſecatur baſis ducuntur: minoris trianguli majus latus ad minus majorem rationem habebit quam majoris trianguli majus latus ad minus.

Sint triangula ABΓ, EZH, baſes AΓ, EH æquales habentia, quæ bifariam ſecentur in punctis Δ, Θ; & ſint æquales BΔ, ZΘ; ſit autem majus triangulum EZH; & ſit AB major quam BΓ, itemque EZ quam ZH major: dico AB ad BΓ majorem habere rationem quam EZ ad ZH.



Si enim non ita ſit, vel eandem rationem habebit, vel minorem. ſit primum, ſi fieri poteſt,

ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΑΗ γωνία. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ οὐκ ἔστιν ἐλάττων, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ ἄρα γωνία τῆς ὑπὸ ΑΗΓ οὐκ ἔστιν ἐλάττων· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΗΓ οὐ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ἡ δὲ ὑπὸ ΞΑΗ ὀρθῆς ἐλάσσων· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΓ, ΞΑΗ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν· οὐκ ἄρα ἡ ΑΞ τῇ ΗΓ παράλληλός ἐστιν. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Α τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΑΠ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΠ· τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΒΠΓ τριγώνῳ· καὶ τὸ ἄρα ΒΑΓ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΒΞΓ, τουτέστι τοῦ ΕΔΖ τριγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



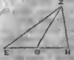
Ὅτι δὲ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ ΚΛ, ΜΝ κύκλοι, δεικτέον οὕτως.

Ἔστω γὰρ τῇ μὲν μείζονι πλευρᾷ τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΒΑΡ, τῇ δὲ ΔΖ ἴση ἡ ΓΣ, ἐπ' εὐθείας οὖσα τῇ ΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ΒΣ ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ΕΖ, ΖΔ. ἐπεὶ οὖν συναμφότερος ἡ ΕΖ, ΖΔ τῆς ΕΔ μείζων ἐστί, καὶ ἡ ΒΣ ἄρα τῆς ΒΔ μείζων ἐστίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΡ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν ΓΣ. τεμνέτω κατὰ τὸ Τ, καὶ ἤχθω ἐντὸς τοῦ κύκλου εὐθεῖά τις ἡ ΓΑ μείζων τῆς ΓΣ, τουτέστι τῆς ΔΖ· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΣ γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὴν ΑΓ. τεμνέτω κατὰ τὸ Ο· ἥξει ἄρα ὁ διὰ τῶν Σ, Ο κύκλος καὶ διὰ τῆς ΡΤ περιφερείας· τέμνουσιν ἄρα ἀλλήλους καὶ οἱ ΚΛ, ΜΝ κύκλοι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἀνισοσκελῆ τάς τε βάσεις ἴσας ἔχῃ, ἔχῃ δὲ καὶ τὰς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένας εὐθείας ἴσας· τοῦ ἐλάττονος ἡ μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τοῦ μείζονος μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΕΖΗ ἴσας ἔχοντα τάς τε ΑΓ, ΕΗ βάσεις, δίχα τετμημένας κατὰ τὰ Δ καὶ Θ σημεῖα, ἴσαι δὲ ἔστωσαν καὶ αἱ ΒΔ, ΖΘ· καὶ μεῖζον τὸ ΕΖΗ τρίγωνον, ἔστω δὲ ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΒΓ μείζων, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΗ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ.



Εἰ γὰρ μή, ἤτοι τὸν αὐτὸν ἢ ἐλάττονα ἕξει. ἔστω οὖν πρότερον, εἰ δυνατόν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ οὕτως ἡ

ΕΖ

ΕΖ πρὸς ΖΗ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ οὕτως τὸ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ· καὶ συνθέντι ἄρα καὶ ἐναλλὰξ ὡς συναμφότερον τὸ ἀπὸ ΑΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΓ πρὸς συναμφότερον τὸ ἀπὸ ΒΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΗ οὕτω τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ. ἀλλὰ συναμφότερον τὸ ἀπὸ ΑΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΓ συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ ΒΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΗ ἴσον· καὶ τὸ ἀπὸ ΒΓ ἄρα τῷ ἀπὸ ΖΗ ἴσον. ἄρα καὶ λοιπὸν τὸ ἀπὸ ΑΒ λοιπῷ τῷ ἀπὸ ΕΖ ἴσον. ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΖΗ. ἀλλὰ καὶ αἱ βάσεις ἴσαι· πάντα ἄρα πᾶσιν ἴσα· ἴσον ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΖΗ, ὅπερ ἄτοπον, ἦν γὰρ ἔλαττον τὸ ΑΒΓ· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ λόγον ἔχει ὃν ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ.

Ἀλλ᾽, εἰ δυνατόν, ἐχέτω ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ ἐλάττονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ. ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ· τὸ ἄρα ΕΖΗ τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ, διὰ τὰ δειχθέντα· ὅπερ ἄτοπον. ὑπέκειτο γὰρ μεῖζον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ τὸν αὐτόν· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς ΖΗ.

ut AB ad BΓ ita EZ ad ZH; ergo ut quadratum ex AB ad quadratum ex BΓ ita quadratum ex EZ ad quadratum ex ZH; & componendo permutandoque ut quadrata ex AB, BΓ ſimul ad quadrata ex EZ, ZH ſimul ita quadratum ex BΓ ad quadratum ex ZH. ſed quadrata ex AB, BΓ ſimul [per 16. huj.] quadratis ex EZ, ZH ſunt æqualia: ergo & quadratum ex BΓ æquale eſt quadrato ex ZH: & idcirco reliquum quadratum ex AB reliquo ex EZ æquale erit: eſt igitur AB æqualis ipſi EZ, & BΓ ipſi ZH. ſed & baſes ſunt æquales: ergo triangulum ABΓ æquale eſt triangulo EZH, quod eſt abſurdum; erat enim triangulum ABΓ minus: igitur AB ad BΓ rationem non habet eandem quam EZ ad ZH.

Sed rurſus, ſi fieri poteſt, AB ad BΓ minorem rationem habeat quam EZ ad ZH; habebit igitur EZ ad ZH majorem rationem quam AB ad BΓ: quare triangulum EZH minus erit triangulo ABΓ, ex proxime [ad 19. huj.] demonſtratis, quod eſt abſurdum; ponebatur enim majus: ergo AB ad BΓ minorem rationem non habet quam EZ ad ZH. demonſtratum autem eſt neque eandem habere; reſtat igitur ut AB ad BΓ majorem habeat rationem quam EZ ad ZH.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κα΄.

Τὸν δοθέντα κῶνον σκαληνὸν τεμεῖν διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδῳ ποιοῦντι ἐν κώνῳ τρίγωνον ἰσοσκελές.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κῶνος σκαληνὸς, οὗ ἄξων μὲν ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ ΓΕΔ κύκλος· καὶ δέον ἔστω τεμεῖν αὐτὸν ὡς ἐπιτέτακται. τετμήσθω πρῶτον διὰ τοῦ ἄξονος τῷ ΑΓΔ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθὰς ὄντι τῷ ΓΕΔ κύκλῳ, καὶ ἤχθω ἡ ΑΗ κάθετος, ἥτις πεσεῖται ἐπὶ τὴν ΓΔ βάσιν τοῦ ΑΓΔ τριγώνου, καὶ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἡ ΕΖ, καὶ διὰ τῆς ΕΖ καὶ τῆς Α κορυφῆς ἐκβεβλήσθω ἐπίπεδον ποιοῦν τὸ ΑΒΖ τρίγωνον· λέγω ὅτι τὸ ΑΕΖ τρίγωνον ἰσοσκελές ἐστι.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΗ, ΖΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΓΔ τὴν ΒΖ πρὸς ὀρθὰς τέμνουσα δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ ΒΗ τῇ ΖΗ. καὶ κοινὴ ἡ ΑΗ, καὶ ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΗΕ, ΑΗΖ γωνιῶν· καὶ ἡ ΒΑ ἄρα τῇ ΑΖ ἴση ἐστίν· ἰσοσκελὲς ἄρα τὸ ΑΕΖ τρίγωνον. ἐκ δὴ τούτου φανερόν ἐστιν, ὅτι πάντα τὰ συνιστάμενα τρίγωνα, τὰς βάσεις ἔχοντα πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ, ἰσοσκελῆ ἐστιν.

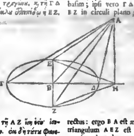
Ἔτι δεικτέον ὅτι ἐὰν τὰ γινόμενα τρίγωνα τὰς βάσεις μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχῃ τῇ ΓΔ, οὐκ ἔσται ἰσοσκελῆ.

Ὑποκείσθω γὰρ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ἡ ΕΖ μὴ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ· αἱ ΒΗ, ΖΗ ἄρα ἄνισοί εἰσι. κοινὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐταῖς· καὶ αἱ ἄρα ΕΑ, ΑΖ ἄνισοί εἰσι· τὸ ΕΑΖ ἄρα τρίγωνον οὐκ ἔστιν ἰσοσκελές.

Prop. XXI. *Probl.*

Datum conum ſcalenum plano per verticem ita ſecare, ut in cono triangulum æquicrure fiat.

Sit datus conus ſcalenus, cujus axis AB, & baſis ΓEΔ circulus: oporteatque eum modo jam dicto ſecare. ſecetur primo [per 14. huj.] per axem plano AΓΔ ad rectos angulos ipſi circulo ΓEΔ, & ducatur perpendicularis AH, quæ cadet in rectam ΓΔ trianguli AΓΔ baſim; ipſi vero ΓΔ ad rectos angulos agatur EZ in circuli plano; perque EZ & verticem A planum ducatur, quod faciat triangulum ABZ: dico triangulum ABZ æquicrure eſſe.



Jungantur enim EH, ZH. & quoniam ΓΔ ipſam EZ ſecans ad rectos angulos [per 3. 3.] biſariam ſecat; erit EH æqualis ipſi HZ. communis autem eſt AH, & uterque angulorum AHE, AHZ rectus: ergo EA eſt æqualis ipſi AZ, & idcirco triangulum AEZ eſt æquicrure. unde conſtat omnia triangula, quæ baſes habent ad rectos angulos ipſi ΓΔ, æquicrura eſſe.

Demonſtrandum etiam eſt ea triangula, quæ baſes habent non ad rectos angulos ipſi ΓΔ, non eſſe æquicrura.

Ponatur enim EZ, in eadem figura, non eſſe ad rectos angulos ipſi ΓΔ: & erunt EH, ZH inæquales. communis autem eſt AH & ad ipſas perpendicularis: ergo EA, AZ inæquales ſunt, & triangulum EAZ non eſt æquicrure.

Prop.

Prop. XXII. *Theor.*

Triangulorum, quæ in cono ſcaleno per axem ſecto fiunt, maximum eſt æquicrure; & minimum, quod eſt ad rectos angulos baſi coni: reliquorum vero maximo propinquius majus eſt eo quod plus diſtat ab eodem.

IN cono enim ſcaleno triangula per axem A B conſtituantur, æquicrure quidem A Γ Δ, rectum vero ad baſis planum A E Z: dico triangulorum omnium quæ per axem tranſeunt, A Γ Δ maximum eſſe, & A E Z minimum.

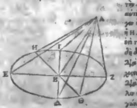
Sit enim aliud triangulum per axem A H Θ. & quoniam conus ſcalenus eſt, vergat axis A B ad partes Z; ergo [per 15. huj.] recta A E maxima eſt omnium quæ à puncto A ad baſis circumferentiam ducuntur, & A Z minima: adeoque E A major eſt quam A H, & Z A minor quam A Θ. itaque cum duo triangula A E Z, A H Θ baſes E Z, H Θ æquales habeant, & eandem rectam A B quæ à vertice ad punctum baſim bifariam ſecans ducitur, habeatque E A ad A Z majorem rationem quam H A ad A Θ: erit [per 19. huj.] A E Z triangulum minus triangulo A H Θ. ſimili modo demonſtrabitur minus eſſe omnibus aliis triangulis per axem: ergo A E Z minimum eſt omnium triangulorum quæ per axem tranſeunt. rurſus in triangulis A H Θ, A Γ Δ, & baſes æquales ſunt, & eadem eſt quæ ducitur à vertice ad punctum baſim bifariam ſecans; habetque H A ad A Θ majorem rationem quam Γ A ad A Δ, ſunt enim Γ A, A Δ æquales: ergo triangulum H A Θ [per 19. huj.] minus eſt triangulo Γ A Δ. ſimiliter demonſtrabitur omnia triangula per axem ducta triangulo Γ A Δ minora eſſe; triangulum igitur A Γ Δ maximum eſt omnium triangulorum quæ per axem tranſeunt, ſicut A E Z minimum. quod erat demonſtrandum. eodem modo demonſtrabitur maximo propinquius majus eſſe eo quod plus diſtat.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κβ'.

Ἐν κώνῳ σκαληνῷ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος συνισταμένων τριγώνων μέγιστον μὲν ἔσται τὸ ἰσοσκελές, ἐλάχιστον δὲ τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ κώνου· τῶν δὲ λοιπῶν τὸ τοῦ μεγίστου ἔγγιον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπώτερον.

ΕΝ γὰρ κώνῳ σκαληνῷ διὰ τοῦ ΑΒ ἄξονος ἔστω τρίγωνα, ἰσοσκελὲς μὲν τὸ ΑΓΔ, ὀρθὸν δὲ πρὸς τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον τὸ ΑΕΖ· λέγω ὅτι πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων μέγιστον μέν ἐστι τὸ ΑΓΔ, ἐλάχιστον δὲ τὸ ΑΕΖ.

Ἔστω γὰρ διὰ τοῦ ἄξονος ἠγμένον ἄλλο τρίγωνον τὸ ΑΗΘ. καὶ ἐπεὶ σκαληνός ὁ κῶνος, κεκλίσθω ὁ ΑΒ ἄξων ἐπὶ τὰ τοῦ Ζ μέρη· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΑΕ πασῶν τῶν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν περιφέρειαν ἀγομένων εὐθειῶν, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΖ· ἡ μὲν ἄρα ΕΑ τῆς ΑΗ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ ΖΑ τῆς ΑΘ ἐλάττων. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΑΕΖ, ΑΗΘ ἴσας ἔχει βάσεις τὰς ΕΖ, ΗΘ, καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως τὴν αὐτὴν τὴν ΑΒ, καὶ μείζονα λόγον ἔχει ἡ ΕΑ πρὸς ΑΖ ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΘ· ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΖ τοῦ ΑΗΘ. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι καὶ πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων· ἐλάχιστον ἄρα τὸ ΑΕΖ πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων. πάλιν ἐπεὶ τῶν ΑΗΘ, ΑΓΔ τριγώνων αἵ τε βάσεις ἴσαι, καὶ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἡ αὐτή, καὶ ἔχει ἡ ΗΑ πρὸς ΑΘ μείζονα λόγον ἤπερ ἡ ΓΑ πρὸς ΑΔ, ἴσαι γὰρ αἱ ΓΑ, ΑΔ· τὸ ΗΑΘ ἄρα τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΓΑΔ τριγώνου. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα τοῦ ΓΑΔ ἐλάττονά ἐστι· μέγιστον ἄρα πάντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὸ ΑΓΔ, ἐλάχιστον δὲ τὸ ΑΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ὁμοίως δὴ δείκνυται ὅτι καὶ τὸ τοῦ μεγίστου ἔγγιον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπώτερον.



Prop. XXIII. *Probl.*

In dato cono ſcaleno à vertice ad circumferentiam baſis rectam ducere, ad quam maxima rationem datam habeat: oportet autem datam rationem eſſe majoris ad minus, & minorem eſſe ea quam habet maxima rectarum in cono ductarum ad minimam.

SIT conus datus baſim habens B Θ Γ circulum, cujus diameter B Γ, verticem vero punctum

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κγ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κῶνον σκαληνὸν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως εὐθεῖαν ἀγαγεῖν, πρὸς ἣν ἡ μεγίστη λόγον ἕξει δοθέντα. δεῖ δὲ τὸν δοθέντα λόγον μείζονος μὲν εἶναι πρὸς ἐλάττονα, ἐλάττονα δὲ εἶναι οὗ ὃν ἔχει ἡ μεγίστη τῶν ἐν τῷ κώνῳ πρὸς τὴν ἐλαχίστην.

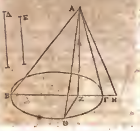
ΔΕΔΟΣΘΩ κῶνος, οὗ βάσις ὁ ΒΘΓ κύκλος, καὶ διάμετρος τοῦ κύκλου ἡ ΒΓ, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον.

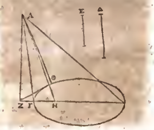
σημείου, πρὸς ὀρθὰς δὲ τῷ ΒΓ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΒΑ τῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου εὐθειῶν, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΑΓ. ἐπιτετάχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἀγαγεῖν εὐθεῖαν, πρὸς ἣν ἡ ΒΑ λόγον ἕξει ὃν ἔχει ἡ Δ εὐθεῖα μείζων οὖσα πρὸς τὴν Ε ἐλάττονα. ἐχέτω δὲ ἡ Δ πρὸς Ε λόγον ἐλάττονα τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΒΑ πρὸς ΑΓ.

Κατήχθω ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΖΗ, καὶ ὡς ἡ Δ πρὸς Ε οὕτως ἐχέτω ἡ ΒΑ πρὸς ἄλλην τινά, ἐχέτω δὲ πρὸς τὴν ΑΗ, ἥτις ἐναρμοζέσθω ὑπὸ τὴν ΑΖΗ γωνίαν· ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς ΑΗ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς ΑΓ· μείζων ἄρα ἡ ΗΑ τῆς ΑΓ καὶ ἡ ΗΖ τῆς ΖΓ. ἐπεὶ οὖν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς

Δ, & triangulum per axem ABΓ ad rectos angulos ipſi BΓ circulo: ergo BA rectarum quæ à vertice coni ducuntur maxima eſt, & AΓ minima. itaque oporteat à puncto A ad circumferentiam circuli ducere rectam, ad quam ipſa BA rationem habeat eandem quam habet recta linea Δ major ad E minorem. habeat autem Δ ad E minorem rationem quam BA ad AΓ.

Ducatur à puncto A ad BΓ perpendicularis AZ, producaturque BZH, & ut Δ ad E ita ſit BA ad aliam quampiam AH, quæ coaptetur ſub angulo AZH: ergo BA ad AH minorem rationem habet quam AB ad AΓ; & propterea HA major eſt quam AΓ, & HZ major quam ZΓ: quoniam igitur ut quadratum ex Δ ad quadratum ex E ita quadratum ex BA ad quadratum ex





ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ, μεῖζον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Δ τοῦ ἀπὸ τῆς Ε· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ, τουτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΒΖ, ΖΑ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΖ τοῦ ἀπὸ ΖΗ μεῖζον, καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΗ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΗ ἐλάττων· ἡ ἄρα ΖΗ τῆς μὲν ΖΓ μείζων ἐστί, τῆς δὲ ΖΒ ἐλάττων. ἐνηρμόσθω τοίνυν τῷ κύκλῳ τῇ ΖΗ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΘΖ τῇ ΖΗ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΖΑ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἑκατέρᾳ αὐτῶν· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΘΑ τῇ ΑΗ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Δ πρὸς Ε οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΘ, ἡ δὲ Δ πρὸς Ε ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἐστί· καὶ ἡ ΒΑ ἄρα πρὸς ΑΘ ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ ἐστίν· ἡ ΑΘ ἄρα διῆκται, πρὸς ἣν ἡ ΒΑ λόγον ἔχει τὸν ἐπιταχθέντα. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

AH, quadratum autem ex Δ majus eſt quadrato ex E: quare quadratum ex BA quadrato ex AH majus; hoc eſt quadrata ex BZ, ZA ſimul majora ſunt quadratis ex AZ, ZH ſimul. commune auferatur quadratum ex AZ; ergo reliquum quadratum ex BZ majus eſt quadrato ex ZH: & ideo erit BZ ipſa ZH major. erat autem ΓZ minor quam ZH: quare ZH major eſt quam ZΓ, & minor quam ZB. coaptetur igitur in circulo recta ZΘ ipſi ZH æqualis; & jungatur AΘ, itaque quoniam ΘZ ipſi ZH eſt æqualis, communis autem ZA, & utrique ipſarum ad rectos angulos: erit baſis ΘA æqualis baſi AH. ſed ut Δ ad E ita eſt BA ad AH, hoc eſt BA ad AΘ; eſtque Δ ad E in data ratione: ergo & BA ad AΘ in data ratione erit: ducta igitur eſt AΘ, ad quam ipſa BA rationem habet datam. quod erat faciendum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κδʹ.

Τριγώνου δοθέντος σκαληνοῦ, καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένης εὐθείας, ἄλλο μεῖζον τρίγωνον συστήσασθαι, ὥστε ἴσον μὲν ἔχειν τὴν βάσιν καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως τῇ τοῦ δοθέντος τριγώνου, λόγον δὲ ἔχειν πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον ὃν εὐθεῖά τις μείζων πρὸς ἐλάττονα· δεῖ δὲ τὰς τοιαύτας εὐθείας λόγον ἔχειν πρὸς ἀλλήλας μὴ μείζονα τοῦ

Prop. XXIV. *Probl.*

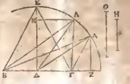
Dato triangulo ſcaleno, datâque eâ quæ à vertice ducta baſim ejus bifariam ſecat; ſuper eandem baſim, ac eâdem à vertice ad biſectionem baſis diſtantiâ, aliud majus triangulum conſtruere, quod ad datum triangulum datam habeat rationem majoris ad minus: oportet autem rationem illam datam non majorem eſſe eâ

Digitized by Google

quam habet ducta de vertice ad biſectionem baſis dati trianguli ad cathetum de vertice ejuſdem ad baſim demiſſam.

SIT datum triangulum ſcalenum A B Γ, cujus latus A B majus ſit latere A Γ, & baſis B Γ bifariam in Δ ſecetur, ducaturque A Δ; ſit autem E Δ perpendicularis ad B Γ, & æqualis ipſi Δ A; & ſit A Z ad eandem B Γ perpendicularis: oporteatque aliud triangulum conſtruere triangulo A B Γ majus, quod habeat ductam à vertice ad punctum baſim bifariam ſecans utrique ipſarum Δ E, Δ A æqualem, quodque ad triangulum A B Γ rationem eandem habeat quam Θ major ad H minorem. habeat autem Θ ad H non majorem rationem quam Δ A ad A Z.

Itaque centro Δ & intervallo Δ A circulus E A deſcribatur, qui per E tranſibit. & quoniam ratio Θ ad H non major eſt ratione Δ A vel Δ E ad A Z; erit vel eadem, vel minor. ſit primum eadem, & jungantur E B, E Γ. quoniam eſt ut Θ ad H ita E Δ ad A Z, & ut E Δ ad A Z ita rectangulum ſub E Δ, B Γ ad rectangulum ſub A Z, B Γ; [ergo ut Θ ad H ita rectangulum ſub E Δ, B Γ ad rectangulum ſub A Z, B Γ.] rectanguli autem ſub E Δ, B Γ dimidium eſt triangulum B E Γ, & rectanguli ſub A Z, B Γ dimidium eſt triangulum A B Γ: triangulum igitur B E Γ ad triangulum B A Γ eam rationem habet quam Θ ad H, hoc eſt datam.



Habeat deinde Θ ad H minorem rationem quam habet E Δ ad A Z; & fiat ut Θ ad H ita K Δ ad A Z, perque B ducatur B A ipſi Γ Δ parallela, & jungantur A B, A Γ. quoniam itaque ut Θ eſt ad H ita E Δ ad A Z; ut autem E Δ ad A Z ita B A Γ triangulum ad triangulum B A Γ: triangulum igitur B A Γ ad triangulum B A Γ datam habet rationem, videlicet quam habet Θ ad H; eſtque A Δ ipſi Δ A æqualis. quod erat faciendum.

Prop. XXV. *Probl.*

Datum conum ſcalenum ſecare per axem plano faciente in eo triangulum, ad minimum triangulorum per axem ductorum rationem datam habens: oportet autem datam rationem eſſe majoris ad minus, neque majorem eâ quam maximum triangulorum per axem habet ad minimum.

SIT datus conus ſcalenus, cujus axis A B, baſis circulus circa B centrum, minimum vero triangulorum per axem A Γ Δ: & opor-

ὃν ἔχει ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ δοθέντος τριγώνου ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένη πρὸς τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν πίπτουσαν κάθετον.

ΕΣΤΩ τρίγωνον δοθὲν τὸ ΑΒΓ σκαληνὸν, μείζονα ἔχον τὴν ΑΒ τῆς ΑΓ, ἡ δὲ ΒΓ βάσις τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἡ μὲν ΕΔ πρὸς ὀρθὰς ἔστω τῇ ΒΓ ἴση οὖσα τῇ ΔΑ, ἡ δὲ ΑΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ· καὶ δέον ἔστω ἄλλο τρίγωνον μεῖζον τοῦ ΑΒΓ συστήσασθαι, τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἴσην ἔχον ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΔΑ, καὶ προσέτι λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΑΒΓ ὃν ἡ Θ πρὸς Η μείζων πρὸς ἐλάττονα. ἐχέτω δὲ ἡ Θ πρὸς Η λόγον μὴ μείζονα ἤπερ ἡ ΔΑ πρὸς ΑΖ.

Κέντρῳ τῷ Δ, διαστήματι δὲ τῷ ΔΑ, γεγράφθω κύκλος· ἥξει δὴ καὶ διὰ τοῦ Ε, ἔστω δὲ ὁ ΕΑ. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς Θ πρὸς Η λόγος οὐ μείζων ἐστὶ τοῦ τῆς ΔΑ ἤτοι τῆς ΔΕ πρὸς ΑΖ, ἤτοι ὁ αὐτός ἐστιν ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ὁ αὐτός, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ, ΕΓ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Θ πρὸς τὴν Η οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς ΑΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς ΑΖ οὕτως τὸ ὑπὸ ΕΔ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΖ, ΒΓ, ἀλλὰ τοῦ μὲν ὑπὸ ΕΔ, ΒΓ ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, τοῦ δὲ ὑπὸ ΑΖ, ΒΓ ἥμισύ ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· καὶ τὸ ΒΕΓ ἄρα πρὸς τὸ ΒΑΓ λόγον ἔχει ὃν ἡ Θ πρὸς Η, τουτέστι τὸν ἐπιταχθέντα.

Ἀλλὰ δὴ ἐχέτω ἡ Θ πρὸς τὴν Η ἐλάττονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΔ πρὸς ΑΖ, γενέσθω δὲ ὡς ἡ Θ πρὸς Η οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΑΖ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΒ, ΛΓ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ Θ πρὸς τὴν Η οὕτως ἡ ΚΔ πρὸς ΑΖ, ὡς δὲ ἡ ΚΔ πρὸς ΑΖ οὕτως τὸ ΒΛΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΓ τρίγωνον· τὸ ἄρα ΒΛΓ πρὸς τὸ ΒΑΓ τὸν ἐπιταχθέντα ἔχει λόγον τὸν τῆς Θ πρὸς Η, ἔχει δὲ καὶ τὴν ΛΔ ἴσην τῇ ΔΑ. ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κε΄.

Τὸν δοθέντα κῶνον σκαληνὸν τεμεῖν διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τρίγωνον ἐν τῷ κώνῳ, ὃ τὸν δοθέντα λόγον ἕξει πρὸς τὸ ἐλάχιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων· δεῖ δὲ τὸν δοθέντα λόγον, μείζονος ὄντα πρὸς ἔλαττον, μὴ μείζονα εἶναι οὗ ἔχει τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ἐλάχιστον.

ΕΣΤΩ ὁ δοθεὶς κῶνος σκαληνὸς, οὗ ὁ ἄξων ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τὸ δὲ ἐλάχιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὸ ΑΓΔ· καὶ δέον

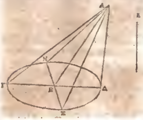
ἔστω

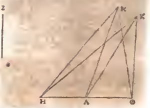
ἔστω διὰ τοῦ ΑΒ ἄξονος ἀγαγεῖν ἐπίπεδον ποιοῦν τρίγωνον, ὃ λόγον ἕξει πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, ὃν ἔχει ἡ Ε εὐθεῖα μείζων οὖσα πρὸς τὴν Ζ, μὴ μείζονα δὲ ἤπερ τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων πρὸς τὸ ἐλάχιστον τὸ ΑΓΔ. εἰ μὲν οὖν ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ λόγον ἔχει ὃν τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων πρὸς τὸ ἐλάχιστον, διὰ τοῦ Β πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ ἀγαγόντες εὐθεῖαν ἐν τῷ κύκλῳ, καὶ διὰ τῆς ἀχθείσης καὶ τοῦ ἄξονος ἐκβάλλοντες ἐπίπεδον, ἕξομεν τρίγωνον ἰσοσκελὲς, ὃ μέγιστόν ἐστι τῶν διὰ τοῦ ἄξονος, (τοῦτο γὰρ ἐδείχθη) καὶ ἕξει πρὸς τὸ ΑΓΔ λόγον τὸν τῆς Ε πρὸς τὴν Ζ, τουτέστι τὸν ἐπιταχθέντα.

Ἐχέτω δὲ νῦν ἡ Ε πρὸς Ζ ἐλάττονα λόγον ἤπερ τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων πρὸς τὸ ἐλάχιστον, καὶ κείσθω ἐκτὸς εὐθεῖα ἡ ΗΘ ἴση οὖσα τῇ ΓΔ, καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον, ὅμοιον ὂν τῷ ΑΓΔ, ὥστε καὶ τὴν ΚΗ τῇ ΑΓ ἴσην εἶναι, καὶ τὰς λοιπὰς ταῖς λοιπαῖς, καὶ ἐπὶ τῆς ΗΘ συνεστάτω τρίγωνον, ἴσην ἔχον τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν

teat eum plano per axem ΑΒ ducto ita ſecare, ut faciat triangulum, quod ad triangulum ΑΓΔ rationem quidem habeat eandem quam recta quædam Ε major ad Ζ minorem, non autem majorem eâ quam maximum triangulorum per axem habet ad minimum ΑΓΔ. ſi igitur Ε ad Ζ rationem habeat eandem quam maximum triangulorum per axem ad minimum, ducentes per Β rectam lineam in circulo ad rectos angulos ipſi ΓΔ, & ſecundum eam & axem planum producentes, habebimus triangulum illud æquicrure, quod maximum eſt omnium per axem tranſeuntium, ut [per 22. huj.] demonſtratum fuit; habebitque ad triangulum ΑΓΔ rationem eandem quam Ε ad Ζ, videlicet datam.

Sed habeat nunc Ε ad Ζ rationem minorem quam maximum triangulorum per axem ad minimum; & deſcribatur ſeorſum recta linea ΗΘ æqualis ipſi ΓΔ, & ſuper eam triangulum ΚΗΘ triangulo ΑΓΔ ſimile, ita ut ΚΗ ſit æqualis ipſi ΑΓ, & aliæ aliis indem æquales; præterea ſuper rectam ΗΘ conſtruatur [per præcedens] triangulum, habens eam quæ à vertice ad punctum ba-





τῆς βάσεως τῇ ΚΛ, καὶ λόγον ἔχον πρὸς τὸ ΚΗΘ ὃν ἡ Ε πρὸς Ζ. τὸ δὲ συνιστάμενον τρίγωνον τὴν κορυφὴν ἕξει ἐπὶ τὰ τοῦ Η μέρη, ὡς δειχθήσεται. ἔστω δὲ τὸ ΜΗΘ, ὥστε τὴν ΜΗ πλευρὰν τῆς ΜΘ μείζονα εἶναι. ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΛ τῇ ΛΚ ἴση, κοινὴ δὲ ἡ ΛΗ, μείζων δὲ ἡ ὑπὸ ΚΛΗ γωνία τῆς ὑπὸ ΜΛΗ· μείζων ἄρα ἡ ΚΗ τῆς ΜΗ. ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΓΑ ἴση· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων ἐστί. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΚΘ, τουτέστιν ἡ ΑΔ, τῆς ΜΘ ἐλάττων ἐστίν, ἡ δὲ ΜΘ τῆς ΜΗ ἐλάττων· ἡ ἄρα ΑΔ τῆς ΜΗ ἐστὶν ἐλάττων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΜΗ τῆς μὲν μεγίστης τῶν ἐν τῷ κώνῳ τῆς ΑΓ ἐλάττων ἐστί, τῆς δὲ ἐλαχίστης τῆς ΔΑ μείζων· δυνατὸν ἄρα εὐθεῖαν ἴσην τῇ ΜΗ ἀπὸ τῆς Α κορυφῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως ἀγαγεῖν, ὡς ἤδη μεμαθήκαμεν. ἤχθω δὴ καὶ ἔστω ἡ ΑΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΝΒΞ, καὶ ἡ ΑΞ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ μὲν ΑΝ τῇ ΜΗ, ἡ δὲ ΝΒ τῇ ΗΛ, ἡ δὲ ΒΑ τῇ ΛΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΝΒ τρίγωνον τῷ ΜΗΛ ἴσον ἐστί, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΛΗ ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΞ ἄρα τῇ ὑπὸ ΜΛΘ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΛΜ, ἡ δὲ ΒΞ τῇ ΛΘ, ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΞ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΜΛΘ· ἴση ἄρα ἡ ΑΞ τῇ ΜΘ. ἦν δὲ καὶ ἡ ΑΝ τῇ ΜΗ, καὶ ἡ ΝΞ βάσις τῇ ΗΘ·

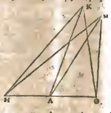
ſim bifariam ſecans ducitur ipſi ΚΛ æqualem; habenſque ad triangulum ΚΗΘ rationem eandem quam Ε ad Ζ. erit autem conſtructi trianguli vertex ad partes Η, ut mox demonſtrabitur. ſit autem illud triangulum ΜΗΘ, ita ut latus ΜΗ ſit majus ipſo ΜΘ. quoniam igitur ΜΛ eſt æqualis ipſi ΛΚ, & ΛΗ communis, angulus autem ΚΛΗ major angulo ΜΛΗ; erit ΚΗ major ipſa ΜΗ. & eſt ΚΗ æqualis ipſi ΓΑ: ergo ΓΑ quam ΜΗ major erit. rurſus quoniam ΚΘ, hoc eſt ΑΔ, minor eſt quam ΜΘ, itemque ΜΘ minor quam ΜΗ; erit ΑΔ ipſa ΜΗ minor. itaque cum ΜΗ ſit minor quam ΑΓ maxima earum quæ in cono ducuntur, & major quam ΔΑ earundem minima; fieri poteſt ut à vertice Α ad baſis circumferentiam ducatur recta æqualis ipſi ΜΗ, quemadmodum antea [ad 23. hujus] didicimus. ducatur ergo & ſit ΑΝ, junganturque ΝΒΞ, ΑΞ. & quoniam ΑΝ eſt æqualis ipſi ΜΗ, & ΝΒ ipſi ΗΛ, & ΒΑ ipſi ΛΜ; erit totum ΑΝΒ triangulum triangulo ΜΗΛ æquale, angulusque ΑΒΝ æqualis angulo ΜΛΗ: quare & ΑΒΞ angulus ipſi ΜΛΘ æqualis. rurſus quoniam ΑΒ eſt æqualis ipſi ΛΜ, & ΒΞ ipſi ΛΘ, angulusque ΑΒΞ angulo ΜΛΘ: erit & ΑΞ æqualis ipſi ΜΘ. ſed ΑΝ æqualis erat ipſi ΜΗ, & baſis ΝΞ baſi ΗΘ: triangulum igitur

tur A N Ξ eſt æquale triangulo H M Θ. ſed triangulum H M Θ ad triangulum H K Θ, hoc eſt ad ipſum Γ A Δ, eandem habet rationem quam E ad Z: ergo & triangulum A N Ξ ad triangulum A Γ Δ rationem habet eandem quam E ad Z: factum eſt igitur A N Ξ triangulum per axem, quemadmodum proponebatur.

Quod ſi quis dicat triangulum majus triangulo H K Θ, ſuper ipſam H Θ deſcriptum, ad partes Θ verticem habere, abſurdum ſequetur. ſit enim ita, ſi fieri poteſt. & quoniam æquales ſunt K Λ, M Λ, communis autem Λ H, atque M Λ H angulus major eſt angulo K Λ H: igitur M H major eſt quam K H. eadem ratione demonſtrabitur K Θ major quam Θ M. & cum M H ſit major quam H K, & M Θ minor quam Θ K; habebit M H ad H K majorem rationem quam M Θ ad Θ K, permutandoque H M ad M Θ majorem quam H K ad K Θ: triangulum igitur H M Θ [per 19. huj.] triangulo H K Θ eſt minus, quod fieri non poteſt; (ſupponebatur enim majus) quare triangulum H M Θ non ad partes Θ, ſed ad eas ad quas eſt H, verticem habebit.

τὸ ἄρα Α Ν Ξ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ Η Μ Θ. ἀλλὰ τὸ Η Μ Θ πρὸς τὸ Η Κ Θ, τουτέστι πρὸς τὸ Γ Α Δ, λόγον ἔχει τὸν τῆς Ε πρὸς τὴν Ζ· καὶ τὸ Α Ν Ξ ἄρα πρὸς τὸ Α Γ Δ λόγον ἔχει ὃν ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ· ἦκται ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος τὸ Α Ν Ξ τρίγωνον, ὡς ἐπετέτακτο.

Εἰ δέ τις λέγει ὅτι τὸ συνιστάμενον ἐπὶ τῆς Η Θ τρίγωνον, μεῖζον ὑπάρχον τοῦ Η Κ Θ, ἐπὶ τὰ τοῦ Θ μέρη τὴν κορυφὴν ἕξει, συμβήσεται ἀδύνατον. ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, οὕτως. ἐπεὶ οὖν ἴσαι αἱ Κ Λ, Μ Λ, κοινὴ δὲ ἡ Λ Η, ἡ δὲ ὑπὸ Μ Λ Η γωνία μείζων τῆς ὑπὸ Κ Λ Η· μείζων ἄρα ἡ Μ Η τῆς Κ Η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ Κ Θ τῆς Θ Μ μείζων. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν Μ Η τῆς Η Κ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ Μ Θ τῆς Θ Κ ἐλάττων· ἡ ἄρα Μ Η πρὸς Η Κ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Μ Θ πρὸς Θ Κ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἡ Η Μ πρὸς Μ Θ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Η Κ πρὸς Κ Θ· ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ Η Μ Θ τοῦ Η Κ Θ, ὅπερ ἀδύνατον· (ὑπέκειτο γὰρ μεῖζον) οὐκ ἄρα ἐπὶ τὰ Θ μέρη τὴν κορυφὴν ἕξει τὸ τρίγωνον· ἐπὶ τὰ τοῦ Η ἄρα μέρη ἕξει.



Prop. XXVI. *Theor.*

Si conus ſcalenus plano per axem ſecetur ad rectos angulos ipſi baſi, & ea quæ à vertice facti trianguli ad baſim perpendicularis ducitur non minor ſit baſis ſemidiametro: erit triangulum, quod ad rectos angulos eſt baſi, majus quolibet alio extra axem in cono conſtituto, baſimque habente baſi dicti trianguli parallelam.

Conus enim, cujus vertex A, baſis autem circulus circa B centrum, ſecetur plano per axem quod faciat A Γ Δ triangulum, ad rectos angulos baſi coni; quæ vero à puncto A ad Γ Δ perpendicularis ducitur non ſit minor ſemidiametro baſis: dico triangulum A Γ Δ maximum eſſe è triangulis in cono conſtitutis ac baſes habentibus ipſi Γ Δ parallelas.

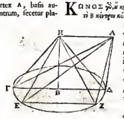
Ducatur enim in circulo recta E Z parallela ipſi Γ Δ, ſuper quam triangulum A E Z deſcribatur; in plano autem trianguli A Γ Δ, & ad rectos angulos ipſi Γ Δ, erigatur B H, & ducatur A H eidem Γ Δ parallela: erit igitur B H æqualis ei quæ à puncto A ad Γ Δ perpendicularis cadit. itaque junctis H Γ, H Δ, H E, H Z, concipiatur conus cujus vertex H, axis H B, & baſis circulus circa

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κϛ´.

Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ τμηθῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τοῦ δὲ γινομένου τριγώνου ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος μὴ ἐλάττων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τρίγωνον μέγιστον ἔσται πάντων τῶν ἐκτὸς τοῦ ἄξονος ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων, καὶ παραλλήλους βάσεις ἐχόντων τῇ τοῦ πρὸς ὀρθὰς τριγώνου.

Κῶνος γάρ, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τετμήσθω διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ ποιοῦντι τὸ Α Γ Δ τρίγωνον, πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν Γ Δ κάθετος μὴ ἐλάττων ἔστω τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· λέγω ὅτι τὸ Α Γ Δ τρίγωνον μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ συνισταμένων τριγώνων, βάσεις ἐχόντων παραλλήλους τῇ Γ Δ.

Διήχθω γὰρ ἐν τῷ κύκλῳ παράλληλος τῇ Γ Δ ἡ Ε Ζ, ἐφ' ἧς τὸ Α Ε Ζ τρίγωνον. ἐν δὲ τῷ τοῦ Α Γ Δ τριγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω τῇ Γ Δ ἡ Β Η, καὶ τῇ Γ Δ παράλληλος ἡ Α Η· ἡ Β Η ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν Γ Δ καθέτῳ. ἐπεζεύχθωσαν αἱ Η Γ, Η Δ, Η Ε, Η Ζ· νοηθήσεται δὴ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Η, ἄξων δὲ ἡ Η Β, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ



B κέντρον

Digitized by Google

Β κέντρου κύκλος, ἐν ᾧ τρίγωνα, διὰ μὲν τοῦ ἄξονος τὸ ΗΓΔ, ἐκτὸς δὲ τοῦ ἄξονος τὸ ΗΕΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΗ οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, διὰ τὰ προδεδειγμένα ἄρα τὸ ΗΓΔ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΗΕΖ, καὶ πάντων τῶν ἐν τῷ κώνῳ τριγώνων βάσεις ἐχόντων παραλλήλους τῇ ΓΔ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΗΓΔ τῷ ΑΓΔ ἴσον ἐστὶν (ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις) τὸ δὲ ΗΕΖ τῷ ΑΕΖ ἴσον· τὸ ἄρα ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ μεῖζόν ἐστιν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ πάντων τῶν παραλλήλους βάσεις ἐχόντων τῇ ΓΔ· τὸ ΑΓΔ ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν παραλλήλους βάσεις ἐχόντων τῇ ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

B centrum deſcriptus; atque in eo intelligantur triangula per axem quidem HΓΔ, extra axem vero HEZ. quoniam igitur BH non eſt minor ſemidiametro baſis, triangulum HΓΔ, ex jam demonſtratis [ad 5. huj.] majus erit triangulo HEZ, majuſque omnibus triangulis in cono conſtitutis, baſeſque habentibus ipſi ΓΔ parallelas. ſed triangulum HΓΔ æquale eſt triangulo AΓΔ, (quod ſit ſuper eandem baſim & inter eaſdem parallelas) triangulumque HEZ æquale eſt triangulo AEZ. ergo triangulum AΓΔ triangulo AEZ eſt majus. ſimiliter etiam majus demonſtrabitur quibuſvis aliis quæ baſes habent parallelas ipſi ΓΔ: triangulum igitur AΓΔ omnium ejuſmodi triangulorum maximum eſt. quod erat demonſtrandum.

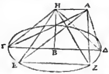
ΠΡΟΤΑΣΙΣ κζ.

ΕΑΝ δὲ ἡ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐλάσσων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ ΑΓΔ οὐκ ἔσται μέγιστον τῶν τὰς παραλλήλους τῇ ΓΔ βάσεις ἐχόντων τριγώνων. ἡ δὲ αὐτὴ δεῖξις καὶ καταγραφή.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΗΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ ἄρα ΗΓΔ οὐκ ἔσται μέγιστον τῶν παραλλήλους αὐτῷ βάσεις ἐχόντων. ἐδείχθη γὰρ καὶ μείζονα αὐτοῦ συνιστάμενα, καὶ ἐλάσσονα, καὶ ἴσα. εἰ μὲν οὖν ἔλαττον τὸ ΗΓΔ τοῦ ΗΕΖ, ἔλαττον ἔσται καὶ τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ· εἰ δὲ μεῖζον τὸ ΗΓΔ τοῦ ΗΕΖ, μεῖζον καὶ τὸ ΑΓΔ τοῦ ΑΕΖ· εἰ δὲ ἴσον καὶ ἴσον ὁμοίως.

Prop. XXVII. *Theor.*

AT ſi perpendicularis à puncto A ad ΓΔ ducta minor fuerit ſemidiametro baſis; triangulum AΓΔ non erit maximum omnium baſes ipſi ΓΔ parallelas habentium. demonſtratio autem & figura eadem eſt.



Quoniam enim HB minor eſt ſemidiametro baſis; triangulum HΓΔ non erit maximum omnium quæ baſes habent ipſi parallelas; ſi quidem uti demonſtravimus, [ad 10. huj.] & eo majora triangula, & minora, & æqualia conſtitui poſſunt. quod ſi triangulum HΓΔ minus ſit triangulo HEZ, & AΓΔ triangulum triangulo AEZ minus erit; & ſi majus, majus; & ſi æquale ſimiliter æquale erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κη'.

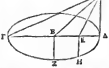
Ἐὰν ἐν σκαληνῷ κώνῳ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις, ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστῇ, ὁ δὲ ἄξων τοῦ κώνου μὴ ἐλάσσων ᾖ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μέγιστον ἔσται πάντων τῶν ἰσοσκελῶν τῶν συνισταμένων ἐφ' ὃ μέρος προσνεύει ὁ ἄξων.

Prop. XXVIII. *Theor.*

Si in cono ſcaleno planis per verticem ſecto, ſuper baſes parallelas triangula æquicrura fiant, ſitque axis coni non minor ſemidiametro baſis: triangulum æquicrure per axem tranſiens majus erit quovis æquicruri ad eam partem ad quam axis inclinat conſtituti.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ ἄξων μὲν ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ τριγώνου διὰ τοῦ ἄξονος ἠγμένου βάσις ἔστω ἡ ΓΒΔ, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἐλάσσων ἔστω ὀρθῆς, ὥστε τὸν ΑΒ ἐπὶ τὰ Δ μέρη προσνεύειν, καὶ ἔστω ἡ ΑΒ μὴ ἐλάσσων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι τὸ διὰ τοῦ ΑΒ ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστι τῶν γινομένων ἰσοσκελῶν τριγώνων, τῶν μεταξὺ τῶν Β, Δ σημείων τὰς βάσεις ἐχόντων.

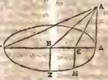
SIT conus cujus axis AB, baſis circulus circa B centrum, baſis vero trianguli per axem conſtituti ad rectos angulos ipſi circulo ſit ΓBΔ; & angulus ABΔ minor ſit angulo recto, ita ut AB ad partes Δ inclinet; ſitque AB non minor ſemidiametro baſis: dico triangulum æquicrure per AB tranſiens majus eſſe æquicruribus omnibus inter puncta B, Δ baſes habentibus.



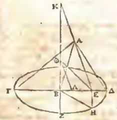
Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ε, καὶ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ αἱ ΒΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ· ἡ δὴ ΒΑ τῆς ΑΕ ἤτοι ἐλάσσων

Sumatur enim utcunque in recta BΔ punctum E, & ipſi ΓΔ ad rectos angulos ducantur in circulo BZ, EH, & jungatur AE. itaque BA vel minor

eſt quam A E, vel non minor. ponatur primum B A non minor quam A E. igitur quoniam B A non minor eſt quam A E, & B H eſt minor quam B Z; ergo A B ad A E majorem rationem habet quam E H ad B Z: & idcirco [per 2. huj.] A B Z rectangulum majus eſt rectangulo A E H. ſed rectangulo A B Z æquale eſt triangulum baſim habens duplam ipſius B Z & altitudinem A B, hoc eſt triangulum æquicrure per axem; rectangulo autem A E H eſt æquale triangulum cujus baſis dupla eſt E H & altitudo A E: ergo triangulum æquicrure per axem majus eſt æquicruri per A E conſtituto. ſimiliter quoque triangulum per axem triangulis omnibus, quæ inter puncta B, Δ baſes habent, majus eſſe demonſtrabitur.



Sed jam ſit B A minor quam A E. & quoniam angulus A B E minor eſt recto, ducatur in plano trianguli A B E recta B Θ perpendicularis ipſi Γ Δ, ipſique E H ſit æqualis, & jungantur Θ E, B H. cum igitur angulus A B E angulo A E B ſit major, erit angulus A E B minor recto. rectus autem eſt Θ B E: ergo rectæ Θ B, A E productæ inter ſe convenient. conveniant ad punctum K: & per Θ ducatur Θ Λ ipſi K E parallela. itaque quoniam Θ B eſt æqualis ipſi E H, communis autem B E, & angulos æquales continent, videlicet rectos; erit B H ipſi Θ E æqualis. rurſus quoniam rectus eſt angulus Θ B Λ, recta Θ E major erit quam Θ Λ; adeoque B Θ ad Θ E minorem rationem habebit quam eadem B Θ ad Θ Λ. ut autem B Θ ad Θ Λ ita B K ad K E; quare B Θ ad Θ E minorem habet rationem quam B K ad K E. ſed B K ad K E habet minorem quam B A ad A E, ut in 29no theoremate oſtendetur; igitur B Θ ad Θ E multo minorem habebit rationem quam B A ad A E: ergo B A ad A E majorem rationem habet quam B Θ ad Θ E, hoc eſt quam E H ad H B ſive ad B Z. quoniam vero B A ad A E majorem habet rationem quam E H ad B Z, erit rectangulum A B Z majus rectangulo A E H. ſed rectangulo A B Z æquale eſt triangulum æquicrure per axem, & rectangulo A E H æquale eſt triangulum æquicrure per A E, cujus baſis ſit dupla ipſius E H: majus igitur eſt triangulum æquicrure per axem triangulo æquicruri per A E tranſeunte. eadem ratione demonſtrabitur majus aliis omnibus, quorum baſes inter puncta B, Δ habentur. quod erat demonſtrandum.



Prop. XXIX. *Theor.*

Si in triangulo orthogonio ab angulo recto ad hypotenuſam recta quædam

ἐστὶν, ἢ οὐκ ἔστιν ἐλάττων. ὑποκείσθω δὲ μὴ εἶναι ἐλάττων ἡ ΒΑ τῆς ΑΕ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΑ τῆς ΑΕ οὐκ ἐλάττων, ἐλάττων δὲ ἡ ΕΗ τῆς ΒΖ· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΑΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΗ πρὸς ΒΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον τὸ βάσιν ἔχον τὴν διπλῆν τῆς ΒΖ, ὕψος δὲ τὴν ΑΒ, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς, τῷ δὲ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ ἴσον ἐστὶ τὸ τρίγωνον τὸ βάσιν μὲν ἔχον τὴν διπλῆν τῆς ΕΗ, ὕψος δὲ τὴν ΑΕ· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μεῖζόν ἐστι τοῦ διὰ τῆς ΑΕ ἰσοσκελοῦς. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ πάντων τῶν μεταξὺ τῶν Β, Δ τὰς βάσεις ἐχόντων μέγιστόν ἐστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ ΒΑ τῆς ΑΕ ἐλάττων. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἤχθω ἐν τῷ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΘ, ἴση οὖσα τῇ ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΕ, ΒΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΕΒ μείζων ἐστὶν, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΘΒΕ· αἱ ἄρα ΘΒ, ΑΕ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ τῇ ΚΕ παράλληλος ἡ ΘΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΘΒ τῇ ΕΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας, ὀρθὰς γάρ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΒΗ τῇ ΘΕ. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΘΒΛ, μείζων ἄρα ἡ ΘΕ τῆς ΘΛ· ἡ ΒΘ ἄρα πρὸς ΘΕ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΘΛ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΛ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΕ· ἡ ἄρα ΒΘ πρὸς ΘΕ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΚ πρὸς ΚΕ. ἡ δὲ ΒΚ πρὸς ΚΕ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ, ὡς ἐν τῷ ἑξῆς δείκνυται· πολλῷ ἄρα ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ· ἡ ἄρα ΒΑ πρὸς ΑΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ, τουτέστι πρὸς ΒΖ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΗ πρὸς ΒΖ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ ἴσον ἐστὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς, τῷ δὲ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ ἴσον ἐστὶ τὸ διὰ τῆς ΑΕ καὶ τῆς διπλῆς τῆς ΕΗ ἰσοσκελές· μεῖζον ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τῆς ΑΕ ἰσοσκελοῦς. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ τῶν ἄλλων ὧν αἱ βάσεις μεταξὺ τῶν Β, Δ σημείων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ κθ'.

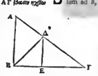
Ἐὰν ὀρθογωνίου τριγώνου ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἀχθῇ τις εὐθεῖα· ἡ

ἀχθεῖσα

ἀχθεῖσα πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ μιᾶς τῶν περιεχουσῶν τὴν ὀρθὴν, μείζονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ λοιπὴ τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.

ducatur; habebit ducta ad eam hypotenuſæ partem, quæ inter ipſam & alteram continentium angulum rectum interjicitur, majorem rationem quam reliqua rectum angulum continentium ad totam hypotenuſam.

ΕΣΤΩ τρίγωνον τὸ ABΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ B γωνίαν, ἀφ' ἧς ἐπὶ τὴν AΓ βάσιν ἤχθω ἡ BΔ· λέγω ὅτι ἡ BΔ πρὸς ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ BA πρὸς AΓ.



Ἤχθω διὰ τοῦ Δ παρὰ τὴν AB ἡ ΔE. ἐπεὶ οὖν ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τῷ E γωνίαι, μείζων ἄρα ἡ BΔ τῆς ΔE· ἡ ἄρα BΔ πρὸς ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ EΔ πρὸς ΔΓ. ὡς δὲ ἡ EΔ πρὸς ΔΓ οὕτως ἡ BA πρὸς AΓ· ἡ BΔ ἄρα πρὸς ΔΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ BA πρὸς AΓ· ὥστε φανερὸν ὅτι καὶ ἡ BA πρὸς AΓ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ BΔ πρὸς ΔΓ. ὃ ἐχρησίμευεν ἡμῖν εἰς τὸ πρὸ τούτου.

SIT triangulum ABΓ rectum habens angulum ad B, à quo ad baſim AΓ ducatur recta aliqua BΔ: dico BΔ ad ΔΓ majorem rationem habere quam BA ad AΓ.

Ducatur enim per Δ recta ΔE ipſi AB parallela. & quoniam recti anguli ſunt ad E, major erit BΔ quam ΔE: ergo BΔ ad ΔΓ majorem habet rationem quam EΔ ad ΔΓ. ſed ut EΔ ad ΔΓ ita BA ad AΓ: majorem igitur rationem habebit BΔ ad ΔΓ quam BA ad AΓ; ac proinde BA ad AΓ minorem habet rationem quam BΔ ad ΔΓ. id quod ad antecedens uſurpavimus.

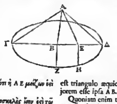
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λʹ.

Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις ποιῇ, ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστῇ, ἐφ' ἃ μέρη προσνεύει ὁ ἄξων, τῶν δὲ γενομένων ἰσοσκελῶν ἓν ὁποιονοῦν ἴσον ᾖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ· ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου κάθετος μείζων ἔσται τοῦ ἄξονος.

Prop. XXX. *Theor.*

Si, cono ſcaleno planis per verticem ſecto, ſuper baſes parallelas æquicrura triangula habeantur, ad eam partem ad quam axis inclinat, & dictorum triangulorum unum aliquod æquale ſit triangulo æquicruri per axem: recta linea, quæ à vertice ad baſim trianguli perpendicularis ducitur, ipſo axe major erit.

ΕΣΤΩ σκαληνὸς κῶνος, οὗ κορυφὴ τὸ A, ἄξων δὲ ὁ AB προσνεύων ἐπὶ τὰ τοῦ Δ μέρη, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ B κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου βάσις ἔστω ἡ ΓBΔ, καὶ ἤχθωσαν τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ κύκλῳ αἱ BZ, EH, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AE, καὶ ὑποκείσθω τὸ διὰ τῶν AE, EH ἰσοσκελὲς ἴσον εἶναι τῷ διὰ τῶν AB, BZ, τουτέστι τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ· λέγω ὅτι ἡ AE μείζων ἐστὶ τῆς AB.



Ἐπεὶ τὸ διὰ τῶν AE, EH ἰσοσκελὲς ἴσον ἐστὶ τῷ διὰ τῶν AB, BZ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EH ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AB, BZ· ὡς ἄρα ἡ BZ πρὸς EH οὕτως ἡ EA πρὸς AB. μείζων δὲ ἡ BZ τῆς EH· μείζων ἄρα καὶ ἡ EA τῆς AB.

SIT conus ſcalenus cujus vertex A, axis AB ad partes Δ inclinans, & baſis circulus circa centrum B; baſis autem trianguli per axem ad rectos angulos circulo ſit ΓBΔ, & ad ipſam ΓΔ perpendiculares BZ, EH in circulo ducantur, jungaturque AE; & ponatur triangulum æquicrure per AE, EH tranſiens æquale eſſe triangulo per AB, BZ, hoc eſt triangulo æquicruri per axem: dico AE majorem eſſe ipſa AB.

Quoniam enim triangulum æquicrure per AE, EH æquale eſt triangulo per AB, BZ; erit rectangulum AEH æquale rectangulo ABZ: ut igitur [per 14. 6.] BZ ad EH ita EA ad AB. ſed BZ eſt major quam EH; ergo & EA quam AB major erit.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λαʹ.

Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις ποιῇ, ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσο-

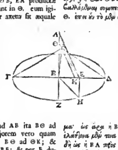
Prop. XXXI. *Theor.*

Si, cono ſcaleno per verticem planis ſecto, ſuper baſes parallelas æquicrura

crura triangula conſtituantur, ad eam partem ad quam axis inclinat, & dictorum triangulorum unum aliquod æquale ſit triangulo æquicruri per axem: axis coni ſemidiametro baſis minor erit.

SIT conus ſcalenus cujus vertex A, axis AB ad partes Δ inclinans, & baſis circulus circa B centrum; baſis vero trianguli per axem ad rectos angulos circulo ſit ΓΒΔ, & ad ipſam ΓΔ perpendiculares in circulo ducantur BZ, EH, jungaturque AE; & ponatur triangulo per AB & duplam ipſius BZ tranſeunti, hoc eſt triangulo æquicruri per axem, æquale triangulum æquicrure per AE & duplam ipſius EH ductum: dico axem AB ſemidiametro baſis minorem eſſe.

Quoniam enim angulus ABE minor eſt recto, ducatur in plano trianguli ABE recta BΘ ad rectos angulos ipſi ΓΔ. & quoniam EA major eſt quam AB, uti in antecedente demonſtratum eſt, angulus BEA minor erit recto. rectus autem eſt ΘBE: ergo ΘB, EA productæ inter ſe convenient. conveniant in Θ. cum igitur triangulum æquicrure per axem ſit æquale rectangulo ABZ, triangulum vero æquicrure per AE & duplam ipſius EH æquale ſit rectangulo AEH; & ſint triangula æquicrura inter ſe æqualia; erit rectangulum ABZ rectangulo AEH æquale: adeoque ut BA ad AE ita HE ad ZB, hoc eſt ad HB. ſed BA ad AE majorem habet rationem quam BΘ ad ΘE, per vigeſimam nonam hujus: ergo ut BA ad AE ita BΘ ad minorem quam ΘE, ad majorem vero quam ΘB. ſit ut BA ad AE ita BΘ ad ΘK; & coaptetur ΘK ſub angulo ΘBE; & per E ducatur EA parallela ipſi KΘ, convenienſque cum BΘ in A. itaque quoniam BA eſt ad AE ſicut BΘ ad ΘK, hoc eſt BA ad AE; ut autem BA ad AE ita EH ad HB; erit ut BA ad AE ita EH ad HB. quoniam igitur duo triangula ABE, HEB unum angulum uni angulo æqualem habent, nempe rectum; circa alios autem angulos qui ad A, H latera habent proportionalia; & reliquorum angulorum uterque eſt acutus: ergo [per 7. 6.] triangula ABE, HEB inter ſe ſimilia ſunt, & erit ut AB ad BE ita HE ad EB: quare AB ipſi HE eſt æqualis. minor autem eſt EH ſemidiametro baſis; quare & BA ſemidiametro baſis minor erit. & quoniam [per 21. 1.] utræque EA, AB ſimul majores ſunt utriſque EA, AB ſimul; atque eſt ut EA ad AB ita EA ad AB: componendo igitur ut utræque EA, AB ſimul ad BA ita utræque EA, AB ſimul ad BA, permutandoque. ſed majores ſunt utræque EA, AB utriſque EA, AB: quare & AB major erit quam BA. oſtenſa



σκαλῆ τρίγωνα συστῇ, ἐφ' ὃ μέρος προσνεύει ὁ ἄξων, τῶν δὲ γινομένων ἰσοσκελῶν ἓν ὁποῖον ἴσον ᾖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ· ὁ ἄξων τοῦ κώνου ἐλάσσων ἔσται τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

ΕΣΤΩ κῶνος σκαληνὸς, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ νεύων ἐπὶ τὰ τοῦ Δ μέρη, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τοῦ δὲ πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ διὰ τοῦ ἄξονος ἀγομένου τριγώνου βάσις ἔστω ἡ ΓΒΔ, τῇ δὲ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ αἱ ΒΖ, ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ ὑποκείσθω τῷ διὰ τῆς ΑΒ καὶ τῆς διπλῆς τῆς ΒΖ ἀγομένῳ τριγώνῳ, τουτέστι τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ, τὸ διὰ τῆς ΕΑ καὶ τῆς διπλῆς τῆς ΕΗ ἀγόμενον ἰσοσκελὲς ἴσον εἶναι· λέγω ὅτι ὁ ΒΑ ἄξων ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου.

Ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἤχθω ἐν τῷ τοῦ ΑΒΕ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΘ. καὶ ἐπεὶ μείζων ἡ ΕΑ τῆς ΑΒ, διὰ τὸ πρὸ τούτου· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΕΑ γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΘΒΕ· αἱ ἄρα ΘΒ, ΕΑ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν διὰ τοῦ ἄξονος ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ, τὸ δὲ διὰ τῆς ΑΕ καὶ τῆς διπλῆς τῆς ΕΗ ἰσοσκελὲς ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ, καὶ ἔστιν ἴσα ἀλλήλοις τὰ ἰσοσκελῆ· καὶ τὸ ὑπὸ ΑΒ, ΒΖ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕ, ΕΗ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς ΖΒ, τουτέστι πρὸς ΗΒ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ, διὰ τὸ κθ΄. θεώρημα· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ἐλάττονα μέν τινα τῆς ΘΕ, μείζονα δὲ τῆς ΘΒ. ἔστω δὴ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΚ, καὶ ἐνηρμόσθω ἡ ΘΚ ὑπὸ τὴν ΘΒΕ γωνίαν, καὶ διὰ τοῦ Ε παρὰ τὴν ΚΘ ἤχθω ἡ ΕΛ συμπίπτουσα τῇ ΒΘ κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΚ, τουτέστιν ἡ ΒΛ πρὸς ΛΕ, ἦν δὲ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΕ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΛ πρὸς ΛΕ οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΛΒΕ, ΗΕΒ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχει, (ὀρθογώνια γάρ) περὶ δὲ τὰς ἄλλας γωνίας τὰς Λ, Η τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, καὶ τῶν λοιπῶν γωνιῶν ἑκατέρα ὀξεῖα· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ ΛΒΕ, ΗΕΒ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΛΒ πρὸς ΒΕ οὕτως ΗΕ πρὸς ΕΒ· ἴση ἄρα ἡ ΛΒ τῇ ΗΕ. ἐλάττων δὲ ἡ ΕΗ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· ἐλάττων ἄρα ἡ ΛΒ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. καὶ ἐπεὶ συναμφότερος ἡ ΕΛ, ΛΒ συναμφοτέρου τῆς ΕΑ, ΑΒ μείζων ἐστὶ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΛ πρὸς ΛΒ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ· καὶ συνθέντι ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΕΛ, ΛΒ πρὸς ΒΛ οὕτως συναμφότερος ἡ ΕΑ, ΑΒ πρὸς ΒΑ, καὶ ἐναλλάξ. μείζων δὲ συναμφότερος ἡ ΕΛ, ΛΒ συναμφοτέρου τῆς ΕΑ, ΑΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΒ τῆς ΒΑ. ἐδείχθη

Digitized by Google

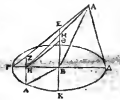
ἐστὶ δὲ ἡ ΑΒ ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου· πολλῷ ἄρα ἡ ΒΑ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λβ΄.

Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τισὶν, ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστῇ, ἀφ᾽ οὗ μέρους ἀποκλίνει ὁ ἄξων· τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν συσταθέντων ἰσοσκελῶν οὐκ ἔσται πάντων ἐλάχιστον.

Ἔστω κῶνος σκαληνὸς, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ, τοῦ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῷ κύκλῳ ἐπιπέδου καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ ΓΒΔ διάμετρος, ἐλάττων δὲ ἔστω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ὀρθῆς· λέγω ὅτι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν συνισταμένων ἰσοσκελῶν, τὰς βάσεις ἐχόντων μεταξὺ τῶν Γ, Β σημείων, οὐ πάντων ἐλάχιστόν ἐστιν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω τῇ ΓΔ ἡ ΒΕ, καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΕ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἡ ΕΖ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ παρὰ τὴν ΕΒ ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΜΗ, καὶ παρὰ τὴν ΖΕ ἤχθω ἡ ΗΘ· παραλληλόγραμμον ἄρα τὸ ΖΘ, ἴση γὰρ ἡ ΖΕ τῇ ΗΘ· ἡ ἄρα ΗΘ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἴση. ἤχθωσαν δὴ πάλιν ἐν τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΚΒ, ΗΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΛ. ἐπεὶ οὖν δύο ὀρθογώνια τὰ ΘΗΒ, ΛΒΗ ἴσας ἔχει γωνίας τὰς ὀρθὰς, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, καὶ τὰ λοιπὰ τῆς προτάσεως· ὅμοια ἄρα ἐστὶ τὰ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΒΛ πρὸς ΛΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ΗΜ πρὸς ΜΒ, ἡ δὲ ΗΜ πρὸς ΜΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ· ἡ ἄρα ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΒΛ, τουτέστιν ἡ ΒΚ, πρὸς ΛΗ· ἡ ἄρα ΒΚ πρὸς ΛΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΚ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΛΗ, ΗΑ, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μεῖζόν ἐστι τοῦ διὰ τῆς ΛΗ ἰσοσκελοῦς, οὗ βάσις ἐστὶν ἡ διπλῆ τῆς ΛΗ. οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς ἐλάχιστόν ἐστι πάντων τῶν μεταξὺ τῶν Β, Γ σημείων τὰς βάσεις ἐχόντων ἰσοσκελῶν.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λγ΄.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως δύο τρίγωνα συστῇ, καὶ τοῦ μὲν ἑτέρου ἡ πλευρὰ πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει, τοῦ δὲ ἑτέρου πρὸς ἀμβλεῖαν, τὸ δὲ τοῦ ἀμβλυγω-

est autem AB minor ſemidiametro baſis; quare & BA ſemidiametro baſis multo minor erit. quod erat demonſtrandum.

Prop. XXXII. *Theor.*

Si, cono ſcaleno planis per verticem ſecto, ſuper baſes parallelas triangula æquicrura conſtituantur, ad eam partem à qua axis declinat: triangulum æquicrure per axem tranſiens non erit omnium ejuſmodi æquicrurum triangulorum minimum.

SIT conus ſcalenus cujus vertex A, axis AB, [baſis circulus circa B centrum] plani vero per axem ad rectos angulos circulo ducti & ipſius circuli communis ſectio ſit diameter ΓBΔ; ſitque ABΔ angulus recto minor: dico triangulum æquicrure per axem tranſiens non eſſe minus omni triangulo æquicruri inter puncta Γ, B baſin habente.

Jungatur enim AΓ; & in triangulo ABΓ ad rectos angulos ipſi ΓΔ ducatur BE. quoniam itaque ΓE major eſt ſemidiametro baſis ΓB, capiatur EZ æqualis ſemidiametro, & ducatur ZH ipſi EB parallela; jungaturque AMH, & ducatur HΘ parallela ipſi ZE: ZΘ itaque parallelogrammum eſt, propterea quod ZE ipſi HΘ eſt æqualis; eſt igitur HΘ æqualis ſemidiametro baſis. denique in circuli plano ducantur KB, HΛ ad rectos angulos ipſi ΓΔ, & jungatur BΛ. quoniam igitur duo triangula orthogonia ΘHB, ΛBH æquales habent rectos angulos, & circa alios angulos latera proportionalia, & reliquorum uterque eſt acutus; erunt [per 7. 6.] ea triangula inter ſe ſimilia: & ideo ut HΘ ad ΘB ita BΛ ad ΛH. habet autem HΘ ad ΘB [per 2. huj.] majorem rationem quam HM ad MB; & HM ad MB item majorem quam HA ad AB: ergo HΘ ad ΘB majorem rationem habebit quam HA ad AB. ſed ut HΘ ad ΘB, ita BΛ ſive BK ad ΛH: quapropter BK ad ΛH majorem habet rationem quam HA ad AB: rectangulum igitur ABK [per 1. huj.] majus eſt rectangulo ΛHA, hoc eſt triangulum æquicrure per axem majus triangulo æquicruri per ΛH, cujus baſis eſt ipſius ΛH dupla: quare triangulum æquicrure per axem non minus eſt omni ejuſmodi triangulo inter puncta B, Γ baſin habente.

Prop. XXXIII. *Theor.*

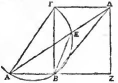
Si ſuper eandem baſin duo triangula conſtituantur, & unius quidem latus ſit ad rectos angulos baſi, alterius vero ad angulos obtuſos, ſitque amblygonii

amblygonii trianguli altitudo non minor altitudine orthogonii: angulus qui ad orthogonii verticem angulo qui ad verticem amblygonii major erit.

ὧν ὕψος μὴ ἔλαττον ἢ τοῦ ὀρθογωνίου ὕψους· ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία τοῦ ὀρθογωνίου μείζων ἔσται τῆς πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ ἀμβλυγωνίου.

Constituantur ſuper baſin ΑΒ triangula ΑΓΒ, ΑΔΒ, angulusque ΑΒΓ ſit rectus, & ΑΒΔ obtuſus; recta vero, quæ à puncto Δ ad ΑΒ baſim perpendicularis ducitur, videlicet ΔΖ, non minor ſit perpendiculari ΓΒ: dico angulum ΑΓΒ angulo ΒΔΒ majorem eſſe.

Quoniam enim parallelæ ſunt ΒΓ, ΔΖ, & ad rectos angulos ipſi ΑΒΖ, non minor autem ΔΖ quam ΓΒ; erit ΑΓΔ angulus non minor recto: quare [per 19. 1.] ΑΔ major erit quam ΑΓ. & cum triangulum ΑΒΓ orthogonium ſit, in ſemicirculo continetur [per 31. 3.] cujus diameter eſt ΑΓ: ergo deſcriptus circa ipſam ſemicirculus rectam ΑΔ ſecabit. ſecet in Ε, & jungatur ΒΒ: erit igitur angulus ΑΒΒ [per 21. 3.] æqualis angulo ΑΓΒ. ſed angulus ΑΕΒ [per 16. 1.] eſt major ipſo ΑΔΒ: ergo ΑΓΒ angulus angulo ΑΔΒ major erit.



ΣΥΝΕΣΤΑΤΩ ἐπὶ τῆς ΑΒ τὰ ΑΓΒ, ΑΔΒ τρίγωνα, καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ ἔστω ὀρθή, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΔ ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Δ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ΔΖ μὴ ἐλάττων ἔστω τῆς ΓΒ καθέτου· λέγω ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ γωνίας.

Ἐπεὶ παράλληλοι μέν εἰσιν αἱ ΒΓ, ΔΖ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΒΖ, οὐκ ἐλάττων δὲ ἡ ΔΖ τῆς ΓΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ γωνία οὐκ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒΓ ὀρθογώνιόν ἐστιν, ἐν ἡμικυκλίῳ ἄρα ἐστὶν οὗ διάμετρος ἡ ΑΓ· περιγραφὲν ἄρα τὸ ἡμικύκλιον τεμεῖ τὴν ΑΔ. τεμνέτω δὴ κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΒ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ.

Prop. XXXIV. *Theor.*

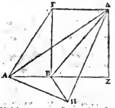
Iiſdem poſitis, ſi trianguli orthogonii angulus ad verticem non major ſit eo qui continetur ſub recta vertices triangulorum conjungente & latere amblygonii quod obtuſum angulum cum baſi efficit: ea quæ in triangulo orthogonio ſubtendit angulum rectum ad eam quæ eſt ad rectos angulos baſi minorem habet rationem quā quæ ſubtendit angulum obtuſum in amblygonio ad eam quæ cum baſi facit angulum obtuſum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λδʹ.

Τῶν αὐτῶν ὄντων, ἐὰν τοῦ ὀρθογωνίου ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ γωνία μὴ μείζων ᾖ τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων ἐπιζευγνυούσης καὶ τῆς πρὸς ἀμβλείᾳ τῇ βάσει· ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου πλευρὰ πρὸς τὴν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ τοῦ ἀμβλυγωνίου ἡ τὴν ἀμβλεῖαν ὑποτείνουσα πρὸς τὴν πρὸς ἀμβλείᾳ τῇ βάσει.

Deſcribantur triangula, & ſit ΑΓΒ angulus non major angulo ΓΔΒ: dico ΑΓ ad ΓΒ minorem habere rationem quam ΑΔ ad ΔΒ.

Quoniam enim angulus ΑΓΒ major eſt angulo ΑΔΒ (ut [in antecod.] oſtenſum fuit) & angulus ΓΑΒ major angulo ΔΑΒ, conſtituatur ipſi quidem angulo ΑΓΒ æqualis angulus ΑΔΗ, angulo autem ΓΑΒ æqualis ΔΑΗ: erunt itaque triangula ΑΓΒ, ΑΔΗ æquiangula & ſimilia: quare ut ΔΑ ad ΑΓ ita ΗΑ ad ΑΒ; & continent æquales angulos: juncta igitur ΒΗ, triangulum ΔΑΓ [per 6. 6.] triangulo ΗΑΒ ſimile erit, & angulus ΑΓΔ angulo ΑΒΗ æqualis. quo-

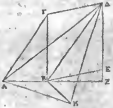


ΚΑΤΑΓΕΓΡΑΦΘΩ τὰ αὐτὰ τρίγωνα, καὶ ἔστω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ μὴ μείζων τῆς ὑπὸ ΓΔΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ.

Ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΑΔΒ, ὡς ἐδείχθη, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΑΒ τῆς ὑπὸ ΔΑΒ, συνεστάτω τῇ μὲν ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΑΒ ἡ ὑπὸ ΔΑΗ· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΓΒ, ΑΔΗ τρίγωνα καὶ ὅμοια· ὡς ἄρα ἡ ΔΑ πρὸς ΑΓ οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα τὸ ΔΑΓ τρίγωνον τῷ ΗΑΒ τριγώνῳ, ἐπιζευχθείσης τῆς ΒΗ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΗ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ

ὡς ἡ ΔΖ τῆς ΓΒ οὐκ ἔστιν ἐλάττων. ἤτοι ἴση ἐστὶν ἢ μείζων. ἔστω πρότερον ἴση· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ παραλληλόγραμμον τὸ ΓΖ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΓΒ μετὰ τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΔΒΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ, τουτέστι τῆς ὑπὸ ΔΒΖ, οὐ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΓΒ μετὰ τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΑΓΒ οὐ μείζονές εἰσι δυεῖν ὀρθῶν, ὅ ἐστιν αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΒΔ οὐ μείζονές εἰσι δυεῖν ὀρθῶν. ἀλλὰ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΗ, ΓΒΔ οὐ μείζονές εἰσι δυεῖν ὀρθῶν. προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθή· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΗ, ΑΒΔ οὐ μείζονές εἰσι τριῶν ὀρθῶν· λοιπὴ ἄρα εἰς τέσσαρας ὀρθὰς ἡ ὑπὸ ΔΒΗ οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ μιᾶς ὀρθῆς· μείζων ἄρα ἡ ΔΗ τῆς ΔΒ· ἡ ἄρα ΑΔ πρὸς ΔΗ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ: ἀλλ' ὡς ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ· καὶ ἡ ἄρα ΑΓ πρὸς ΓΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ ΔΖ τῆς ΓΒ μείζων· ἀμβλεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΒ. ἤχθω τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΒΕ. καὶ κατὰ τὰ αὐτά, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΓΒ μετὰ τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ, τουτέστι τῆς ὑπὸ ΓΔΒ, οὐ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΒΔ, τουτέστιν αἱ ὑπὸ ΑΒΗ, ΓΒΔ, οὐ μείζονές εἰσι δυεῖν ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΗ οὐ μείζονές εἰσι τριῶν ὀρθῶν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΒΗ οὐκ ἐλάττων ὀρθῆς ἐστι· μείζων ἄρα ἡ ΗΔ τῆς ΔΒ· ἡ ΑΔ ἄρα πρὸς ΔΗ, τουτέστιν ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



niam igitur ΔΖ non eſt minor ipſâ ΓΒ, vel æqualis erit vel major. ſit primum æqualis: ergo ΓΖ parallelogrammum eſt rectangulum: & propterea angulus ΔΓΒ una cum angulis ΓΒΔ, ΔΒΖ [per 32. 1.] eſt æqualis duobus rectis. ſed [ex hypotheſi] angulo ΓΔΒ, hoc eſt ΔΒΖ, non major eſt angulus ΑΓΒ: ergo angulus ΔΓΒ una cum angulis ΓΒΔ, ΑΓΒ, videlicet anguli ΑΓΔ, ΓΒΔ, non ſunt duobus rectis majores. angulo autem ΑΓΔ æqualis eſt angulus ΑΒΗ: anguli igitur ΑΒΗ, ΓΒΔ non ſunt majores duobus rectis. apponatur angulus ΑΒΓ rectus; quare anguli ΑΒΗ, ΑΒΔ non ſunt majores tribus rectis: & idcirco angulus ΔΒΗ, reliquus ex quatuor rectis, non erit recto minor: major igitur ΔΗ quam ΔΒ; adeoque ΑΔ ad ΔΗ minorem habet rationem quam ΑΔ ad ΔΒ. ſed ut ΑΔ ad ΔΗ ita ΑΓ ad ΓΒ; ergo ΑΓ ad ΓΒ minorem rationem habebit quam ΑΔ ad ΔΒ.

Sed ſit ΔΖ major quam ΓΒ: ergo ΑΓΒ angulus eſt obtuſus. itaque ducatur ΒΕ ipſi ΓΔ parallela. & quoniam angulus ΔΓΒ una cum angulis ΓΒΔ, ΔΒΕ eſt æqualis duobus rectis; angulo autem ΔΒΕ, hoc eſt ΓΔΒ, non major eſt angulus ΑΓΒ: erunt, eadem ratione qua ſupra, anguli ΑΓΔ, ΓΒΔ, hoc eſt ΑΒΗ, ΓΒΔ, non majores duobus rectis; adeoque ΑΒΔ, ΑΒΗ non ſunt majores tribus rectis; proinde ΔΒΗ non eſt recto minor: ΗΔ igitur major eſt quam ΔΒ, & idcirco ΑΔ ad ΔΗ, hoc eſt ΑΓ ad ΓΒ, minorem habet rationem quam ΑΔ ad ΔΒ. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λε΄.

Τῶν αὐτῶν ὄντων τῶν ἄλλων, ἐὰν ἡ τοῦ ὀρθογωνίου ἡ τὴν ὀρθὴν ὑποτείνουσα πρὸς τὴν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει μείζονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ τοῦ ἀμβλυγωνίου ἡ τὴν ἀμβλεῖαν ὑποτείνουσα πρὸς τὴν πρὸς ἀμβλεῖαν τῇ βάσει· ἡ πρὸς τῇ κορυφῇ τοῦ ὀρθογωνίου γωνία μείζων ἔσται τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς τὰς κορυφὰς τῶν τριγώνων ἐπιζευγνυούσης καὶ τῆς πρὸς ἀμβλεῖαν τῇ βάσει.

Κείσθω ἡ αὐτὴ καταγραφή, τῶν αὐτῶν κατεσκευασμένων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΒ οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ· καὶ ἡ ἄρα ΑΔ πρὸς ΔΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ· ἐλάττων ἄρα ἡ ΗΔ τῆς ΔΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΗΒ γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς μιᾶς· λοι-

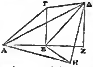


Prop. XXXV. *Theor.*

Cæteris manentibus, ſi in triangulo orthogonio, quæ ſubtenditur angulo recto ad eam quæ eſt ad rectos angulos baſi majorem rationem habeat, quam quæ ſubtenditur angulo obtuſo in amblygonio ad eam quæ eſt ad angulum obtuſum: angulus ad verticem orthogonii major eſt angulo ſub rectâ vertices triangulorum jungente & eâ quæ cum baſi eſt ad angulum obtuſum.

Ponatur eadem figura, iiſdem conſtructis. quoniam itaque ΑΓ ad ΓΒ majorem rationem habet quam ΑΔ ad ΔΒ; ut autem ΑΓ ad ΓΒ ita ΑΔ ad ΔΗ; habebit ΑΔ ad ΔΗ majorem rationem quam ΑΔ ad ΔΒ; & ob id minor erit ΗΔ quam ΔΒ: angulus igitur ΔΒΗ minor erit recto: quare reliqui ΑΒΔ, ΑΒΗ tribus

bus rectis ſunt majores. ſed angulus ABH æqualis eſt angulo AΓΔ: ergo anguli AΓΔ, ABΔ majores ſunt tribus rectis. auferatur angulus rectus ABΓ, & erunt anguli AΓΔ, ΓBΔ duobus rectis majores. quoniam igitur angulus BΓΔ una cum angulis AΓB, ΓBΔ eſt major duobus rectis; una vero cum ipſis ΓΔB, ΓBΔ eſt duobus rectis æqualis: ſequitur angulum AΓB angulo ΓΔB majorem eſſe.



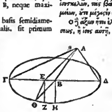
καὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΔ, ΑΒΗ μείζονές εἰσι τριῶν ὀρθῶν. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΑΒΗ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΒΔ μείζονές εἰσι τριῶν ὀρθῶν. ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθή· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΒΔ δυεῖν ὀρθῶν μείζονές εἰσι. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ μετὰ μὲν τῶν ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ δυεῖν ὀρθῶν ἐστι μείζων, μετὰ δὲ τῶν ὑπὸ ΓΔΒ, ΓΒΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴση· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ.

Prop. XXXVI. Theor.

Si, cono ſcaleno per verticem planis ſecto, ſuper baſes parallelas triangula æquicrura conſtituantur, ad eam partem à qua axis declinat: triangulum æquicrure per axem tranſiens omnium ejuſmodi triangulorum neque maximum, neque minimum erit.

SIT conus, cujus axis AB, & baſis circulus circa B centrum; plani vero per axem ad rectos angulos circulo, & ipſius circuli communis ſectio ſit ΓBΔ; ſitque angulus ABΔ recto minor: dico triangulum æquicrure per axem triangulorum omnium æquicrurum, quæ baſes habent inter puncta, Γ, B, neque maximum eſſe, neque minimum.

Vel enim axis eſt minor baſis ſemidiametro, vel major, vel ipſi æqualis. ſit primum minor. & quoniam AB minor eſt ſemidiametro baſis, aptetur AE æqualis ſemidiametro; perque puncta B & E ducantur in circulo EZ, BH ad rectos angulos ipſi ΓΔ: & angulo ABE æqualis fiat angulus EBΘ, & jungatur ΘE. quoniam igitur utraque AE, BΘ æqualis eſt ſemidiametro, communis autem BE, & continent æquales angulos; reliqua quoque [per 6. 6.] erunt æqualia & triangula inter ſe ſimilia; quapropter ut EA ad AB ita BΘ ad ΘE. & quoniam [per 7. 3.] ZE major eſt quam EΘ, æquales autem BH, BΘ; habebit BΘ ad ΘE majorem rationem quam BH ad ZE. ſed ut BΘ ad ΘE ita EA ad AB: quapropter EA ad AB majorem rationem habet quam BH ad EZ; & idcirco [per 1.huj.] rectangulum AEZ majus eſt rectangulo ABH, hoc eſt triangulum æquicrure per AE, cujus baſis eſt dupla ipſius EZ, majus eſt triangulo æquicruri per axem; triangulum igitur æquicrure per axem non eſt omnium ejuſmodi triangulorum maximum. ſed oſtenſum eſt univerſim, in trigeſimâ ſecundâ hujus, non minimum eſſe; quare neque maximum omnium, neque minimum eſt.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ λϛ'.

Ἐὰν ἐν κώνῳ σκαληνῷ τμηθέντι διὰ τῆς κορυφῆς ἐπιπέδοις τισὶν, ἐπὶ παραλλήλων βάσεων ἰσοσκελῆ τρίγωνα συστῇ, ἀφ' οὗ μέρους ἀπονεύει ὁ ἄξων· τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων ἰσοσκελῶν οὔτε μέγιστον ἔσται πάντων, οὔτε ἐλάχιστον.

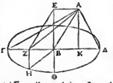
ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ ἄξων ὁ ΑΒ, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, τὸ δὲ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς γωνίας τῷ κύκλῳ ἐπίπεδον καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ ΓΒΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ἔστω ὀρθῆς· λέγω ὅτι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς τῶν συνισταμένων ἰσοσκελῶν, τὰς βάσεις ἐχόντων μεταξὺ τῶν Γ, Β σημείων, οὔτε μέγιστόν ἐστι πάντων, οὔτε ἐλάχιστον.

Ὁ δὴ ἄξων ἤτοι ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, ἢ ἴσος αὐτῇ, ἢ μείζων. ἔστω πρότερον ἐλάττων. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἐνηρμόσθω ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τῶν Β καὶ Ε σημείων τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ αἱ ΕΖ, ΒΗ, καὶ τῇ ὑπὸ ΑΒΕ ἴση συνεστάτω ἡ ΕΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΕ. ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΒΘ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, κοινὴ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ περιέχουσιν ἴσας γωνίας· καὶ τὰ λοιπὰ ἄρα τοῖς λοιποῖς ἴσα· ὅμοια ἄρα τὰ τρίγωνα· ὡς ἄρα ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ. ἐπεὶ δὲ μείζων ἡ ΖΕ τῆς ΕΘ, ἴσαι δὲ αἱ ΒΗ, ΒΘ· ἡ ἄρα ΒΘ πρὸς ΘΕ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΗ πρὸς ΖΕ. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΘ πρὸς ΘΕ οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς ΑΒ· ἡ ἄρα ΕΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΗ πρὸς ΕΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΕ, ΕΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΒ, ΒΗ, τουτέστι τὸ διὰ τῆς ΑΕ ἰσοσκελὲς, οὗ βάσις ἐστὶν ἡ διπλῆ τῆς ΕΖ, τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς μεῖζόν ἐστι· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς οὐ πάντων μέγιστόν ἐστι τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων τριγώνων. ἐδείχθη δὲ (ἐν τῷ τριακοστῷ δευτέρῳ) καθόλου, ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων, οὔτε ἐλάχιστον.

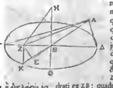
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λζ'.

Ἀλλὰ δὴ ἴσος ὁ ΑΒ ἄξων ἴσος τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία, ἐλάττων οὖσα ὀρθῆς, ἤτοι ἐλάττων ἐστὶν ἡμισείας ὀρθῆς ἢ οὔ. ἔστω πρότερον οὐκ ἐλάττων ἡμισείας, καὶ διὰ τοῦ Α, ἐν τῷ ὀρθῷ πρὸς τὸν κύκλον ἐπιπέδῳ, παράλληλος ἤχθω τῇ ΓΒ ἡ ΑΕ, καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, τῇ δὲ ΑΒ παράλληλος ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ, ἐν δὲ τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΒΘ, ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΗ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ οὐκ ἐλάττων ἐστὶν ἡμισείας ὀρθῆς, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα οὐκ ἐλάττων ἐστὶν ἡμισείας· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΒΑ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΖΕΒ, οὐ μείζων ἐστὶν ἡμισείας ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ οὐ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΑΒ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ ΖΕΒ, ΖΑΒ ἐπὶ μιᾶς βάσεως συνέστηκε, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἀγομένη, ὡς ἡ ΑΚ, οὐκ ἔστιν ἐλάττων τῆς ΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΕΒ τοῦ ὀρθογωνίου γωνία οὐ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΑΒ· ἡ ἄρα ΖΒ πρὸς ΕΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ, διὰ τὸ τριακοστὸν τέταρτον θεώρημα. ὡς δὲ ἡ ΖΒ πρὸς ΕΒ οὕτως ἡ ΒΗ, τουτέστιν ἡ ΒΘ, πρὸς ΖΗ· (ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΖΗ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου) καὶ ἡ ΒΘ ἄρα πρὸς ΖΗ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΘ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΖ, ΖΗ, τουτέστι τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς ἔλαττόν ἐστι τοῦ διὰ τῆς ΑΖ ἰσοσκελοῦς· οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων ἰσοσκελῶν.



Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ἡμισείας ὀρθῆς, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΒ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ κείσθω ἡ ΒΕ ἴση τῇ ἡμισείᾳ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐν τῷ ὀρθῷ πρὸς τὸν κύκλον ἐπιπέδῳ (ἐν ᾧ ἐστὶν ἡ ΑΕ) τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΒΖ, τῇ δὲ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΗ, καὶ ὑποτεινέτω τὴν ὑπὸ ΖΒΗ γωνίαν ἡ ΖΗ εὐθεῖα, ἴση συντεθεῖσα τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΖΒΕ, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς ἡμισείας, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ε· ἡ ἄρα ΒΕ τῆς ΕΖ μείζων. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΖΕ, ΕΒ, ὧν μεῖζον τὸ ἀπὸ ΕΒ τοῦ ἀπὸ ΖΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΒ ἔλαττόν ἐστι ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΒΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΗ μεῖζον ἢ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΖΒ· λοιποῦ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΒΗ ἔλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΒ ἡμίσειά ἐστι τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ ΑΒ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΑ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΑΒ, ΒΖ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ ΑΒ, ΒΕ, ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ ΑΒ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΑ ἴσον ἐστὶ τῷ τε δὶς ἀπὸ ΑΒ καὶ τῷ ἀπὸ ΒΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΑ μεῖζον ἢ διπλάσιόν ἐστι



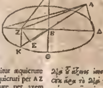
Prop. XXXVII. *Theor.*

SED ſit axis AB ſemidiametro æqualis; angulus autem ABΔ recto minor, vel minor eſt ſemirecto, vel non. ſit primum non minor ſemirecto, & per A in plano ad circulum recto ducatur AE ipſi ΓB parallela, & eidem ad rectos angulos recta BE, ſitque EZ parallela ipſi AB; jungaturque ZA: in circulo autem ducantur BΘ, ZH ad rectos angulos ipſi ΓΔ, & jungatur BH. Quoniam igitur angulus ABΔ non eſt minor ſemirecto, neque [per 27. 1.] BAE ſemirecto minor erit: ergo EBA, hoc eſt ZEB, non eſt major ſemirecto, & ideo ZEB angulus non major eſt angulo EAB: itaque duo triangula ZEB, ZAB ſuper eandem baſin conſtituta ſunt, & perpendicularis à puncto A ad ΓΔ ducta, videlicet AK, non eſt minor ipſa EB, angulus autem ZEB orthogonii trianguli non major eſt angulo EAB; quare, ex trigeſimo quarto theoremate, ZB ad EB minorem habet rationem quam ZA ad AB. ſed ut ZB ad EB ita BH, hoc eſt BΘ, ad ZH; (æqualis enim eſt BE ipſi ZH, & EZ baſis ſemidiametro) ergo BΘ ad ZH minorem habet rationem quam ZA ad AB: & propterea [per 1.huj.] rectangulum ABΘ minus eſt rectangulo AZH, hoc eſt triangulum æquicrure per axem minus triangulo æquicruri per AZ. igitur triangulum æquicrure per axem omnium ejuſmodi triangulorum maximum non erit.

Sit deinde angulus ABΔ minor medietate recti; & producatur AB uſque ad E, ita ut BE ſit æqualis dimidio ſemidiametri; in plano autem ad circulum recto, in quo eſt AE, ducatur BZ ad ipſam AB perpendicularis, & BH perpendicularis ad ΓΔ, & angulo ZBH ſubtendatur ZH æqualis ſemidiametro, jungaturque ZA. Quoniam igitur angulus ABΔ, hoc eſt ZBE, minor eſt ſemirecto, rectus autem qui ad E, erit BE major quam EZ: & quoniam quadratum ex ZB æquale eſt quadratis ex ZE, EB; quorum quidem quadratum ex EB majus eſt quadrato ex ZE: quadratum igitur ex ZB minus eſt quam duplum quadrati ex BE; & propterea quadratum ex ZH majus quam duplum quadrati ex ZB: quadratum igitur ex ZH minus erit quam duplum reliqui quadrati ex BH. & quoniam BE dimidia eſt ſemidiametri; quod bis continetur ſub AB, BE æquale eſt quadrato ex BA. ſed [per 12.2.] quadratum ex ZA eſt æquale quadratis ex AB, BZ unà cum duplo rectanguli ABE; duplum vero rectanguli ABE æquale eſt quadrato ex AB: quadratum igitur ex ZA duplo quadrati ex AB & quadrato ex BZ æquale erit: ergo quadratum ex ZA majus eſt quam duplum

Digitized by Google

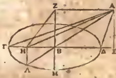
quadrati ex AB. demonſtratum autem eſt quadratum ex ZH minus eſſe quam duplum quadrati ex HB; quadratum igitur ex ZH ad quadratum ex HB minorem rationem habet quam quadratum ex ZA ad quadratum ex AB: ergo & ZH ad HB minorem habet rationem quam ZA ad AB. quod ſi rurſus in circulo ducantur ZK, BΘ ad rectos angulos ipſi ΓΔ, & jungatur BK; habebit BΘ ad ZK minorem rationem quam ZA ad AB: triangulum igitur æquicrure per axem minus eſt triangulo æquicruri per AZ ducto: quare triangulum æquicrure per axem non erit omnium triangulorum, de quibus dictum eſt, maximum: oſtenſum autem eſt non eſſe minimum, adeoque neque maximum neque minimum eſt.



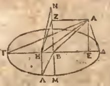
τοῦ ἀπὸ ΑΒ. ἐδείχθη δὲ τὸ ἀπὸ ΖΗ ἔλαττον ἢ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ ΗΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ· ὥστε καὶ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ. ἐὰν οὖν πάλιν ἐν τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἀχθῶσιν αἱ ΖΚ, ΒΘ, ἐπιζευχθῇ δὲ ἡ ΒΚ, ἡ ΒΘ πρὸς ΖΚ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΖΑ πρὸς ΑΒ· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς ἔλαττόν ἐστι τοῦ διὰ τῆς ΑΖ· οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς μέγιστόν ἐστι πάντων τῶν, ὡς εἴρηται, συνισταμένων ἰσοσκελῶν. ἐδείχθη δὲ οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστιν, οὔτε ἐλάχιστον.

Prop. XXXVIII. *Theor.*

DENIQUE ſit axis AB ſemidiametro major, & in plano ad circulum recto ducatur AE ad ΓΔ perpendicularis, quæ vel minor erit ſemidiametro, vel non minor. ſit primum minor; perque A ducatur AZ ipſi ΓΔ parallela; & per B recta BZ parallela ipſi AE, & conſtituatur angulus BZH non major angulo ZAB, jungaturque HA. rurſus ex jam demonſtratis [ad 34. huj.] ZH ad ZB minorem rationem habebit quam HA ad AB. itaque quoniam ZB æqualis ipſi AE eſt minor ſemidiametro, & ZH major quam ZB; erit ZH vel major ſemidiametro, vel minor, vel æqualis. ſit primum æqualis: ſi igitur in circulo ducantur HΛ, BM ad ipſam ΓΔ perpendiculares, ut ſuperius factum eſt; & jungatur BΛ: per ea quæ ſæpius demonſtrata ſunt, habebit HA ad AB majorem rationem quam BM ad HΛ: quare triangulum æquicrure per AH, HΛ majus eſt triangulo æquicruri per axem.



Si vero ZH ſit minor ſemidiametro, fiat HN ſemidiametro æqualis. & quoniam HA ad AB majorem rationem habet quam HZ ad ZB; HZ vero ad ZB majorem habet quam HN ad NB: habebit HA ad AB majorem rationem quam HN ad NB, hoc eſt quam BM ad HΛ; adeoque triangulum æquicrure per AH, HΛ triangulo æquicruri per axem majus erit.



At, ſi ZH ſit ſemidiametro major, ducatur ZΞ ipſi æqualis. quoniam igitur ΞZB angulus

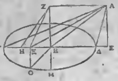
ΠΡΟΤΑΣΙΣ λή.

ΕΣΤΩ δὲ νῦν ὁ ΑΒ ἄξων μείζων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐν τῷ ὀρθῷ πρὸς τὸν κύκλον ἐπιπέδῳ ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἡ ΑΕ, ἡ δὲ ΑΕ ἤτοι ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ οὔ. ἔστω πρότερον ἐλάττων, καὶ διὰ τοῦ Α παρὰ τὴν ΓΔ ἤχθω ἡ ΑΖ, διὰ δὲ τοῦ Β παρὰ τὴν ΑΕ ἡ ΒΖ, καὶ συνεστάτω ἡ ὑπὸ ΒΖΗ μὴ μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ ΖΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΑ. πάλιν ἄρα, διὰ τὰ δειχθέντα, ἡ ΖΗ πρὸς ΖΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΒ, ἴση οὖσα τῇ ΑΕ, ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, μείζων δὲ ἡ ΖΗ τῆς ΖΒ· ἡ ἄρα ΖΗ ἤτοι μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ ἐλάττων, ἢ ἴση. ἔστω πρότερον ἴση. ἐὰν οὖν πάλιν κατὰ τὸ σύνηθες ἐν τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἀγάγωμεν τὰς ΗΛ, ΜΒ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΒΛ· διὰ τὰ δειχθέντα πολλάκις, ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΜ πρὸς ΗΛ· ὥστε καὶ τὸ διὰ τῶν ΑΗ, ΗΛ ἰσοσκελὲς μεῖζόν ἐστι τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς.

Εἰ δὲ ἡ ΖΗ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἡ ΗΝ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΖ πρὸς ΖΒ, ἡ δὲ ΗΖ πρὸς ΖΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΝ πρὸς ΝΒ· καὶ ἡ ἄρα ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΝ πρὸς ΝΒ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΜ πρὸς ΗΛ. καὶ ἔσται τὸ διὰ τῶν ΑΗ, ΗΛ ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς μεῖζον ἔσται.

Εἰ δὴ ἡ ΖΗ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, διήχθω ἡ ΖΞ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΞΖΒ οὐ μείζων

μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΖΑΒ· ἐπιζευχθεῖσα ἄρα ἡ ΞΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΞΖ πρὸς ΖΒ. ὡς δὲ ἡ ΞΖ πρὸς ΖΒ οὕτως ἡ ΒΜ πρὸς ΞΟ· ἡ ἄρα ΞΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΜΒ πρὸς ΞΟ· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΑΞ, ΞΟ ἰσοσκελὲς μεῖζόν ἐστι τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς· οὐκ ἄρα τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς πάντων μέγιστόν ἐστι τῶν εἰρημένων ἰσοσκελῶν. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων, οὔτε ἐλάχιστον.



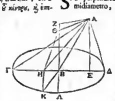
non eſt major angulo ZAB, juncta ΞA ad AB majorem rationem habebit quam ΞZ ad ZB. ut autem ΞZ ad ZB ita BM ad ΞO: ergo ΞA ad AB majorem rationem habebit quam MB ad ΞO: & propterea triangulum æquicrure per AΞ, ΞO majus eſt triangulo æquicruri per axem. oſtenſum autem eſt [ad triceſimam ſecundam hujus] non minimum eſſe: quare neque eſt omnium maximum neque minimum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ λθ΄.

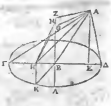
ΕΣΤΩ δὴ ἡ ΑΕ κάθετος μὴ ἐλάττων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἡ δὲ ΖΒ ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ, καὶ διήχθω τυχοῦσα ἡ ΑΘ, καὶ συνεστάτω ἡ ὑπὸ ΒΘΗ μὴ μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ ΘΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΑ. ἕξει δὴ πάλιν, διὰ τὰ δειχθέντα, ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ ἐλάττονα λόγον ἤπερ ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΒ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, μείζων δὲ ἡ ΘΗ τῆς ΘΒ· ἡ ΘΗ ἄρα ἤτοι ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, ἢ ἐλάσσων, ἢ μείζων. ἔστω πρῶτον ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἤχθωσαν ἐν τῷ κύκλῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΗΚ, ΒΛ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, ὡς δὲ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΒΛ πρὸς ΗΚ· ἡ ἄρα ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΛ πρὸς ΗΚ· μεῖζον ἄρα τὸ διὰ τῆς ΑΗ τρίγωνον ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς.

Prop. XXXIX. *Theor.*

SIT perpendicularis AE jam non minor ſemidiametro, & ZB ſemidiametro æqualis, jungaturque AZ, & ducatur utcunque recta AΘ: conſtituatur autem BΘH angulus non major angulo ΘAB, & jungatur HA. habebit rurſus, ex iis quæ [ad 34 huj.] demonſtrata ſunt, HΘ ad ΘB minorem rationem quam HA ad AB. & quoniam ΘB minor eſt ſemidiametro, major autem ΘH quam ΘB; erit ΘH vel æqualis ſemidiametro, vel minor, vel major. ſit primum æqualis; & ducantur in circulo HK, BΛ ad rectos angulos ipſi ΓΔ. cum igitur HA ad AB majorem habeat rationem quam HΘ ad ΘB, & ut HΘ ad ΘB ita BΛ ad HK; HA ad AB majorem rationem habebit quam BΛ ad HK: ergo triangulum æquicrure per AH triangulo æquicruri per axem majus erit.

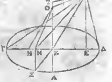


Εἰ δὲ ἡ ΘΗ ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΗΜ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΘ πρὸς ΘΒ, ἡ δὲ ΗΘ πρὸς ΘΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΗΜ πρὸς ΜΒ, τουτέστιν ἡ ΒΛ πρὸς ΗΚ· ἡ ἄρα ΗΑ πρὸς ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΒΛ πρὸς ΗΚ· μεῖζον ἄρα τὸ διὰ τῆς ΑΗ τρίγωνον ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς.



Si vero ΘH ſit minor ſemidiametro, ſit ſemidiametro æqualis HM. itaque quoniam HA ad AB majorem habet rationem quam HΘ ad ΘB, & HΘ ad ΘB item majorem quam HM ad MB, hoc eſt BΛ ad HK: habebit HA ad AB majorem rationem quam BΛ ad HK: quare majus erit triangulum æquicrure per AH triangulo per axem æquicruri.

Εἰ δὲ ἡ μείζων ἡ ΗΘ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου, ἔστω ἡ ΘΝ ἐνηρμοσμένη ἴση τῇ ἐκ τοῦ κέντρου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΝΑ, καὶ ἐν τῷ κύκλῳ πάλιν πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ αἱ ΒΛ, ΝΞ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΝΘΒ οὐ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΘΑΒ, ἡ ἄρα ΝΘ πρὸς ΘΒ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΝΑ πρὸς ΑΒ. ὡς δὲ ἡ ΝΘ πρὸς ΘΒ οὕτως ἡ ΒΛ



Quod ſi HΘ major ſit ſemidiametro, aptetur ΘN ſemidiametro æqualis; jungaturque NA: & in circulo rurſus ipſi ΓB ad rectos angulos ducantur BΛ, NΞ. quoniam igitur NΘB angulus non eſt major angulo ΘAB, NΘ ad ΘB minorem habet rationem quam NA ad AB. ut autem NΘ ad ΘB ita BΛ ad

ad ΝΞ: quare ΒΑ ad ΝΞ minorem habebit rationem quam ΝΑ ad ΑΒ: majus igitur eſt triangulum æquicrure per ΑΝ triangulo æquicruri per axem: hinc ſequitur triangulum æquicrure per axem dictorum triangulorum æquicrurum non eſſe maximum. ſed demonſtratum eſt generaliter non minimum eſſe: ergo nec maximum, neque minimum erit. quod erat demonſtrandum.

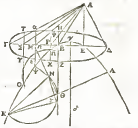
πρὸς ΝΞ· ἡ ἄρα ΒΑ πρὸς ΝΞ ἐλάττονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΝΑ πρὸς ΑΒ· μεῖζον ἄρα τὸ διὰ τῆς ΑΝ ἰσοσκελὲς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελοῦς· τὸ ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελὲς οὐ πάντων μέγιστόν ἐστι τῶν εἰρημένων ἰσοσκελῶν. ἐδείχθη δὲ καθόλου ὅτι οὐδὲ ἐλάχιστον· οὔτε ἄρα μέγιστόν ἐστι πάντων, οὔτε ἐλάχιστον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

SCHOLION.

SERENUS noſter, quo pacto ſecandus ſit conus rectus datus per verticem, ut triangulum dato triangulo æquale à ſectione generetur, in octavâ quidem hujus rite oſtendit; itidemque quodnam fuerit maximum triangulum in cono recto ſecandum prop. XII. demonſtrat. Hic autem locus erat idem in conis ſcalenis præſtandi, illi tamen ſatis fuiſſe comperimus, triangulum æquicrure per Axem ex æquicruribus neque maximum neque minimum demonſtraſſe; majora nempe fieri triangula ad partes à quibus declinat Axis, minora vero ad eas ad quas inclinat. Solidum autem eſt problema, ſi quod aliud, in Cono ſcaleno dato triangulum æquicrure trianguloque dato æquale ſecare plano per verticem tranſeunte: nec abſque locis ſolidis ejuſdem problematis limites ſive *διορισμοὶ* exhiberi poſſunt. Unde forſan *Sereno* viſum fuit rem intactam potius prætermittere, quam multis & intricatis ambagibus, ad problemata ſolida more Veterum enucleanda neceſſariis, immiſceri. Nequid autem hac ex parte deeſſet, nos ex hodiernâ Geometriâ deſumptas tam problematis effectionem Geometricam quam ejuſdem determinationem trademus.

SIT igitur conus ſcalenus datus, cujus vertex Α, baſis circulus circa centrum Β, axis vero ΑΕ, ac triangulum per axem circulo baſis rectum ſit ΑΓΔ: & oporteat conum plano per verticem tranſeunte ita ſecare, ut faciat in ſuperficie ejus triangulum æquicrure æquale triangulo dato; vel, quod idem eſt, quod datam habeat rationem ad triangulum æquicrure per axem, puta ut d ad a.

Puta factum, ſitque triangulum æquicrure quæſitum, quod baſim habeat rectam ΤΣΤ ad rectos angulos ipſi ΓΔ, cathetum vero ΑΣ; ac demittatur ad baſim coni normalis ΑΕ, quæ quidem cadet ſuper diametrum ΓΔ. Jam pro quæſitâ ΒΣ ſcribatur z, datus vero Axis ſit a, ſemidiameter baſis coni ΒΓ vel ΒΔ ſit b, ΒΕ autem intercepta inter centrum & normalem ſit c: ſitque area trianguli dati, ſive rectangulum ſub ΑΣ, ΣΤ, æqualis ipſi bd.



His poſitis [per 47. 1.] $bb - zz$ æquale erit quadrato ex ΣΤ, & quadratum ex ΑΣ [per 12. 2.] æquale erit quadratis ex ΑΒ, ΒΣ una cum duplo rectangulo ΣΒΕ, hoc eſt ipſis $aa + zz + 2cz$: quibus in ſe ductis, fiet quadratum trianguli dati ΤΑΤ (ſi ita loqui liceat) ſive $bbdd$, his quantitatibus æquale $bbaa + bbzz + 2cbbz - aazz - z^4 - 2cz^3$: ac ordinatâ æquatione, $z^4 + 2cz^3 \begin{smallmatrix} -bb \\ +aa \end{smallmatrix} zz - 2bbcz$ æqualia erunt differentiæ ipſarum $bbdd$ & $bbaa$, ſive rectangulo ſub ſummâ & differentiâ dati trianguli bd & ipſius ba trianguli æquicruris per axem. Unde, per ea quæ ante viginti plus minus annos jam tum inventa prodidi, talis emergit problematis Compoſitio.

Ad centrum baſis Β, ſuper diametrum ΓΔ, erigatur normalis ΒΘ ipſi ΓΒ æqualis; ac ponatur ΒΜ æqualis ipſi ΒΕ, & jungatur ΘΜ; cui ad angulos rectos ducatur ΚΘΛ, ac fiant ΚΘ, ΘΛ ipſi ΘΜ æquales. Dein diametro ΒΘ, atque ordinatim applicatis ΚΘ, ΘΛ, deſcribatur Parabola ΚΒΛ. Fiat etiam ut duplum quadrati ex ΓΒ ad quadratum ex ΑΕ ita ΘΜ ad ΘΝ; ac jungatur ΚΝ, ſuper quam deſcribatur ſemicirculus ΚΘΝ. Atque hactenus hæc omnia cuivis triangulo æquilateri in dato cono ſecando inſerviunt. Capiatur jam ΚΞ ad ΑΒ in ratione d ad a, ſive quam habet triangulum ſecandum ad æquicrure per Axem; ac coaptetur in ſemicirculo ΚΘΝ recta ΚΞ. Denique centro Ν, radio ΝΞ, deſcribatur arcus circuli occurrens Parabolæ in punctis Ο, Π; à quibus Parabolæ diametro parallelæ ducantur ΟΣ, ΠΡ, occurrentes ipſi ΓΔ in punctis Σ, Ρ: ac jungantur ΑΡ, ΑΣ. Dico triangula æquicrura ΤΑΤ, ΦΑΚ per ΑΣ, ΑΡ ducta æqualia eſſe triangulo propoſito, nempe rectangulo contento ſub ΚΞ & ΓΒ.

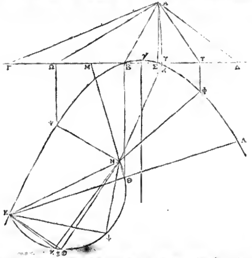
Demiſſâ autem de puncto Ν in Curvam Parabolæ normali ΝΨ, ac ductâ ΨΩ parallelâ Axi Parabolæ; ſi jungatur ΑΩ, erit triangulum æquicrure per ΑΩ tranſiens, ſive triangulum αΑι *maximum* omnium æquicrurum in dato Cono ſecandorum: atque huic utrinque propiora majora erunt remotioribus. Quod ſi triangulum propoſitum majus fuerit triangulo illo per ΑΩ tranſeunte, problema impoſſibile erit, ac circulus Parabolam non attinget: hoc vero ſi minus fuerit, duo ſemper inveniri poſſunt triangula rem præſtantia, ab utraque parte puncti Ω. Atque hic obiter obſervandum eſt, Parabolam modo dicto deſcriptam tranſire per punctum Ε, ita ut Axis γδ ipſam ΒΕ ſecet bifariam; latuſque rectum Axis æquale eſſe baſis ſemidiametro ΓΒ vel ΒΘ.

Hæc

Digitized by Google

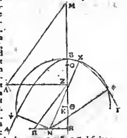
Hæc autem univerſim omni Cono accidunt. Verum ſub certis conditionibus triangulum aliud maximum, atque inſuper minimum, inter puncta Ξ, Δ reperientur; cadentibus ſcilicet tribus normalibus de centro N in Curvam Parabolicam, ut N Ψ, N X, N Φ: ac ſi radius circuli N Ξ, modo jam dicto inventus, major fuerit quam N Φ, minor vero quam N X (quæ per 72. V^ti. Conicorum major eſt quam N Φ) quatuor diverſa triangula æquicrura in dato Cono ſecari poſſunt, eidem propoſito triangulo æqualia; hoc eſt rectangulo ſub Γ B & K Ξ: quorum unum quidem baſin habebit inter T, Δ, & alium inter Υ, T; reliquorum vero alterum inter Υ & Ω, alterum inter Ω & Γ.

Ductis autem Ψ Ω, X Υ, Φ T ipſi Γ Δ ad angulos rectos, junctiſque Α Ω, Α Υ, Α T, erit, per jam oſtenſa, triangulum æquicrure per Α Ω omnium æquicrurum maximum; quodque per Α Υ ducitur, non



ſimpliciter minimum erit: ſed quod minus ſit iis quæ ab utroque latere eidem adjacent, ita ut inter Ω & T ipſi Υ propiora remotioribus ſint minora. Triangulum vero æquicrure per T majus erit quovis triangulo æquicruri inter T & Δ baſim habente. Aptatis autem in ſemicirculo K Θ N rectis ipſis N Ψ, N X, N Φ æqualibus, ut N ψ, N χ, N φ: erit rectangulum ſub ſemidiametro baſis coni Γ B & K ψ æquale triangulo *maximo* æquicruri per Α Ω; quod ſub Γ B & K χ æquale erit *minimo* per Α Υ ducto; quod vero ſub Γ B & K φ æquicruri per Α T ducto, ſive alteri *maximorum*, æquabitur.

Reſtat jam ut oſtendamus quomodo de puncto dato cathetus demitti poſſit in Curvam Parabolæ; & quo limite dignoſcatur utrum tres catheti vel una tantum fuerit. Ac primum quidem docet *Apollonius* in V^to. Conicorum prop. 62. ope Hyperbolæ: ſed noſtro inſtituto majus conveniet idem per circulum præſtare. Sit igitur Parabolæ A B Γ Axis B H, ac ſit punctum N à quo cathetos demittere oporteat ad Curvam Parabolicam. Ducatur N H Axi normalis, ac fiat B Z æqualis dimidio lateris recti Axis, & biſecetur Z H in Θ, & erigatur normalis K Θ quartæ parti ipſius N H æqualis: dein circulus centro K radio K B deſcriptus occurret Parabolæ ad ea Curvæ puncta in quæ cadunt normales; puta ad Ψ, X, Φ, vel ad ſolum Ψ, uti diximus. Ipſius autem N H magnitudo, ut tres ſint hujuſmodi interſectiones, ex 51. V^ti. Conicorum limites habet, idque conſtructione ſatis facili. Aliter autem hoc modo determinabitur. Producatur H B ad M, ita ut Z M æqualis ſit $\frac{27}{16}$ lateris recti Parabolæ; ac erectâ ſuper Axem normali Z Λ, biſecetur H M in O, ac circulus centro O radio O H deſcriptus oc-



curret ipſi Z A in puncto A. jungatur M A, cui parallela ducatur recta Z Π, occurrens ipſi N H in puncto Π. Dico ſi punctum N Axi propius eſt quam Π, tres Catheti in Curvam demitti poſſint; ſi remotius, non niſi unum.

Horum omnium demonſtrationem, cum in nimiam excreſceret molem, totamque fere ſolidam Geometriam poſtularet, in præſentia omittendam cenſeo. Ex iis tamen quæ in quinto Conicorum habentur, & quæ in *Philoſoph. Tranſact. Num.* 188 & 190, tradidimus, non multo opere comprobari poterunt.

Prop. XL. *Theor.*

In omni cono ſcaleno, cum triangula per axem poſſunt eſſe infinita: rectæ omnes, quæ à vertice coni ad baſes dictorum triangulorum perpendiculares ducuntur, in unius circuli circumferentiam cadunt; qui quidem eſt in eodem plano in quo baſis coni, & circa diametrum æqualem interjectæ inter centrum baſis & perpendicularem à vertice coni ad dictum planum demiſſam.

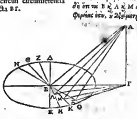
SIT conus ſcalenus, cujus vertex punctum A, baſis circulus circa centrum B, & axis A B; à puncto autem A ad baſis planum perpendicularis ſit A Γ, & jungatur Γ B, cui per punctum B ad rectos angulos ducatur Δ E in eodem plano; & ducantur utcunque rectæ Z H, K Θ: erunt itaque Δ E, Z H, Θ K baſes triangulorum per axem tranſeuntium. itaque à puncto A ad ipſas Δ E, Z H, Θ K perpendiculares ducantur A B, A Λ, A M. axem vero A B perpendicularem eſſe ad Δ E, & perpendiculares A Λ, A M ad partes B H, B K cadere, deinceps oſtendetur. dico puncta B, Λ, M in unius circuli circumferentia eſſe, cujus diameter eſt recta B Γ.

Jungantur enim Γ Λ, Γ M. & quoniam A Λ perpendicularis eſt ad Z H; erit angulus Z Λ A rectus. rurſus quoniam A Γ ad baſis planum eſt perpendicularis, anguli A Γ B, A Γ Λ, A Γ M recti erunt: quare cum quadratum ex A B æquale ſit quadratis ex B Λ, Λ A, & quadratum ex A Λ quadratis ex A Γ, Γ Λ æquale; erit quadratum ex A B æquale tribus quadratis ex B Λ, A Γ, Γ Λ. idem autem eſt æquale quadratis ex B Γ, Γ A: quadrata igitur ex B Γ, Γ A quadratis ex B Λ, A Γ, Γ Λ æqualia ſunt. commune auferatur quadratum ex Γ A; erit reliquum quadratum ex B Γ æquale quadratis ex B Λ, Λ Γ: eſt igitur [per 48. 1.] angulus B Λ Γ in baſis plano rectus. rurſus quoniam quadratum ex A B æquale eſt quadratis ex B M, M A, & quadratum ex M A æquale quadratis ex M Γ, Γ A; erit quadratum ex A B æquale quadratis ex B M, M Γ, Γ A. ſed & æquale eſt quadratis ex B Γ, Γ A: ergo, ſublato communi quadrato ex Γ A, erit quadratum ex B Γ quadratis ex B M, M Γ æquale: rectus igitur angulus

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μ′.

Παντὸς κώνου σκαληνοῦ δυνάμει ἀπείρων ὄντων τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων· αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τὰς βάσεις τῶν τριγώνων ἀγόμεναι κάθετοι πᾶσαι ἐφ᾽ ἑνὸς κύκλου περιφέρειαν πίπτουσιν, ὄντος τε ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ τῆς βάσεως τοῦ κώνου, καὶ περὶ διάμετρον τὴν ἐν τῷ εἰρημένῳ ἐπιπέδῳ ἀπολαμβανομένην εὐθεῖαν μεταξὺ τοῦ τε κέντρου τῆς βάσεως καὶ τῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καθέτου.

ΕΣΤΩ κῶνος σκαληνὸς, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, καὶ ἄξων ὁ Α Β, ἀπὸ δὲ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον ἡ Α Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ Γ Β, τῇ δὲ Γ Β ἀπὸ τοῦ Β πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἡ Δ Ε, τυχοῦσαι δὲ αἱ Ζ Η, Κ Θ· γίνονται δὴ αἱ Δ Ε, Ζ Η, Θ Κ, βάσεις τριγώνων διὰ τοῦ ἄξονος ἠγμένων, ἤχθωσαν μὲν οὖν κάθετοι ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὰς Δ Ε, Ζ Η, Θ Κ εὐθείας αἱ Α Β, Α Λ, Α Μ. ὅτι γὰρ ὁ μὲν Α Β ἄξων πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ Δ Ε, αἱ δὲ Α Λ, Α Μ κάθετοι ἐπὶ τὰ Β Η, Β Κ μέρη πίπτουσιν, ἑξῆς δειχθήσεται. λέγω δὴ ὅτι τὰ Β καὶ Λ καὶ Μ σημεῖα ἐφ᾽ ἑνὸς κύκλου περιφερείας ἐστὶν, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ Β Γ εὐθεῖα.



Ἐπεζεύχθωσαν αἱ Γ Λ, Γ Μ. ἐπεὶ οὖν ἡ Α Λ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν Ζ Η, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ Ζ Λ Α γωνία. πάλιν ἐπεὶ ἡ Α Γ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον, ὀρθαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ Α Γ Β, Α Γ Λ, Α Γ Μ γωνίαι· ὥστε ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς Α Β τοῖς ἀπὸ τῶν Β Λ, Λ Α ἴσον, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς Α Λ τοῖς ἀπὸ Λ Γ, Γ Α ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Α Β τοῖς ἀπὸ Β Λ, Λ Γ, Γ Α ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τοῖς ἀπὸ Β Γ, Γ Α ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς Β Α· τὰ ἄρα ἀπὸ τῆς Β Γ, Γ Α τοῖς ἀπὸ Β Λ, Λ Γ, Γ Α ἴσα ἐστί. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ Γ Α· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ Β Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ Β Λ, Λ Γ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ Β Λ Γ ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ. πάλιν ἐπεὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς Α Β ἴσον τοῖς ἀπὸ Β Μ, Μ Α, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς Μ Α ἴσον τοῖς ἀπὸ Μ Γ, Γ Α· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς Α Β ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ Β Μ, Μ Γ, Γ Α. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Α Β ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν Β Γ, Γ Α, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς Γ Α· τὸ ἄρα ἀπὸ Β Γ ἴσον τοῖς ἀπὸ Β Μ, Μ Γ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ

Β Μ Γ

ΒΜΓ γωνία ἐν τῷ τῆς βάσεως ἐπιπέδῳ· τὰ ἄρα Β,Α,Μ,Γ σημεῖα ἐπὶ περιφερείας ἐστὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ. ὁμοίως δὲ καὶ ὁποσασοῦν ἀγάγωμεν, ὃν εἰρήκαμεν τρόπον, ὥσπερ τὴν ΝΟΞ, τὸ αὐτὸ συμβαῖνον δειχθήσεται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

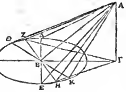
Ὅτι δὲ ὁ μὲν ΑΒ ἄξων πρὸς ὀρθάς ἐστι τῇ ΔΕ, αἱ δὲ ΑΛ, ΑΜ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΒΗ, ΒΚ μέρη πίπτουσιν, οὕτω δεικτέον.

Ἐὰν γὰρ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΑΔ, ΑΕ, ἔσται τὸ ΔΑΕ τρίγωνον ἰσοσκελές· καὶ διὰ τοῦτο ἡ διὰ τῆς διχοτομίας τῆς βάσεως καὶ τῆς Α κορυφῆς ἀγομένη πρὸς ὀρθάς ἔσται τῇ ΔΕ. ἐπεζεύχθωσαν δὴ καὶ αἱ ΓΖ, ΓΗ, ΑΖ, ΑΗ. ἐπεὶ οὖν ἀμβλεῖα μέν ἡ ὑπὸ ΖΒΓ γωνία, ὀξεῖα δὲ ἡ ὑπὸ ΓΒΗ· μείζων ἄρα ἡ ΖΓ τῆς ΓΗ, καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΗ μεῖζον· καὶ κοινοῦ ἄρα προστεθέντος τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τὰ ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΑ τῶν ἀπὸ τῶν ΗΓ, ΓΑ μείζονά ἐστι, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΑ τοῦ ἀπὸ ΑΗ μεῖζόν ἐστι· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΑ τῆς ΑΗ. ἐπεὶ οὖν αἱ μὲν ΖΒ, ΒΗ ἴσαι, κοινὴ δὲ ἡ ΒΑ, μείζων δὲ ἡ ΖΑ τῆς ΑΗ· ἡ μὲν ἄρα ὑπὸ ΖΒΑ γωνία ἀμβλεῖά ἐστιν, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ ὀξεῖα· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ ἐπὶ τὰ ΒΗ μέρη πίπτει. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

est & ΒΜΓ in baſis plano; quare puncta Β,Α,Μ,Γ ſunt in circumferentia circuli, cujus diameter eſt ΒΓ. ſimiliter & ductis aliis quibuſcumque rectis, ut ΝΟΞ, idem evenire demonſtrabimus. quod erat demonſtrandum.

Axem vero ΑΒ perpendicularem eſſe ad ipſam ΔΕ, & perpendiculares ΑΛ, ΑΜ cadere ad partes ΒΗ, ΒΚ, hoc modo oſtendemus.

Junctis enim ΑΔ, ΑΕ, erit ΔΑΕ triangulum æquicrure; & ideo recta, quæ à vertice Α ad punctum quo biſecatur baſis ducitur, perpendicularis erit ad ΔΕ. jungantur ΓΖ, ΓΗ, ΑΖ, ΑΗ. & quoniam angulus ΖΒΓ obtuſus eſt, acutus autem ΓΒΗ; erit recta ΖΓ major quam ΓΗ, & quadratum ex ΖΓ majus quadrato ex ΓΗ: ergo, communi appoſito quadrato ex ΑΓ, quadrata ex ΖΓ, ΓΑ quadratis ex ΗΓ, ΓΑ majora ſunt, hoc eſt quadratum ex ΖΑ majus quadrato ex ΑΗ: major igitur eſt ΖΑ quam ΑΗ. ſunt autem ΖΒ, ΒΗ inter ſe æquales, & communis eſt ΒΑ; ac ΖΑ major quam ΑΗ: ergo angulus ΖΒΑ obtuſus eſt, & ΑΒΗ acutus. ducta igitur à puncto Α ad ΖΗ perpendicularis ad partes ΒΗ cadit. eodem modo & in aliis demonſtrabitur.



Πόρισμα.

Ὥστε φανερὸν ὅτι αἱ προειρημέναι κάθετοι, ἀπὸ μετεώρου τοῦ Α σημείου ἐπὶ κύκλου περιφέρειαν πίπτουσαι, κατ' ἐπιφανείας εἰσὶ τοῦ κώνου, οὗ βάσις μὲν ὁ ὑπὸ τῆς πτώσεως τῶν καθέτων γραφόμενος κύκλος, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ ἐξ ἀρχῆς κώνῳ.

Corollarium.

Quare conſtat dictas perpendiculares, à puncto ſublimi ad circuli circumferentiam cadentes, in coni ſuperficie ferri; cujus quidem baſis eſt circulus à caſu perpendicularium deſcriptus, & vertex idem qui eſt primi coni vertex.

SCHOLION.

HINC manifeſtum eſt quod, eodem modo quo in Scholio præcedente ſecuimus in Cono Scaleno triangulum æquicrure triangulo dato æquale, etiam ſecari poſſit triangulum Scalenum dato æquale, cujus baſis parallela ſit datæ cuilibet diametro baſis Coni, puta ipſi ΘΚ. Concipiatur enim alius Conus cujus vertex Α, Axis ΑΜ, ac baſis circulus, priori æqualis & in eodem plano, circa centrum Μ, in quod cadit normalis à Vertice Α ad ΘΚ demiſſa, ita ut planum trianguli ΑΜΓ rectum ſit ſuper baſis planum. In hoc inquam Cono triangula æquicrura ubique æqualia erunt Scalenis, eodem plano per verticem tranſeunte in priori Cono ſectis; modo communis planorum baſis & trianguli ſectio parallela ſit diametro ΘΚ: quemadmodum ad 26^{am} & 27^{m} hujus oſtenſum eſt in triangulis baſes ipſi ΒΓ parallelas habentibus; eaſdem enim habent tam baſes quam altitudines.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μα'.

Ἐν κώνῳ σκαληνῷ, δοθέντος τινὸς τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων, ὃ μήτε μέγιστόν ἐστι μήτε ἐλάχιστον· εὑρεῖν ἕτερον τρίγωνον διὰ τοῦ ἄξονος, ὃ μετὰ τοῦ δοθέντος ἴσον ἔσται συναμφοτέρῳ τῷ μεγίστῳ καὶ τῷ ἐλαχίστῳ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος.

ΕΣΤΩ κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος,

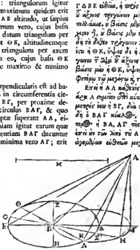
PROP. XLI. *Probl.*

In cono ſcaleno, dato aliquo triangulo per axem, quod neque maximum ſit neque minimum: invenire aliud triangulum per axem, quod una cum dato utriſque maximo & minimo per axem ſit æquale.

SIT conus ſcalenus, cujus vertex punctum Α, baſis circulus circa centrum Β, axis autem ΑΒ,

AB, & AΓ ad baſis planum perpendicularis; ducaturque per Γ & centrum B recta ΓΔBE, cui ad rectos angulos ſit ZBH: triangulorum igitur per axem tranſeuntium maximum quidem erit illud, cujus baſis ZH & AB altitudo, ut ſæpius demonſtratum eſt: minimum vero, cujus baſis BΔ & altitudo AΓ. ſit datum triangulum per axem quod baſim habeat ΘK, altitudinemque AΛ: & oporteat aliud triangulum per axem invenire, quod una cum eo, cujus baſis ΘK & altitudo AΛ, utriſque maximo & minimo ſit æquale.

Itaque quoniam AΛ perpendicularis eſt ad baſim ΘK, erit punctum Λ in circumferentia circuli, cujus diameter eſt BΓ, per proxime demonſtrata. deſcribatur circulus BΛΓ, & quo rectæ BA, AΓ ſimul ſumptæ ſuperant AΛ, eidem ſit æqualis M. quoniam igitur earum quæ à puncto A ad circumferentiam BΛΓ ducuntur maxima quidem eſt AB, minima vero AΓ; erit AΛ minor quam AB, & major quam AΓ. ſed AΛ una cum M eſt æqualis utriſque BA, AΓ ſimul, quarum AΛ eſt minor quam AB. ergo M quam AΓ major erit; & quadratum ex M majus quadrato ex AΓ. ſint quadrato ex M æqualia quadrata ex AΓ, ΓN, & recta ΓN in circulo aptatâ, ducatur NΞBO, & jungatur NA: erit itaque angulus BNΓ in ſemicirculo rectus. quadratum autem ex AB æquale eſt quadratis ex BΓ, ΓA ſimul; & quadratum ex BΓ æquale quadratis ex BN, NΓ ſimul: quare quadratum ex AB quadratis ex BN, NΓ, ΓA æquale erit. è quibus, quadratis ex NΓ, ΓA æquale eſt quadratum ex NA: quadratum igitur ex AB eſt æquale quadratis ex BN, NA: & idcirco angulus BNA rectus eſt: quapropter AN eſt altitudo trianguli per axem, cujus baſis OBΞ. & quoniam quadratum ex M eſt æquale quadratis ex AΓ, ΓN, & quadratum ex AN eiſdem quadratis æquale; erit recta M ipſi AN æqualis: quare utræque AΛ, AN æquales ſunt utriſque BA, AΓ, & rectangulum contentum ſub diametro & utriſque AΛ, AN æquale ei quod ſub diametro & utriſque BA, AΓ continetur. ſed rectangulum ſub diametro & utriſque BA, AΓ duplum eſt trianguli maximi & minimi, quorum baſes ZH, EΔ & altitudines BA, AΓ; rectangulum vero ſub diametro & utriſque AΛ, AN duplum eſt triangulorum, quorum baſes ΘK, OΞ, & altitudines AΛ, AN: triangula igitur, quorum baſes ΘK, OΞ, & altitudines AΛ, AN, æqualia ſunt triangulis maximo & minimo per axem. datum autem eſt triangulum cujus baſis ΘK; ergo triangulum per axem cujus baſis OΞ inventum eſt, quod, una cum dato cujus baſis ΘK, utriſque maximo & minimo æquale erit.



ἄξων δὲ ὁ AB, καὶ ἐπὶ τὸ τῆς βάσεως ἐπίπεδον κάθετος ἡ AΓ, καὶ διὰ τοῦ Γ καὶ τοῦ B κέντρου ἐπήχθω ἡ ΓΔBE εὐθεῖα, ἡ πρὸς ὀρθὰς τῇ ZBH· τῶν ἄρα διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων μέγιστον μὲν ἔσται, ὡς ἐδείχθη πολλάκις, οὗ βάσις μὲν ἡ ZH, ὕψος δὲ ἡ AB, ἐλάχιστον δὲ, οὗ βάσις μὲν ἡ EΔ, ὕψος δὲ ἡ AΓ. ἔστω δὴ τὸ δοθὲν τρίγωνον διὰ τοῦ ἄξονος, οὗ βάσις μὲν ἔστω ἡ ΘK, ὕψος δὲ ἡ AΛ· καὶ δέον ἔστω ἕτερον τρίγωνον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος εὑρεῖν, ὃ μετὰ τοῦ τριγώνου, οὗ βάσις μὲν ἡ ΘK, ὕψος δὲ ἡ AΛ, ἴσον ἔσται συναμφοτέρῳ τῷ μεγίστῳ καὶ τῷ ἐλαχίστῳ.

Ἐπεὶ ἡ AΛ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΘK βάσιν, τὸ ἄρα Λ σημεῖον ἐπὶ κύκλου περιφερείας ἐστὶν, οὗ διάμετρός ἐστιν ἡ BΓ, διὰ τὸ προδειχθέν. γεγράφθω δὴ ὁ BΛΓ κύκλος, καὶ ᾧ μείζων ἐστὶ συναμφότερος ἡ BA, AΓ τῆς AΛ, τούτῳ ἴση ἔστω ἡ M. ἐπεὶ οὖν τῶν ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν BΛΓ περιφέρειαν ἀγομένων εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἡ AB, ἐλαχίστη δὲ ἡ AΓ· ἡ ἄρα AΛ ἐλάττων μέν ἐστι τῆς AB, μείζων δὲ τῆς AΓ· ἀλλ' ἡ AΛ μετὰ τῆς M ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ BA, AΓ, ὧν ἡ AΛ ἐλάττων τῆς AB· ἡ ἄρα M τῆς AΓ μείζων ἐστί· καὶ τὸ ἀπὸ M ἄρα τοῦ ἀπὸ AΓ μεῖζόν ἐστιν. ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς M ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν AΓ, ΓN, καὶ τῆς ΓN ἐναρμοσθείσης εἰς τὸν κύκλον, διήχθω ἡ NΞBO, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ NA· ἡ ἄρα ὑπὸ BNΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς AB ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ BΓ, ΓA, τὸ δὲ ἀπὸ BΓ ἴσον τοῖς ἀπὸ BN, NΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ AB ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ BN, NΓ, ΓA, ὧν τοῖς ἀπὸ NΓ, ΓA τὸ ἀπὸ NA ἴσον ἐστί· τὸ ἄρα ἀπὸ AB τοῖς ἀπὸ BN, NA ἴσον ἐστί· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BNA γωνία· ἡ AN ἄρα ὕψος ἐστὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, οὗ βάσις ἐστὶν ἡ OBΞ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς M ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ AΓ, ΓN, ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AN ἴσον τοῖς ἀπὸ AΓ, ΓN· ἴση ἄρα ἡ M τῇ AN· ὥστε καὶ συναμφότερος ἡ AΛ, AN συναμφοτέρῳ τῇ BA, AΓ ἴση ἐστί, καὶ τὸ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς ΛA, AN τῷ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς BA, AΓ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς BA, AΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου τριγώνου, ὧν αἱ βάσεις μὲν αἱ ZH, EΔ, ὕψη δὲ αἱ BA, AΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῆς διαμέτρου καὶ συναμφοτέρου τῆς ΛA, AN διπλάσιόν ἐστι τῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΘK, OΞ, ὕψη δὲ αἱ ΛA, AN· τὰ ἄρα τρίγωνα, ὧν βάσεις μὲν αἱ ΘK, OΞ, ὕψη δὲ αἱ ΛA, AN, ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἐλαχίστῳ καὶ τῷ μεγίστῳ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος. καὶ ἔστι τὸ δοθὲν τὸ ἐπὶ τῆς ΘK· εὕρηται ἄρα τρίγωνον διὰ τοῦ ἄξονος τὸ ἐπὶ τῆς OΞ, ὃ μετὰ τοῦ δοθέντος τοῦ ἐπὶ τῆς ΘK ἴσον ἐστὶ τῷ τε μεγίστῳ καὶ τῷ ἐλαχίστῳ.

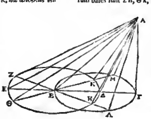
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μβ'.

Ἐὰν δύο τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων αἱ βάσεις ἴσας περιφερείας ἀπολαμβάνωσι πρὸς τῇ διὰ τῆς καθέτου διαμέτρῳ· τὰ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσται. καλείσθω δὲ ὁμοταγῆ.

ΕΣΤΩ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, καὶ ἄξων ὁ Α Β, κάθετος δὲ ἐπὶ τὴν βάσιν ἡ Α Γ, ἡ δὲ διὰ τοῦ Γ σημείου τῆς καθέτου διάμετρος ἡ Γ Δ Β Ε· διήχθωσαν δὲ αἱ Ζ Β Η, Θ Β Κ ἴσας περιφερείας ἀπολαμβάνουσαι πρὸς τῷ Δ τὰς Κ Δ, Δ Η· λέγω ὅτι τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα, ὧν βάσεις εἰσὶν αἱ Ζ Η, Θ Κ, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Γεγράφθω περὶ τὴν Β Γ διάμετρον κύκλος ὁ Β Λ Γ Μ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ Α Λ, Α Μ· κάθετοι ἄρα εἰσίν, ἡ μὲν Α Λ ἐπὶ τὴν Ζ Η, ἡ δὲ Α Μ ἐπὶ τὴν Θ Κ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ Γ Β Μ γωνία τῇ ὑπὸ Γ Β Λ ἴση ἐστίν, ἴση ἄρα καὶ ἡ Μ Β εὐθεῖα τῇ Β Λ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς Α Β ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν Α Μ, Μ Β, ἀλλὰ καὶ τοῖς ἀπὸ Α Λ, Λ Β· καὶ τὰ ἀπὸ Α Μ, Μ Β ἄρα τοῖς ἀπὸ τῶν Α Λ, Λ Β ἴσα ἐστίν, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς Μ Β τῷ ἀπὸ Β Λ ἴσον ἐστί· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ Μ Α τῷ ἀπὸ Α Λ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ Λ Α τῇ Α Μ. καί εἰσιν ὕψη τῶν τριγώνων, ὧν βάσεις εἰσὶν αἱ Ζ Η, Θ Κ· ἴσα ἄρα ἐστὶ τὰ ἐπὶ τῶν Ζ Η, Θ Κ βάσεων τρίγωνα διὰ τοῦ ἄξονος. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΠΡΟΤΑΣΙΣ μγ'.

Τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα τὰ ὁμοταγῆ ἴσα τε καὶ ὅμοια ἀλλήλοις ἐστίν.

ΕΣΤΩ γάρ, ὡς ἐπὶ τῆς προκειμένης καταγραφῆς, τὰ Ζ Α Η, Θ Α Κ τρίγωνα ὁμοταγῆ· λέγω ὅτι ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν ἀλλήλοις. ὅτι μὲν οὖν ἴσα ἐστὶν ἤδη δέδεικται· ὅτι δὲ ὅμοια νῦν δεικτέον.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ Α Β, ἐν ἑκατέρῳ τῶν τριγώνων, ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν ἧκται τῆς βάσεως, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς Α Β τοῖς ἀπὸ Α Μ, Μ Β, ἀλλὰ καὶ τοῖς ἀπὸ Α Λ, Λ Β ἴσον, ὧν τὸ ἀπὸ Α Μ τῷ ἀπὸ Α Λ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ Μ Β τῷ ἀπὸ Β Λ, καὶ ἡ Μ Β εὐθεῖα τῇ Β Λ ἴση· ὥστε καὶ ὅλη ἡ Μ Θ τῇ Λ Ζ. ἴση δὲ καὶ ἡ Μ Α τῇ Α Λ· καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἄρα ἴσα ἐστί, τουτέστι τὸ ἀπὸ Α Ζ τῷ ἀπὸ Α Θ, καὶ ἡ Α Ζ τῇ Α Θ ἴση. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ Α Κ τῇ Α Η δειχθήσεται ἴση. ἀλλὰ καὶ αἱ Ζ Η, Θ Κ βάσεις ἴσαι· τὰ ἄρα Ζ Α Η, Θ Α Κ τρίγωνα ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστιν ἀλλήλοις. δῆλον δὲ καὶ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.

Prop. XLII. *Theor.*

Si duorum triangulorum per axem baſes abſcindant æquales circumferentias, apud diametrum quæ per lineam perpendicularem ducitur: triangula inter ſe æqualia erunt. Vocentur autem *Triangula coordinata.*

SIT conus, cujus vertex punctum A, baſis circulus circa centrum B, & axis A B; perpendicularis autem ad baſim A Γ; & per Γ punctum, quo cadit perpendicularis, diameter ſit Γ Δ B E; ducanturque Z B H, Θ B K, quæ utrinque à puncto Δ æquales circumferentias K Δ, Δ H abſcindant: dico triangula per axem, quorum baſes ſunt Z H, Θ K, inter ſe æqualia eſſe.

Deſcribatur enim circa B Γ diametrum circulus B Λ Γ M, & jungantur A Λ, A M, quæ perpendiculares erunt, A Λ quidem ipſi Z H; A M vero ipſi Θ K. & quoniam angulus Γ B M æqualis eſt angulo Γ B Λ, recta M B ipſi B Λ æqualis erit. ſed quadratum ex A B quadratis ex A M, M B eſt æquale, itemque æquale eſt quadratis ex A Λ, Λ B: ergo quadrata ex A M, M B æqualia ſunt quadratis ex A Λ, Λ B; quorum quadratum ex M B eſt æquale quadrato ex B Λ: reliquum igitur quadratum ex M A æquale eſt quadrato ex A Λ; atque ipſa A Λ æqualis ipſi A M, quæ quidem ſunt triangulorum altitudines, quorum baſes Z H, Θ K: ergo triangula per axem ſuper baſes Z H, Θ K conſtituta inter ſe æqualia erunt. quod erat demonſtrandum.

Prop. XLIII. *Theor.*

E triangulis per axem, quæ coordinata ſunt & æqualia & ſimilia erunt inter ſe.

SINT triangula coordinata, ut in antecedenti figura, Z A H, Θ A K: dico & æqualia & ſimilia inter ſe eſſe. æqualia enim jam oſtenſa ſunt; ſimilia eſſe nunc demonſtrandum.

Quoniam A B, in utroque triangulorum, ducta eſt à vertice ad punctum quod baſim biſariam dividit, & quadratum ex A B quadratis ex A M, M B eſt æquale; itemque æquale eſt quadratis ex A Λ, Λ B, quorum quadratum ex A M æquale eſt quadrato ex A Λ: erit reliquum quadratum ex M B quadrato ex B Λ æquale, & recta M B ipſi B Λ æqualis: quare & tota M Θ toti Λ Z. eſt autem M A æqualis ipſi A Λ: ergo & quæ ex ipſis fiunt quadrata inter ſe ſunt æqualia, hoc eſt quadratum ex A Z æquale quadrato ex A Θ: & propterea erit A Z ipſi A Θ æqualis. ſimiliter etiam A K ipſi A H æqualis demonſtrabitur. ſed & baſes Z H, Θ K ſunt æquales: triangula igitur Z A H, Θ A K & æqualia & ſimilia inter ſe erunt. manifeſtum autem eſt & hujus theorematis converſum.

Prop. XLIV. *Theor.*

Si coni ſcaleni axis æqualis ſit baſis ſemidiametro: erit ut maximum triangulorum per axem tranſeuntium ad minimum, ita minimum ad æquicrure quod eſt ad rectos angulos baſi.

SIT conus ſcalenus, cujus vertex punctum A, & axis recta AB ſemidiametro baſis æqualis; baſis vero ſit circulus circa centrum B; & è triangulis per axem, ad rectos quidem angulos baſi ſit ΓAΔ, æquicrure autem EAZ: erit igitur EAZ maximum omnium quæ per axem tranſeunt, & ΓAΔ minimum ex iis, per prius demonſtrata. ducatur à puncto A ad baſim perpendicularis AH, quæ in diametrum ΓΔ cadet, & ſit ΘHK ad rectos angulos ipſi ΓΔ; ducaturque planum faciens triangulum æquicrure ΘAK, quod ad baſim rectum erit: dico ut triangulum BAZ, maximum ſcilicet eorum quæ per axem ducuntur, ad ΓAΔ minimum eorundem, ita ΓAΔ ad æquicrure triangulum ΘAK.



Quoniam enim triangulorum EAZ, ΓAΔ baſes ſunt æquales, diametri ſcilicet ΓΔ, EZ; altitudo autem trianguli BAZ eſt BA, & ipſius ΓAΔ altitudo AH: erit ut BA ad AH ita BAZ triangulum ad triangulum ΓAΔ. ruſus quoniam triangulorum ΓAΔ, ΘAB eadem eſt altitudo AH; trianguli autem ΓAΔ baſis eſt ΓΔ, hoc eſt EZ; & trianguli ΘAK baſis ΘB: erit ut EZ ad ΘB ita triangulum ΓAΔ ad triangulum ΘAK, ſed ut BZ ad ΘB ita earum dimidiæ, hoc eſt BK ad BH; & ut BK ad BH ita BA ad AH (ſimilia etenim ſunt triangula orthogonia BHK, BHA) triangulum igitur ΓAΔ eſt ad triangulum ΘAB ut BA ad AH. erat autem & triangulum EAZ ad ipſum ΓAΔ ut BA ad AH; ergo ut EAZ triangulum ad triangulum ΓAΔ ita ΓAΔ ad triangulum ΘAK. quod erat demonſtrandum.

Prop. XLV. *Theor.*

RURSUS ſit ut triangulum BAZ ad ΓAΔ ita ΓAΔ ad ΘAK: dico axem BA ſemidiametro baſis æqualem eſſe.

Quoniam enim ut triangulum BAZ ad ΓAΔ ita BA ad AH; & ut BAZ ad ΓAΔ ita ΓAΔ ad ΘAB erit ut ΓAΔ ad ΘAB ita BA ad AH. ut autem ΓAΔ ad ΘAB ita EZ ad ΘK, hoc eſt BK ad KH: ergo ut BA ad AH ita BK ad KH: quare triangula BAH, BKH ſunt ſimilia, communis autem BH, atque homologæ AB, BK: recta igitur AB ipſi BK, hoc eſt ſemidiametro baſis, æqualis erit. quod oſtendendum proponebatur.

Simul vero & oſtenſum eſt, ex utraque demonſtratione, triangulum BAZ ſimile eſſe tri-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μδ΄.

Ἐὰν κώνου σκαληνοῦ ὁ ἄξων ἴσος ᾖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως· ἔσται ὡς τὸ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων πρὸς τὸ ἐλάχιστον οὕτως τὸ ἐλάχιστον πρὸς τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἰσοσκελές.

ΕΣΤΩ κῶνος σκαληνὸς, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α, ἄξων δὲ ἡ ΑΒ εὐθεῖα, ἴση οὖσα τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, βάσις δὲ ὁ περὶ τὸ Β κέντρον κύκλος, καὶ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων τὸ μὲν πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἔστω τὸ ΓΑΔ, τὸ δὲ ἰσοσκελὲς τὸ ΕΑΖ· μέγιστον μὲν ἄρα ἐστὶ τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τὸ ΕΑΖ, ἐλάχιστον δὲ τὸ ΓΑΔ, διὰ τὰ πρότερον δειχθέντα. ἤχθω οὖν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος, πίπτει δὴ ἐπὶ τὴν ΓΔ διάμετρον. ἔστω οὖν ἡ ΑΗ, καὶ διήχθω ἡ ΘΗΚ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ, καὶ διεκβεβλήσθω τὸ ἐπίπεδον ποιοῦν τὸ ΘΑΚ τρίγωνον, ἰσοσκελὲς ὂν καὶ ὀρθὸν πρὸς τὴν βάσιν· λέγω δὴ ὅτι ὡς τὸ ΕΑΖ μέγιστον τῶν διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς τὸ ΓΑΔ ἐλάχιστον, οὕτω τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ ἰσοσκελές.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν ΕΑΖ, ΓΑΔ τριγώνων αἱ μὲν βάσεις ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΔ, ΕΖ διάμετροι, ὕψος δὲ τοῦ μὲν ΕΑΖ ἡ ΒΑ, τοῦ δὲ ΓΑΔ ἡ ΑΗ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ οὕτως τὸ ΕΑΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΓΑΔ. πάλιν ἐπεὶ τῶν ΓΑΔ καὶ ΘΑΚ τριγώνων κοινὸν ὕψος ἐστὶν ἡ ΑΗ, βάσις δὲ τοῦ μὲν ΓΑΔ ἡ ΓΔ, τουτέστιν ἡ ΒΖ, τοῦ δὲ ΘΑΚ ἡ ΘΚ· ὡς ἄρα ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ οὕτως τὸ ΓΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΘΑΚ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ οὕτως αἱ ἡμίσειαι πρὸς ἀλλήλας, τουτέστιν ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ· (ὅμοια γὰρ τὰ ΒΗΚ, ΒΗΑ τρίγωνα ὀρθογώνια) καὶ τὸ ἄρα ΓΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΘΑΚ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ. ἦν δὲ καὶ τὸ ΒΑΖ πρὸς τὸ ΓΑΔ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ· ὡς ἄρα τὸ ΕΑΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΓΑΔ, οὕτως τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ με΄.

ΠΑΛΙΝ ἔστω ὡς τὸ ΒΑΖ πρὸς τὸ ΓΑΔ οὕτως τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ· λέγω ὅτι ἡ ΒΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως.

Ἐπεὶ γὰρ ὡς τὸ ΒΑΖ πρὸς τὸ ΓΑΔ οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ, ὡς δὲ τὸ ΒΑΖ πρὸς τὸ ΓΑΔ οὕτως τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ· καὶ τὸ ἄρα ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ. ὡς δὲ τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ, τουτέστιν ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΚΗ. ὅμοια ἄρα τὰ ΒΑΗ, ΒΚΗ τρίγωνα, καὶ κοινὴ ἡ ΒΗ, καὶ ὁμόλογοι αἱ ΑΒ, ΒΚ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΒΚ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

Καὶ συναπεδείχθη, καθ᾽ ἑκατέραν τῶν δείξεων, ὅτι τὸ ΕΑΖ τρίγωνον τῷ ΘΑΚ ὅμοιόν ἐστιν· ὡς

τῶ

γὰρ ἡ ΕΖ πρὸς ΘΚ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς ΑΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΕΑΖ πρὸς τὸ ΘΑΚ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ ΘΑΚ· καὶ ἔστι τὸ ΓΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΘΑΚ ὡς ἡ ΓΔ, τουτέστιν ὡς ἡ ΕΖ, πρὸς ΘΚ· ὥστε τὸ ΕΑΖ πρὸς τὸ ΘΑΚ διπλασίονα λόγον ἔχει τοῦ ὁμολόγων πλευρῶν τῆς ΕΖ, ΘΚ· ὅμοια ἄρα τὰ ΒΑΖ, ΘΑΚ.

angulo ΘΑΒ: etenim ΕΖ eſt ad ΘΒ ſicut ΒΑ ad ΑΗ. habet quoque triangulum ΕΑΖ ad triangulum ΘΑΒ duplicatam rationem ejus quam triangulum ΓΑΔ ad triangulum ΘΑΒ: eſt autem triangulum ΓΑΔ ad triangulum ΘΑΒ ut ΓΔ, hoc eſt, ut ΕΖ ad ΘΒ: quare triangulum ΕΑΖ ad triangulum ΘΑΚ duplicatam rationem habebit laterum homologorum, nempe ipſarum ΕΖ, ΘΚ; & idcirco [ex converſa 19. 6.] triangula ΒΑΖ, ΘΑΒ inter ſe ſimilia erunt.

Πόρισμα.

Ὥστε φανερὸν ὅτι ἐὰν κώνου σκαληνοῦ ὁ ἄξων ἴσος ᾖ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἰσοσκελὲς ὅμοιον ἔσται τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ· καὶ ἀντιστρόφως, ὅτι ἐὰν τὸ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει ἰσοσκελὲς ὅμοιον ᾖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἰσοσκελεῖ, ὁ ἄξων τοῦ κώνου ἴσος ἔσται τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως. καὶ τοῦτο γὰρ εὐκατανόητον ἐκ τῶν ἤδη δειχθέντων.

Corollarium.

Ex quibus perſpicuum eſt, ſi coni ſcaleni axis æqualis ſit baſis ſemidiametro, triangulum æquicrure ad rectos angulos baſi ſimile eſſe triangulo æquicruri per axem: & è contra, ſi triangulum æquicrure ad rectos angulos baſi ſimile ſit triangulo per axem æquicruri, coni axem ſemidiametro baſis æqualem eſſe: id quod ex jam demonſtratis facile intelligi poteſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μϛ΄.

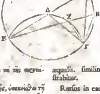
Ἐὰν κύκλος κύκλον τέμνῃ διὰ τοῦ κέντρου αὐτοῦ γεγραμμένος, ἀπὸ δὲ τῆς ἑτέρας αὐτῶν τομῆς διαχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὴν διὰ τοῦ κέντρου περιφέρειαν, καὶ προσεκβληθῶσιν ἐπὶ τὴν τοῦ ἑτέρου κύκλου περιφέρειαν· ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα, μεταξὺ τῆς τοῦ ἑτέρου κυρτῆς περιφερείας καὶ τῆς κοίλης τοῦ ἑτέρου, ἴση ἔσται τῇ ἀπὸ τῆς κοινῆς τομῆς τῆς διαχθείσης εὐθείας καὶ τῆς διὰ τοῦ κέντρου περιφερείας ἐπὶ τὴν ἑτέραν κοινὴν τομὴν τῶν κύκλων ἐπιζευγνυμένῃ.

Prop. XLVI. *Theor.*

Si circulus circulum ſecet per centrum ipſius deſcriptus; & ab altera eorum interſectione ducantur rectæ quæ ſecent circumferentiam per centrum tranſeuntem, & deinde ad alterius circuli circumferentiam producantur: recta linea inter convexam alterius circuli circumferentiam & concavam prioris interjecta, æqualis erit ei quæ à communi ſectione rectæ ductæ & circumferentiæ per centrum ad alteram communem circulorum interſectionem perducitur.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ, διὰ δὲ τοῦ Δ κέντρου γεγράφθω τις κύκλος ὁ ΒΔΓ, τέμνων τὸν ἐξ ἀρχῆς κατὰ τὰ Β, Γ σημεῖα, καὶ διήχθωσαν εὐθεῖαι διὰ μὲν τοῦ Δ ἡ ΒΔΕ, τυχοῦσα δὲ ἡ ΒΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΓ, ΖΓ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΖΓ.

Sit circulus ΑΒΓ circa centrum Δ; & per Δ alius circulus ΒΔΓ deſcribatur, ſecans priorem circulum in punctis Β, Γ; ducanturque rectæ lineæ, per Δ quidem ΒΔΕ, alia vero utcunque ΒΖΗ; & jungantur ΔΓ, ΖΓ: dico rectam ΖΗ ipſi ΖΓ æqualem eſſe.



Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΓ, ΓΗ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΓ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΓΖΗ ἴση ἐστίν. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΓ τῇ ὑπὸ ΖΗΓ ἴση, διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβηκέναι· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἴση, καὶ ὅμοια τὰ τρίγωνα. ἰσοσκελὲς δὲ τὸ ΓΔΕ· ἰσοσκελὲς ἄρα καὶ τὸ ΓΖΗ· ἴση ἄρα ἡ ΗΖ τῇ ΖΓ. ὁμοίως δὲ, κἂν ἄλλαι διαχθῶσι, δειχθήσονται τὰ τῆς προτάσεως.

Jungantur enim ΒΓ, ΓΗ. & quoniam angulus ΒΔΓ æqualis eſt angulo ΒΖΓ, erit reliquus ΒΔΓ reliquo ΓΖΗ æqualis. ſed & æqualis eſt ΔΒΓ ipſi ΖΗΓ, quòd in eadem circumferentia conſiſtat: reliquus igitur eſt æqualis reliquo, & triangula inter ſe ſimilia ſunt. æquicrure autem eſt triangulum ΓΔΒ; ergo & æquicrure eſt ΓΖΗ, & recta ΗΖ ipſi ΖΓ æqualis. ſimiliter & in aliis ductis idem demonſtrabitur.

Πάλιν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ὑποκείσθω τῇ μὲν ΓΔ ἴση ἡ ΔΕ, τῇ δὲ ΓΖ ἡ ΖΗ, τῆς ΒΔΓ περιφερείας κατὰ τὸ Δ δίχα τετμημένης· λέγω ὅτι ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι δὲ ὁποτερῳοῦν τῶν ΔΒ, ΔΓ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ε καὶ Η σημείων. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ

Rurſus in eadem figura ponatur ΔΒ ipſi ΓΔ æqualis, & ΖΗ æqualis ipſi ΓΖ, circumferentiâ ΒΔΓ bifariam in puncto Δ diviſâ: dico circulum centro Δ & intervallo ΔΒ vel ΔΓ deſcriptum per puncta Ε, Η tranſire. quoniam enim angulus ΒΔΓ æqualis eſt angulo ΗΖΓ,

&

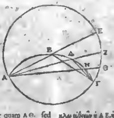
Digitized by Google

& ſunt triangula ΕΔΓ, ΗΖΓ æquicrura: anguli ΒΕΓ, ΒΗΓ inter ſe æquales erunt; & propterea in eodem circulo continebuntur anguli ΒΕΓ, ΒΗΓ: circulus igitur, centro Δ & intervallo ΔΒ deſcriptus, per puncta Ε, Η tranſibit. quod erat demonſtrandum.

Prop. XLVII. *Theor.*

Si in portione circuli inflectantur rectæ lineæ: maxima quidem erit quæ ad punctum medium inflectitur; è reliquis vero ſemper ipſi propinquior remotiore major erit.

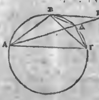
IN portione enim ΑΒΓ inflectantur rectæ lineæ; ΑΒ, ΒΓ quidem ita ut circumferentia ΑΒΓ bifariam in Β ſecetur; ΑΔ, ΔΓ vero & ΑΗ, ΗΓ utcunque: dico ΑΒ, ΒΓ ſimul maximas eſſe omnium quæ in portione ΑΒΓ inflectuntur; & ΑΔ, ΔΓ ipſis ΑΗ, ΗΓ majores eſſe.



Quoniam enim ΑΒ circumferentia circumferentiæ ΒΓ eſt æqualis; & recta ΑΒ æqualis erit ipſi ΒΓ. itaque centro Β, & intervallo ΒΑ vel ΒΓ, circulus ΑΕΖΘΓ deſcribatur, & producantur ΑΒΕ, ΑΔΖ, ΑΗΘ: ergo, ex antecedenti theoremate, ΕΒ ipſi ΒΓ eſt æqualis, & ΖΔ æqualis ipſi ΔΓ, & ΘΗ ipſi ΗΓ. quoniam igitur ΑΕ diameter eſt circuli ΑΕΒ; erit ΑΕ omnium quæ in circulo ducuntur maxima; & ΑΖ major quam ΑΘ. ſed ipſi ΑΕ æquales ſunt ΑΒ, ΒΓ, & ipſi ΑΖ æquales ΑΔ, ΔΓ; & ipſi ΑΘ æquales ΑΗ, ΗΓ: ergo ΑΒΓ omnium maxima eſt, & ΑΔΓ major quam ΑΗΓ. & ita ſemper ea quæ propinquior eſt puncto medio circumferentiæ remotiore major erit. quod demonſtrandum proponebatur.

Aliter.

SIT circulus ΑΒΓ, & in portione ΑΒΓ inflectantur rectæ ΑΒ, ΒΓ, ita ut circumferentia ΑΒΓ bifariam in Β dividatur: dico rectam ex ΑΒ, ΒΓ compoſitam maximam eſſe ex iis quæ in eadem portione inflectuntur.



Inflectantur enim ΑΔ, ΔΓ, & producatur ΑΔ ad Ε, ita ut ΔΕ ipſi ΔΓ ſit æqualis; junganturque ΒΔ, ΒΕ. quoniam igitur circumferentia ΑΒ æqualis eſt circumferentiæ ΒΓ; & in circumferentia quidem ΑΒ angulus ΒΔΑ, in circumferentia vero ΒΓ angulus ΒΑΓ conſiſtit: erit angulus ΒΔΑ angulo ΒΑΓ æqualis. communis apponatur ΒΔΕ; ergo utrique anguli ΒΔΕ, ΒΔΑ utriſque ΒΔΕ, ΒΑΓ æquales ſunt. & ſunt ΒΔΕ, ΒΔΑ duobus rectis æquales: ergo & ΒΔΕ, ΒΑΓ

ΗΖΓ. καὶ ἔστιν ἰσοσκελῆ τὰ ΕΔΓ, ΗΖΓ τρίγωνα· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΓ· ἐν τῷ αὐτῷ ἄρα κύκλῳ αἱ ὑπὸ ΒΕΓ, ΒΗΓ γωνίαι· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Δ διαστήματι δὲ τῷ ΔΒ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Ε, Η σημείων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ.

Ἐὰν ἐν τμήματι κύκλου κλασθῶσιν εὐθεῖαι· μεγίστη μὲν ἔσται ἡ πρὸς τῇ διχοτομίᾳ τὴν κλάσιν ἔχουσα, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς πρὸς τῇ διχοτομίᾳ τῆς ἀπώτερον ἐστὶ μείζων.

ΕΝ γὰρ τῷ ΑΒΓ τμήματι κεκλάσθωσαν εὐθεῖαι, αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ, ὥστε τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Β, τυχοῦσαι δὲ αἱ ΑΔ, ΔΓ καὶ ΑΗ, ΗΓ· λέγω ὅτι συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ εὐθεῖα μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἐν τῷ τμήματι κλωμένων εὐθειῶν, μείζων δὲ ἡ ΑΔ, ΔΓ τῆς ΑΗ, ΗΓ.

Ἐπεὶ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΒΓ περιφερείᾳ ἴση ἐστί· ἡ ΑΒ ἄρα εὐθεῖα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση. κέντρῳ οὖν τῷ Β, διαστήματι δὲ ἑκατέρῳ τῶν ΒΑ, ΒΓ, γεγράφθω κύκλος ὁ ΑΕΖΓ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΑΒΕ, ΑΔΖ, ΑΗΘ· ἴση ἄρα καὶ (διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα) ἡ μὲν ΕΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΔ τῇ ΔΓ, καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΗΓ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΕ διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΕΖ κύκλου μεγίστη μὲν ἄρα τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν ἡ ΑΕ, ἡ δὲ ΑΖ μείζων τῆς ΑΘ. ἀλλὰ τῇ μὲν ΑΕ ἴση συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ, τῇ δὲ ΑΖ ἡ ΑΔ, ΔΓ, καὶ τῇ ΑΘ ἡ ΑΗ, ΗΓ· καὶ τούτων ἄρα μεγίστη μὲν ἡ ΑΒΓ, μείζων δὲ ἡ ΑΔΓ τῆς ΑΗΓ. καὶ ὁμοίως ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς πρὸς τῇ διχοτομίᾳ τῆς ἀπώτερόν ἐστι μείζων. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

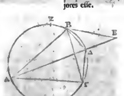
Ἄλλως.

ΕΣΤΩ κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν τῷ ΑΒΓ τμήματι κεκλάσθω ἡ ΑΒΓ εὐθεῖα, ὥστε τὴν ΑΒΓ περιφέρειαν δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Β· λέγω ὅτι συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ εὐθεῖα μεγίστη ἐστὶ πασῶν τῶν ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι κλωμένων εὐθειῶν.

Κεκλάσθω γὰρ ἡ ΑΔΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔΕ, καὶ κείσθω ἡ ΔΕ τῇ ΔΓ ἴση, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΔ, ΒΕ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΒΓ περιφερείᾳ ἴση ἐστί, καὶ ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ γωνία βέβηκεν, ἐπὶ δὲ τῆς ΒΓ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ. κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΔΕ· συναμφότερος ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΔΑ συναμφοτέρῳ τῇ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἔστι συναμφότερος ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΔΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴση· καὶ συναμφότερος ἄρα

ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἐστιν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ συναμφότεροι αἱ ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· συναμφότερος ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ συναμφοτέρῳ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ ἴση ἐστί· κοινῆς ἄρα ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ, λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΕ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ ἴση ἐστί. ἐπεὶ οὖν ἴση μὲν ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΒΕ εὐθεῖαι μείζονές εἰσι τῆς ΑΕ, ἀλλὰ ταῖς μὲν ΑΒ, ΒΕ συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ ἴση ἐστὶ, τῇ δὲ ΑΕ συναμφότερος ἡ ΑΔ, ΔΓ ἴση ἐστί· καὶ συναμφότερος ἄρα ἡ ΑΒΓ τῆς ΑΔΓ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὲ δείκνυται καὶ τῶν ἄλλων μείζων· συναμφότερος ἄρα ἡ ΑΒ, ΒΓ πασῶν τῶν ἐν τῷ τμήματι κλωμένων μείζων ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἡ διχοτομία πρὸς τῷ Ζ· λέγω ὅτι ἡ τῷ Ζ ἔγγιον ἡ ΑΒΓ συναμφότερος τῆς ἀπώτερον τῆς ΑΔ, ΔΓ μείζων ἐστίν.



Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΖΒ περιφέρεια τῆς ΒΔΓ περιφερείας μείζων ἐστὶ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ μείζων. κοινῆς προστεθείσης τῆς ΒΔΕ, μείζονές εἰσιν αἱ ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΔΑ τῶν ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ ἐλάττονές εἰσι δυσὶν ὀρθῶν. εἰσὶ δὲ αἱ ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ, ΒΑΓ τῶν ὑπὸ ΒΔΕ, ΒΑΓ μείζονές εἰσι, καὶ κοινῆς ἀφαιρεθείσης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΔΕ μείζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΔΕ μείζων· καὶ ἡ ΓΒ ἄρα βάσις μείζων ἐστὶ τῆς ΒΕ βάσεως. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒ, ΒΕ εὐθεῖαι μείζονές εἰσι τῆς ΑΕ, τῶν δὲ ΑΒ, ΒΕ συναμφότερος ἡ ΑΒ, ΒΓ μείζων ἐστί. συναμφότερος ἄρα ἡ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΕ, τουτέστι συναμφοτέρου τῆς ΑΔ, ΔΓ, μείζων.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μή.

Ἐὰν τεσσάρων ἀνίσων εὐθειῶν τὸ ἀπὸ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης τὸ συναμφότερον τετράγωνον ἴσον ᾖ συναμφοτέρῳ τῷ ἀπὸ τῶν λοιπῶν· ἡ συγκειμένη εὐθεῖα ἐκ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης ἐλάττων ἔσται τῆς συγκειμένης ἐκ τῶν λοιπῶν.

ΕΣΤΩΣΑΝ τέσσαρες εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, καὶ μεγίστη μὲν πασῶν ἔστω ἡ ΑΒ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΒΓ, ἡ δὲ ΔΕ τῆς ΕΖ μὴ ἐλάττων ἔστω, ἔστω δὲ τὰ ἀπὸ ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσα· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ τῆς ΔΖ ἐλάττων ἐστίν.

æquales ſunt duobus rectis. ſunt autem anguli ΒΔΓ, ΒΑΓ ſimul ſumpti æquales duobus rectis: utrique igitur ΒΔΕ, ΒΑΓ utriſque ΒΔΓ, ΒΑΓ æquales ſunt; &, dempto communi ΒΑΓ, reliquus ΒΔΕ reliquo ΒΔΓ eſt æqualis. itaque quoniam ΓΔ eſt æqualis ipſi ΔΕ; & communis ΒΔ; ſuntque circa æquales angulos: baſis ΓΒ baſi ΒΕ æqualis erit. & quoniam ΑΒ, ΒΕ ſimul majores ſunt ipſa ΑΕ; utriſque vero ΑΒ, ΒΕ ſimul ſumptis æquales ſunt ΑΒ, ΒΓ, & ipſi ΑΕ æquales ſunt utræque ΑΔ, ΔΓ: erunt ΑΒ, ΒΓ ſimul ſumptæ quam ΑΔ, ΔΓ majores. pari modo & aliis majores oſtenduntur: ergo ΑΒ, ΒΓ ſimul ſumptæ majores ſunt quibuſcunque aliis quæ in portione ΑΒΓ inflectuntur.

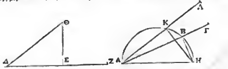
Sed ſit punctum circumferentiæ medium ad Ζ: dico utraſque ΑΒ, ΒΓ, quæ puncto Ζ propinquiores ſunt, ipſis ΑΔ, ΔΓ remotioribus majores eſſe.

Quoniam enim circumferentia ΑΖΒ major eſt quam circumferentia ΒΔΓ; angulus ΒΔΑ angulo ΒΑΓ eſt major. &, communi appoſito ΒΔΕ, erunt ΒΔΕ, ΒΔΑ anguli majores angulis ΒΔΕ, ΒΑΓ: ergo ΒΔΕ, ΒΑΓ ſunt duobus rectis minores. & ſunt ΒΔΓ, ΒΑΓ æquales duobus rectis; anguli igitur ΒΔΓ, ΒΑΓ angulis ΒΔΕ, ΒΑΓ ſimul ſumptis majores ſunt; & dempto communi ΒΑΓ, reliquus ΒΔΓ major erit reliquo ΒΔΕ. quoniam igitur ΔΓ eſt æqualis ipſi ΔΕ, & communis ΔΒ, angulus autem ΒΔΓ major eſt angulo ΒΔΕ; erit baſis ΓΒ baſi ΒΕ major. & quoniam rectæ ΑΒ, ΒΕ ſimul ſumptæ majores ſunt quam ΑΕ, ipſis vero ΑΒ, ΒΕ ſimul majores ſunt ΑΒ, ΒΓ ſimul ſumptæ: igitur ΑΒ, ΒΓ ſimul majores ſunt quam ΑΕ, hoc eſt quam ipſæ ΑΔ, ΔΓ ſimul ſumptæ.

Prop. XLVIII. *Theor.*

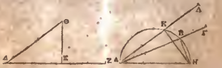
Si, quatuor rectis lineis inæqualibus exiſtentibus, quadrata maximæ & minimæ æqualia ſint quadratis reliquarum: recta compoſita ex maxima & minima minor erit ea quæ ex reliquis componitur.

Sint quatuor rectæ lineæ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, quarum maxima ſit ΑΒ, & ΒΓ minima; ΔΕ vero non ſit minor quam ΕΖ; & ſint quadrata ex ΑΒ, ΒΓ quadratis ex ΔΕ, ΕΖ æqualia: dico lineam ΑΓ minorem eſſe quam ΔΖ.



Ducantur enim ad rectos angulos ΒΗ, ΕΘ, & ponatur ΒΗ ipſi ΒΓ æqualis, & ΕΘ æqualis ΕΖ; junctiſque ΑΗ, ΔΘ, deſcribatur ſemicirculus circa triangulum orthogonium ΑΒΗ. & quoniam quadrata ex ΑΒ, ΒΓ, hoc eſt ex ΑΒ, ΒΗ, quadratis ex ΔΕ, ΕΘ ſunt æqualia; erit quadratum ex ΑΗ æquale quadrato ex ΔΘ, & recta ΑΗ ipſi ΔΘ æqualis. eſt autem ΕΘ major quam ΒΗ: quare aptata in ſemicirculo recta æqualis ipſi ΕΘ angulum ΒΗΑ ſecabit. itaque aptetur, & ſit ΗΚ & juncta ΑΚ producatur, ut ſit ΚΛ æqualis ipſi ΚΗ. quoniam igitur quadrata ex ΑΚ, ΚΗ quadratis ex ΑΒ, ΒΗ æqualia ſunt; quadrata autem ex ΑΒ, ΒΗ æqualia quadratis ex ΔΕ, ΕΘ: erunt quadrata ex ΑΚ, ΚΗ quadratis ex ΔΕ, ΕΘ æqualia, quorum quadratum ex ΚΗ eſt æquale quadrato ex ΕΘ: reliquum igitur quadratum ex ΑΚ reliquo ex ΔΕ æquale erit, & recta ΑΚ ipſi ΔΕ æqualis: ergo triangulum ΑΚΗ eſt æquale & ſimile triangulo ΔΕΘ, & recta ΑΛ æqualis ipſi ΔΖ. itaque quoniam recta linea ΑΚ non eſt minor quam ΚΗ; neque circumferentia ΑΚ minor erit quam circumferentia ΚΗ: quare cum in circuli portione inflectantur rectæ ΑΚ, ΚΗ; ΑΒ, ΒΗ, ſintque ΑΚ, ΚΗ vel ad punctum circumferentiæ medium, vel ipſi propinquiores: erunt, ex antecedenti theoremate, ΑΚ, ΚΗ majores quam ΑΒ, ΒΗ, hoc eſt ΑΛ ſive ΔΖ major erit quam ΑΓ: minor eſt igitur ΑΓ quam ΔΖ. quod erat demonſtrandum.

Ἤχθωσαν πρὸς ὀρθὰς αἱ ΒΗ, ΕΘ, καὶ κείσθω ἴση ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΕΘ τῇ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΔΘ, καὶ γεγράφθω περὶ τὸ ΑΒΗ ὀρθογώνιον ἡμικύκλιον. ἐπεὶ οὖν τὰ ἀπὸ ΑΒ, ΒΓ, τουτέστι τὰ ἀπὸ ΑΒ, ΒΗ, τοῖς ἀπὸ ΔΕ, ΕΘ ἴσα ἐστί· καὶ τὸ ἀπὸ ΑΗ ἄρα τῷ ἀπὸ ΔΘ ἐστὶν ἴσον, καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΔΘ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΘ τῆς ΒΗ μείζων ἐστί· ἡ ἄρα τῇ ΕΘ ἴση ἐναρμοζομένη τῷ ἡμικυκλίῳ, τεμεῖ τὴν ὑπὸ ΒΗΑ γωνίαν. ἐνηρμόσθω ἡ ΗΚ ἴση οὖσα τῇ ΘΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΚ, καὶ ἐκβεβλήσθω. καὶ ἔστω ἴση ἡ ΚΛ τῇ ΚΗ. ἐπεὶ οὖν τὰ ἀπὸ ΑΚ, ΚΗ τοῖς ἀπὸ ΑΒ, ΒΗ ἴσα ἐστὶ, τὰ δὲ ἀπὸ ΑΒ, ΒΗ τοῖς ἀπὸ ΔΕ, ΕΘ ἴσα ἐστί· τὰ ἄρα ἀπὸ ΑΚ, ΚΗ τοῖς ἀπὸ ΔΕ, ΕΘ ἴσα ἐστίν, ὧν τὸ ἀπὸ ΚΗ τῷ ἀπὸ ΕΘ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΚ τῷ ἀπὸ ΔΕ ἴσον ἐστὶ, καὶ ἡ ΑΚ τῇ ΔΕ· τὸ ἄρα ΑΚΗ τρίγωνον ἴσον καὶ ὅμοιόν ἐστι τῷ ΔΕΘ, καὶ ἡ ΑΛ τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΚ εὐθεῖα τῆς ΚΗ οὐκ ἔστιν ἐλάττων, οὐδ' ἡ ΑΚ ἄρα περιφέρεια τῆς ΚΗ περιφερείας ἐλάττων ἐστί. καὶ, διὰ τὸ πρὸ τούτου θεώρημα, ἐπεὶ ἐν τμήματι κύκλου κεκλασμέναι εἰσὶν αἱ ΑΚΗ, ΑΒΗ εὐθεῖαι, καὶ ἔστιν ἡ ΑΚΗ ἤτοι πρὸς τῇ διχοτομίᾳ, ἢ ἔγγιον τῆς διχοτομίας· μείζων ἄρα συναμφότερος ἡ ΑΚ, ΚΗ συναμφοτέρου τῆς ΑΒ, ΒΗ, τουτέστιν ἡ ΑΛ τῆς ΑΓ, τουτέστιν ἡ ΔΖ τῆς ΑΓ· ἐλάττων ἄρα ἡ ΑΓ τῆς ΔΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Prop. XLIX. *Theor.*

Si duæ rectæ lineæ inæquales dividantur, ita ut quadrata partium minoris æqualia ſint quadratis partium majoris: earum omnium maxima quidem erit major minoris pars, minor vero minima.

Sint rectæ lineæ ΑΒΓ, ΔΕΖ in Β, Ε punctis ita diviſæ, ut ΔΒ ſit major quam ΕΖ, & ΑΒ non minor quam ΒΓ; ſitque ΑΓ major quam ΔΖ; quadrata vero ex ΑΒ, ΒΓ quadratis ex ΔΕ, ΕΖ ſint æqualia: dico harum rectarum ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ maximam eſſe ΔΕ, & ΕΖ minimam.

Ducatur enim ipſi ΑΓ ad rectos angulos ΒΗ, æqualis ipſi ΒΓ, & jungatur ΑΗ; circa triangulum vero orthogonium ΑΒΗ deſcribatur ſemicirculus. quoniam igitur recta ΑΒ non eſt minor quam ΒΗ, neque ΑΒ circumferentia circumferentiâ ΒΗ minor erit: & idcirco circumferentiæ ΑΒΗ punctum medium vel erit ad Β, vel in circumferen-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ μθ'.

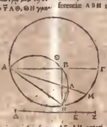
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι διῃρημέναι ὦσι, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν τῆς ἐλάττονος τμημάτων τετράγωνα ἴσα ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν τῆς μείζονος τμημάτων τετραγώνοις· τῶν τεσσάρων τμημάτων μέγιστον μὲν ἔσται τὸ τῆς ἐλάττονος μεῖζον τμῆμα, ἐλάχιστον δὲ τὸ ἔλαττον.

Ἐστωσαν εὐθεῖαι δύο ἄνισοι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ διῃρημέναι κατὰ τὰ Β καὶ Ε σημεῖα, ὥστε τὴν μὲν ΔΒ τῆς ΕΖ μείζονα εἶναι, τὴν δὲ ΑΒ τῆς ΒΓ μὴ εἶναι ἐλάσσονα, καὶ μείζων μὲν ἔστω ἡ ΑΓ τῆς ΔΖ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ τετραγώνοις ἴσα· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΔΕ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΕΖ.

Ἤχθω πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ ἡ ΒΗ ἴση οὖσα τῇ ΒΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ, καὶ περὶ τὸ ΑΒΗ ὀρθογώνιον γεγράφθω ἡμικύκλιον. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ εὐθεῖα τῆς ΒΗ οὐκ ἔστιν ἐλάττων, καὶ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΗ οὐκ ἔστιν ἐλάττων· ἡ ἄρα τῆς ΑΒΗ περιφερείας διχοτομία ἤτοι κατὰ τὸ Β ἐστιν, ἢ ἐπὶ τῆς ΑΒ περι-

φερείας,

φέρειας, οἷον κατὰ τὸ Θ· ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ διχοτομίᾳ, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν ΑΘ, ΘΗ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Γ, ὡς προδέδεικται. γεγράφθω οὖν, καὶ ἔστω ὁ ΑΚΓΗ. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ ΔΕ, ΕΖ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἴσα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΗ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΔΖ τῆς ΑΗ. ἐλάττων δὲ ἡ ΔΖ τῆς ΑΓ· δυνατὸν ἄρα μεταξὺ τῶν ΑΓ, ΑΗ εὐθειῶν ἐναρμόσαι τῷ ΑΚΓΗ κύκλῳ εὐθεῖαν ἴσην τῇ ΔΖ. ἐνηρμόσθω ἡ ΑΛΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΛΗ· ἴση ἄρα, διὰ τὰ προδεδειγμένα, ἡ ΛΜ τῇ ΛΗ. ἐπεὶ οὖν ἡ μὲν ΑΛ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΑΒ οὐκ ἐλάσσων τῆς ΒΗ· ἡ ἄρα ΑΛ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΒΗ. ἡ δὲ ΛΗ ἐλάσσων ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΒΗ· τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΗ, ΑΛ, ΛΗ μεγίστη μὲν ἡ ΑΛ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΛΗ. ἀλλ' ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΛΗ, τουτέστιν ἡ ΛΜ, τῇ ΕΖ, ὡς ἐδείξαμεν· τῶν ἄρα ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἡ ΔΕ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΕΖ. ὃ προέκειτο δεῖξαι.



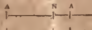
tia ΑΒ, ut ad Θ: itaque puncto medio circumferentiæ ΑΒΗ tanquam centro, & intervallo ΑΘ vel ΘΗ, circulus deſcriptus etiam per punctum Γ tranſibit, ut ſupra [per 46. huj.] demonſtratum eſt. deſcribatur circulus ille, & ſit ΑΚΓΗ. & quoniam quadratum ex ΔΖ majus eſt quadratis ex ΔΕ, ΕΖ, & quadrata ex ΔΕ, ΕΖ quadrato ex ΑΗ ſunt æqualia; erit quadratum ex ΔΖ majus quadrato ex ΑΗ; & recta ΔΖ quam ΑΗ major. minor autem eſt ΔΖ quam ΑΓ; ergo inter ipſas ΑΓ, ΑΗ aptari poterit in circulo ΑΚΓΗ recta ipſi ΔΖ æqualis. aptetur, ſitque ΑΛΜ, & jungatur ΛΗ: erit igitur, per jam demonſtrata, ΛΜ æqualis ipſi ΛΗ. ſed ΑΛ eſt major quam ΑΒ; & ΑΒ non minor quam ΒΗ: ergo ΑΛ alterutrâ ipſarum ΑΒ, ΒΗ major erit. & ΛΗ [per 47. huj.] alterutra ipſarum ΑΒ, ΒΗ minor: rectarum igitur ΑΒ, ΒΗ, ΑΛ, ΛΗ maxima eſt ΑΛ, & minima ΛΗ. ſed ΒΗ eſt æqualis ipſi ΒΓ, & ΑΛ ipſi ΔΕ, & ΛΗ, hoc eſt ΛΜ, ipſi ΕΖ; uti oſtendimus: ergo rectarum ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ maxima eſt ΔΕ, & ΕΖ minima. quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ν΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἴσαι διαιρεθῶσιν οὕτως, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς ἑτέρας τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς λοιπῆς ἴσον εἶναι· καὶ τὰ τμήματα τοῖς τμήμασιν ἴσα ἔσται, ἑκάτερον ἑκατέρῳ.

Ἔστωσαν εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις αἱ ΑΛΜ, ΔΕΖ, διῃρημέναι κατὰ τὰ Λ καὶ Ε σημεῖα, ὥστε τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΛΜ ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ τῇ ΔΕ.

Ἐπεὶ ἴση ἡ ΑΜ τῇ ΔΖ, καὶ αἱ ἡμίσειαι ἄρα ἴσαι εἰσίν· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΜ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΔΖ ἴσον ἐστίν. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΜ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Λ, καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΛΜ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας· καὶ ἡ ΔΖ ἄρα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ε, ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΜ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΔΖ. εἰ δὲ μή, τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ν, Ξ σημεῖα· ἴση ἄρα ἡ ΝΜ εὐθεῖα τῇ ΞΖ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΝΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΞΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΛΜ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΞΕ, ὧν τὸ ὑπὸ ΑΛ, ΛΜ τῷ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ ἴσον ἐστί· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΝΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΞΕ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΝΛ τῇ ΞΕ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΝΜ τῇ ΞΖ ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΛΜ τῇ ΕΖ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΛ τῇ ΔΕ ἴση. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Prop. L. *Theor.*

Si duæ rectæ æquales ita dividantur, ut rectangulum contentum ſub partibus unius æquale ſit ei quod ſub alterius partibus continetur: erunt unius partes partibus alterius æquales.

Sint rectæ lineæ inter ſe æquales ΑΛΜ, ΔΕΖ in punctis Λ, Ε ita diviſæ, ut rectangulum ΑΛΜ rectangulo ΔΕΖ ſit æquale: dico rectam ΑΛ ipſi ΔΕ æqualem eſſe.

Quoniam enim ΑΜ eſt æqualis ipſi ΔΖ; & earum dimidiæ æquales erunt: ergo & quadratum dimidiæ ΑΜ eſt æquale quadrato dimidiæ ΔΖ. itaque ſi ΑΜ bifariam diviſa fuerit in Λ, rectangulum ΑΛΜ eſt dimidiæ quadratum; adeoque ΔΖ bifariam dividitur in Ε, quoniam rectangulum ΔΕΖ æquale eſt quadrato dimidiæ ipſius ΑΜ, hoc eſt dimidiæ ipſius ΔΖ. Sin minus, dividantur bifariam in punctis Ν, Ξ: æqualis igitur eſt ΝΜ ipſi ΞΖ: & propterea quadratum ex ΝΜ quadrato ex ΞΖ æquale, hoc eſt [per 5. 2.] rectangulum ΑΛΜ una cum quadrato ex ΝΛ æquale rectangulo ΔΕΖ una cum quadrato ex ΞΕ; è quibus rectangulum ΑΛΜ æquale eſt rectangulo ΔΕΖ: ergo reliquum quadratum ex ΝΛ æquale eſt quadrato ex ΞΕ; ac propterea ΝΛ ipſi ΞΕ æqualis. eſt autem & ΝΜ æqualis ipſi ΞΖ; reliqua igitur ΛΜ ipſi ΕΖ, & ΑΛ ipſi ΔΕ æqualis erit. Q. E. D.

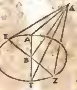
Prop.

Prop. LI. *Theor.*

Si conus ſcalenus per axem ſecetur: eorum quæ fiunt triangulorum quod majus eſt majorem perimetrum habet; quodque majorem habet perimetrum illud majus eſt triangulum.

Secetur conus ſcalenus per axem A B, & ſectiones fiant A Γ Δ, A E Z triangula, quorum majus ſit A Γ Δ, ita ut E A quidem ſit major quam A Z, Γ A vero non minor quam A Δ: dico A Γ Δ perimetrum perimetro A E Z minorem eſſe.

Quoniam enim æquales ſunt Γ Δ, E Z baſes, communis autem ducta eſt B A à vertice ad punctum quo biſecantur baſes, & triangulum A E Z minus eſt triangulo A Γ Δ; habebit E A ad A Z majorem rationem quam Γ A ad A Δ, ut in vigeſimo theoremate demonſtratum eſt · ergo A A maxima eſt è quatuor lineis,& A Z minima. id quod [ad 17. & 18.huj.] oſtenſum eſt. & quoniam quadrata è maxima & minima, hoc eſt quadrata ex E A, A Z ſimul, quadratis ex Γ A, A Δ ſimul ſunt æqualia; erunt utraque E A, A Z ſimul (per præcedens 48^{vum} theorema) minores utriſque Γ A, A Δ. apponantur E Z, Γ Δ: tota igitur A E Z perimeter totâ perimetro A Γ Δ eſt minor: ergo majoris trianguli perimeter major erit.



Ex quibus perſpicuum eſt, in conis ſcalenis maximi quidem trianguli per axem facti, hoc eſt æquicruris, perimetrum eſſe maximam; minimi vero, hoc eſt ejus quod ad rectos angulos inſiſtit baſi coni, perimetrum minimam eſſe; è reliquis vero ſemper triangulum quod majus eſt majorem perimetrum habere quam quod minus.

Rurſus ponatur trianguli Γ A Δ perimeter major perimetro E A Z: dico triangulum A Γ Δ triangulo E A Z majus eſſe.

Quoniam enim A Γ Δ perimeter major eſt perimetro E A Z, æqualis autem Γ Δ ipſi E Z; erunt reliquæ Γ A, A Δ reliquis EA, A Z majores. ſed quadrata ex Γ A, A Δ æqualia ſunt quadratis ex E A, A Z: ergo quatuor rectarum Γ A, A Δ, E A, A Z maxima quidem eſt E A, minima vero A Z: (quæ omnia ante [per 49.huj.] demonſtrata ſunt) quare E A ad A Z majorem habet rationem quam Δ A ad A Γ. itaque quoniam duo triangula Γ A Δ, E A Z baſes æquales habent, eandemque habent illam quæ à vertice ad punctum baſim biſariam ſecans ducitur, alterius autem majus latus ad minus majorem rationem habet quam alterius majus latus ad minus, vel æquale ad æquale; triangulum igitur E A Z minus erit: triangulum igitur Γ A Δ majus eſt triangulo E A Z, ut in decima nona hujus demonſtratum eſt.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ να'.

Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ ἄξονος τμηθῇ, τῶν γενομένων τριγώνων τὸ μεῖζον μείζονα περίμετρον ἔχει, καὶ οὗ τριγώνου μείζων ἡ περίμετρος καὶ αὐτὸ μεῖζόν ἐστι.

Τετμήσθω κῶνος σκαληνὸς διὰ τοῦ Α Β ἄξονος, καὶ γινέσθω ἐκ τῆς τομῆς τὰ Α Γ Δ, Α Ε Ζ τρίγωνα, μεῖζον δὲ τὸ Α Γ Δ, ὥστε τὴν μὲν Ε Α τῆς Α Ζ μείζονα εἶναι, τὴν δὲ Γ Α τῆς Α Δ μὴ ἐλάττονα· λέγω ὅτι ἡ Α Γ Δ περίμετρος τῆς Α Ε Ζ περιμέτρου μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσαι μὲν αἱ Γ Δ, Ε Ζ βάσεις, κοινὴ δὲ ἦκται ἡ Β Α ἐπὶ τὴν διχοτομίαν αὐτῶν ἀπὸ τῆς κορυφῆς, καί ἐστι τὸ Α Ε Ζ τοῦ Α Γ Δ ἔλαττον· ἡ ἄρα Ε Α πρὸς Α Ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ Α πρὸς Α Δ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ κ'. θεωρήματι· ἡ μὲν ἄρα Ε Α μεγίστη ἐστὶ τῶν τεσσάρων εὐθειῶν, ἡ δὲ Α Ζ ἐλαχίστη. τοῦτο γὰρ ἐδείχθη ἐν τῷ ιζ'. καὶ ιη'. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῆς μεγίστης καὶ τῆς ἐλαχίστης, τουτέστι τὰ ἀπὸ Ε Α, Α Ζ, τοῖς ἀπὸ Γ Α, Α Δ ἴσα ἐστί· συναμφότερος ἄρα ἡ Ε Α, Α Ζ εὐθεῖα συναμφοτέρου τῆς Γ Α, Α Δ ἐλάττων ἐστὶ, διὰ τὸ μη'. θεώρημα τούτου. προσκείσθωσαν αἱ Ε Ζ, Γ Δ· ὅλη ἄρα ἡ Α Ε Ζ περίμετρος ὅλης τῆς Α Γ Δ περιμέτρου ἐλάττων ἐστί· μείζων ἄρα ἡ τοῦ μείζονος περίμετρος.

Καὶ γέγονε φανερὸν ὅτι, ἐν τοῖς σκαληνοῖς κώνοις, τῶν διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνων μεγίστη μὲν ἡ τοῦ μεγίστου περίμετρος, τουτέστι τοῦ ἰσοσκελοῦς· ἐλαχίστη δὲ ἡ τοῦ ἐλαχίστου, τουτέστι τοῦ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ κώνου· τῶν δ' ἄλλων ἀεὶ τὸ μεῖζον μείζονα περίμετρον ἔχει ἤπερ τὸ ἔλαττον.

Πάλιν ὑποκείσθω ἡ τοῦ Γ Α Δ τριγώνου περίμετρος μείζων εἶναι τῆς τοῦ Ε Α Ζ· λέγω δὴ ὅτι τὸ Α Γ Δ τρίγωνον τοῦ Ε Α Ζ μεῖζόν ἐστι.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ Α Γ Δ περίμετρος τῆς Ε Α Ζ περιμέτρου μείζων ἐστὶ, ἴση δὲ ἡ Γ Δ τῇ Ε Ζ· λοιπὴ ἄρα συναμφότερος ἡ Γ Α, Α Δ συναμφοτέρου τῆς Ε Α, Α Ζ μείζων ἐστί. καὶ ἔστι τὰ ἀπὸ Γ Α, Α Δ τοῖς ἀπὸ Ε Α, Α Ζ ἴσα· τῶν ἄρα Γ Α, Α Δ, Ε Α, Α Ζ εὐθειῶν μεγίστη μέν ἐστιν ἡ Ε Α, ἐλαχίστη δὲ ἡ Α Ζ· ταῦτα γὰρ ἅπαντα προδέδεικται· ἡ Ε Α ἄρα πρὸς τὴν Α Ζ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Δ Α πρὸς Α Γ. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα τὰ Γ Α Δ, Ε Α Ζ βάσεις ἴσας ἔχει, ἔχει δὲ καὶ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς βάσεως ἠγμένην τὴν αὐτὴν, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου μείζων πλευρὰ πρὸς τὴν ἐλάττονα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ τοῦ ἑτέρου μείζων πρὸς τὴν ἐλάττονα, ἢ ἡ ἴση πρὸς τὴν ἴσην· καὶ τὰ λοιπά· τὸ ἄρα Ε Α Ζ τρίγωνον ἔλαττόν ἐστι· μεῖζον ἄρα τὸ Γ Α Δ τρίγωνον τοῦ Ε Α Ζ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ θεωρήματι ιθ'. τούτου βιβλίου.

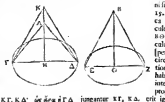
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νβ'.

Τῶν ἴσων μὲν καὶ ὀρθῶν κώνων, ἀνομοίων δὲ, ἀντιπέπονθε τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ταῖς ἑαυτῶν βάσεσιν.

ΕΣΤΩΣΑΝ κῶνοι ὀρθοὶ καὶ ἴσοι, ἀνόμοιοι δὲ, ὧν κορυφαὶ μὲν τὰ Α, Β σημεῖα, ἄξονες δὲ οἱ ΑΗ, ΒΘ, τὰ δὲ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ, βάσεις δὲ τῶν κώνων οἱ περὶ τὰς ΓΔ, ΕΖ διαμέτρους κύκλοι· λέγω ὅτι ὡς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ οὕτως ἡ ΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσοι εἰσὶν οἱ κῶνοι, ὡς ἄρα ὁ περὶ τὸ Η κέντρον κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὸ Θ κύκλον οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΑΗ· ὁ δὲ περὶ τὸ Η κέντρον κύκλος πρὸς τὸν περὶ τὸ Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ. ἔστω τῶν ΘΒ ΑΗ μέση ἀνάλογον ἡ ΚΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΓ, ΚΔ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἥ τε ΒΘ πρὸς τὴν ΚΗ, καὶ ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΑ. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΚΗ, τὸ ΒΕΖ ἄρα τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΓΔ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΑ, ὡς δὲ ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΑ οὕτως τὸ ΚΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως τὸ ΚΓΔ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΒΕΖ τρίγωνον, πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ οὕτως ἡ ΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν. ἀντιπεπόνθεν ἄρα τὰ ἐκκείμενα τρίγωνα τῶν ἑαυτῶν βάσεων.



Prop. LII. *Theor.*

Triangula per axes æqualium & rectorum conorum, diſſimilium vero, reciproce proportionalia ſunt ſuis baſibus.

SINT recti coni æquales, ſed diſſimiles, quorum vertices A, B puncta, axes AH, BΘ; & triangula per axes AΓΔ, BEZ; baſes autem circuli circa diametros ΓΔ, EZ: dico ut triangulum AΓΔ ad triangulum BEZ ita eſſe baſim EZ ad baſim ΓΔ.

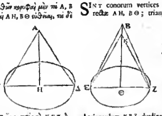
Quoniam enim coni ſunt æquales, erit [per 15.12.] ut circulus circa centrum H ad circulum circa Θ ita axis BΘ ad axem AH; circulus autem circa H [per 2.12.] ad circulum circa Θ duplicatam rationem habet ejus quam habet ΓΔ ad EZ. ſit inter ΘB & AH media proportionalis KH; & jungantur KΓ, KΔ. erit igitur ut ΓΔ ad EZ ita BΘ ad KH, & ita KH ad HA. quoniam igitur ut ΓΔ ad EZ ita BΘ ad KH, erit triangulum BEZ triangulo KΓΔ æquale. & quoniam ut ΓΔ ad EZ ita eſt KH ad HA; ut autem KH ad HA ita KΓΔ triangulum ad triangulum AΓΔ; erit igitur ut ΓΔ ad EZ ita triangulum KΓΔ, hoc eſt BEZ, ad triangulum AΓΔ: ergo ut AΓΔ triangulum ad triangulum BEZ ita baſis EZ ad ΓΔ baſim. triangula igitur expoſita ſuis baſibus reciproce ſunt proportionalia.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νγ'.

Ὧν κώνων ὀρθῶν ἀντιπέπονθε τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ταῖς ἑαυτῶν βάσεσιν, οὗτοι ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις.

ΕΣΤΩΣΑΝ κώνων ὀρθῶν κορυφαὶ μὲν τὰ Α, Β σημεῖα, ἄξονες δὲ αἱ ΑΗ, ΒΘ εὐθεῖαι, τὰ δὲ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ· λέγω ὅτι ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις οἱ κῶνοι.

Γενέσθω ὡς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ οὕτως τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ΒΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ΚΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ.



Prop. LIII. *Theor.*

Coni recti, quorum triangula per axes reciproce proportionalia ſunt ſuis baſibus, ſunt inter ſe æquales.

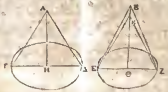
SINT conorum vertices quidem A, B, axes rectæ AH, BΘ; triangula vero per axes AΓΔ, BEZ; & ſit ut ΓΔ ad EZ ita triangulum BEZ ad triangulum AΓΔ: dico conos inter ſe æquales eſſe.

Fiat enim ut BEZ triangulum ad triangulum AΓΔ ita AΓΔ ad triangulum KEZ; ergo triangulum BEZ ad triangulum KEZ duplicatam habet rationem ejus quam habet triangulum AΓΔ ad ipſum KEZ.

* Propoſitio hæc, ut & reliquæ omnes hujus Libri, multo facilius demonſtratur ex eo quod ratio Coni ad Conum componitur, ex ratione triangulorum per Axes & ratione diametrorum baſium. Sit enim unius Coni altitudo *a* & baſis diameter *b*, alterius vero altitudo *α* & diameter baſis *β*. Manifeſtum eſt triangula per Axes eſſe inter ſe ut *ab* ad *αβ*; baſes autem ut *bb* ad *ββ*; Conos vero ipſos ut *abb* ad *αββ*. Hinc ſi ponatur *abb* ipſi *αββ* æquale; erit *ἀνάλογον* [per 16.6.] ut *ab* ad *αβ* ita *β* ad *b*. quod erat demonſtrandum.

quoniam igitur ut ΓΔ ad BZ ita BEZ triangulum ad triangulum ΑΓΔ; ut autem triangulum BEZ ad ipſum ΑΓΔ ita ΑΓΔ ad triangulum KEZ; erit igitur ut ΓΔ ad BZ ita ΑΓΔ triangulum ad triangulum KEZ: quare cum triangula ΑΓΔ, KEZ inter ſe ſint ſicut baſes [ex converſ. 1.6.] ſub eadem erunt altitudine: ergo AH ipſi KΘ eſt æqualis. habet autem circulus H ad circulum Θ duplicatam rationem ejus quam habet ΓΔ diameter ad diametrum EZ; & ut ΓΔ ad EZ ita triangulum ΑΓΔ ad triangulum EKZ: ergo circulus H ad circulum Θ duplicatam rationem habet ejus quam ΓΑΔ triangulum ad triangulum EKZ. habebat autem & triangulum EBZ ad triangulum EKZ duplicatam rationem ejus quam habet ΓΑΔ triangulum ad triangulum EKZ: ergo ut circulus H ad circulum Θ ita EBZ triangulum ad triangulum EKZ, hoc eſt recta BΘ ad ipſam ΘK. eſt autem ΘK ipſi AH æqualis: igitur ut circulus H ad circulum Θ ita recta BΘ ad AH. & ſunt BΘ, AH axes conorum qui reciproce ſunt proportionales ſuis baſibus videlicet circulis H, Θ: ergo coni ΑΗΓΔ, BΘEZ [per 15.12.] inter ſe æquales ſunt. *

ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν EZ οὕτως τὸ BEZ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ, ὡς δὲ τὸ BEZ πρὸς τὸ ΑΓΔ οὕτως τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ KEZ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς τὴν EZ οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ KEZ· ὥστε ἐπεὶ τὰ ΑΓΔ, KEZ τρίγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, ὑπὸ τὸ αὐτὸ ἄρα ὕψος ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ AH τῇ KΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ διάμετρος πρὸς τὴν EZ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ διάμετρος πρὸς τὴν EZ οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ EKZ· ὁ ἄρα H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΓΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ EKZ. εἶχε δὲ καὶ τὸ EBZ πρὸς τὸ EKZ διπλασίονα λόγον ἤπερ τὸ ΓΑΔ πρὸς τὸ EKZ· ὡς ἄρα ὁ H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον οὕτως τὸ EBZ τρίγωνον πρὸς τὸ EKZ, τουτέστιν ἡ BΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘK. καὶ ἔστιν ἡ ΘK τῇ AH ἴση· ὡς ἄρα ὁ H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον οὕτως ἡ BΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν AH. καί εἰσιν αἱ BΘ, AH ἄξονες τῶν κώνων, καὶ ἀντιπεπόνθασι ταῖς βάσεσιν, τουτέστι τοῖς H, Θ κύκλοις· οἱ ἄρα ΑΗΓΔ, BΘEZ κῶνοι ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν.



Prop. LIV. *Theor.*

Si in duobus conis rectis baſis unius ad baſim alterius duplicatam rationem habeat ejus quam habet conus ad conum; triangula per axes inter ſe æqualia erunt.

Sint coni recti, quorum vertices puncta A, B; baſes circuli circa centra H, Θ, & triangula per axes ΑΓΔ, BEZ: habeat autem circulus H ad circulum Θ duplicatam rationem ejus quam ΑΗΓΔ conus ad conum BΘEZ: dico triangula ΑΓΔ, BEZ inter ſe æqualia eſſe.

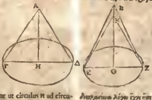
Sit enim ut ΑΗΓΔ conus ad BΘEZ ita BΘEZ ad conum KΘEZ. & quoniam circulus H ad circulum Θ duplicatam rationem habet ejus quam ΑΗΓΔ conus ad conum BΘEZ; conus autem ΑΗΓΔ ad conum KΘEZ rationem duplicatam habet ejus quam ΑΗΓΔ conus ad conum BΘEZ: erit igitur ut circulus H ad circulum Θ ita conus ΑΗΓΔ ad conum KΘEZ. quare cum ΑΗΓΔ, KΘEZ coni inter ſe ſint ſicut baſes, ejuſdem erunt altitudinis, è converſa undecimæ duodecimi elementorum: unde AH ipſi

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νδ'.

Ἐὰν δύο κώνων ὀρθῶν ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν διπλασίονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἔσται.

Ἔστωσαν κῶνοι ὀρθοὶ, ὧν κορυφαὶ μὲν τὰ A, B σημεῖα, βάσεις δὲ οἱ περὶ τὰ H, Θ κέντρα κύκλοι, τὰ δὲ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ ΑΓΔ, BEZ. ἐχέτω δὲ ὁ H κύκλος πρὸς τὸν Θ διπλασίονα λόγον ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν BΘEZ· λέγω ὅτι τὰ ΑΓΔ, BEZ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν BΘEZ οὕτως ὁ BΘEZ πρὸς τὸν KΘEZ. καὶ ἐπεὶ ὁ H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν BΘEZ κῶνον· ἀλλὰ καὶ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν KΘEZ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν BΘEZ· ὡς ἄρα ὁ H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν KΘEZ κῶνον. ὥστε ἐπεὶ οἱ ΑΗΓΔ, KΘEZ κῶνοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις, ἰσοϋψεῖς ἄρα εἰσὶ, διὰ τὸ ἀντίστροφον



* Si *ab* ſit ad *αβ* ſicut *β* ad *b*, erit [per 16.6.] *abb* ipſi *αββ* æquale, hoc eſt Conus Cono.

τοῦ ια΄. θεωρήματος τοῦ ιβ΄. τῶν στοιχείων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΚΘ. ἐπεὶ οὖν ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον, τουτέστιν ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἔχει δὲ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΘΚ, τουτέστι πρὸς ΑΗ· ἴσα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα. ὃ προέκειτο δεῖξαι.

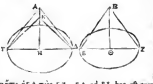
ΚΘ eſt æqualis. quoniam igitur circulus Η ad circulum Θ duplicatam rationem habet ejus quam ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ, hoc eſt quam habet conus ΒΘΕΖ ad conum ΚΘΕΖ, hoc eſt [per 14. 12.] quam ΒΘ ad ΘΚ; habet autem circulus Η ad circulum Θ duplicatam rationem ejus quam ΓΔ ad ΕΖ: erit itaque ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΒΘ ad ΘΚ, hoc eſt ad ΑΗ: triangula igitur ΑΓΔ, ΒΕΖ inter ſe æqualia erunt. quod erat demonſtrandum.*

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νε΄.

Καὶ ἐὰν τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ᾖ, ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον.

Καταγεγράφθωσαν πάλιν οἱ προκείμενοι κῶνοι, καὶ ὑποκείσθω τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις εἶναι. δεικτέον δὴ ὅτι ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον.

Ἔστω γὰρ ὡς ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς ΑΗ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ. ἐπεὶ οὖν τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΑΗ, τουτέστιν ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ. καὶ ἐπεὶ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, τουτέστιν ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΑΗ, ἔχει δὲ καὶ ἡ ΒΘ πρὸς ΗΚ διπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΘ πρὸς ΑΗ· ὡς ἄρα ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον οὕτως ἡ ΒΘ πρὸς ΚΗ· ὁ ἄρα ΚΗΓΔ κῶνος τῷ ΒΘΕΖ κώνῳ ἴσος ἐστίν. ἐπεὶ οὖν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΚ, ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς ΗΚ οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ, τουτέστι πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον· ὡς ἄρα ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον. ἀλλ᾽ ὁ Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ· ὁ ἄρα Η κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον, τουτέστιν ἡ βάσις τοῦ ΑΗΓΔ κώνου πρὸς τὴν βάσιν τοῦ ΒΘΕΖ κώνου, διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Prop. LV. *Theor.*

Si triangula per axes inter ſe æqualia ſint; baſis ad baſim duplicatam rationem habebit ejus quam conus ad conum.

Deſcribantur rurſus prædicti coni, & ponantur triangula ΑΓΔ, ΒΕΖ inter ſe æqualia. demonſtrandum eſt circulum Η ad circulum Θ duplicatam rationem habere ejus quam conus ΑΗΓΔ habet ad conum ΒΘΕΖ.

Fiat enim ut recta ΒΘ ad ipſam ΑΗ ita ΑΗ ad ΗΚ. quoniam igitur triangula ΑΓΔ, ΒΕΖ ſunt æqualia, erit ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΒΘ ad ΑΗ, hoc eſt ΑΗ ad ΗΚ. & quoniam circulus Η ad circulum Θ duplicatam habet rationem ejus quam ΓΔ ad ΕΖ, hoc eſt quam ΒΘ ad ΑΗ; habetque ΒΘ ad ΗΚ duplicatam rationem ejus quam ΒΘ ad ΑΗ: erit ut circulus Η ad circulum Θ ita ΒΘ ad ΚΗ; conus igitur ΚΗΓΔ [per 15.12.] cono ΒΘΕΖ eſt æqualis. ut autem ΓΔ ad ΕΖ ita eſt ΑΗ ad ΗΚ; & ut ΑΗ ad ΗΚ ita [per 14.12.] ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΗΓΔ, hoc eſt ad conum ΒΘΕΖ: ergo ut ΓΔ ad ΕΖ ita ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ. ſed circulus Η ad circulum Θ duplicatam habet rationem ejus quam ΓΔ ad ΕΖ: circulus igitur Η ad circulum Θ, hoc eſt baſis coni ΑΗΓΔ ad baſim coni ΒΘΕΖ, duplicatam rationem habet ejus quam habet conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ. quod erat demonſtrandum.†

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νϛ΄.

Οἱ ἰσοϋψεῖς κῶνοι ὀρθοὶ διπλασίονα λόγον ἔχουσι πρὸς ἀλλήλους, ἤπερ τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα.

Καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ἔστω ὁ ΑΗ ἄξων τῷ ΒΘ ἴσος· λέγω ὅτι ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς

Prop. LVI. *Theor.*

Recti coni æquealti duplicatam inter ſe rationem habent ejus quam habent triangula per axes.

Deſcribantur iidem coni, & ſit axis ΑΗ æqualis ipſi ΒΘ: dico conum ΑΗΓΔ ad

* Si bb ad $\beta\beta$ duplicatam habeat rationem Coni ad Conum, ſive ipſius abb ad $\alpha\beta\beta$, erit b ad β ſicut abb ad $\alpha\beta\beta$; adeoque ab ipſi $\alpha\beta$ æquale erit.

† Si ab ſit æquale ipſi $\alpha\beta$, erit abb ad $\alpha\beta\beta$ ſicut b ad β: unde bb erit ad $\beta\beta$ (quæ ſunt ut baſes Conorum) in duplicata ratione ipſorum Conorum, ſive ejus quam habet abb ad $\alpha\beta\beta$.

conum

conum B Θ E Z duplicatam rationem habere ejus quam triangulum A Γ Δ habet ad triangulum B E Z.

Quoniam enim circulus H ad circulum Θ duplicatam rationem habet ejus quam Γ Δ ad E Z; & ut circulus H ad circulum Θ ita conus A H Γ Δ ad conum B Θ E Z: (ſunt enim æque-alti) habebit igitur conus



A H Γ Δ ad conum B Θ E Z duplicatam rationem ejus quam habet Γ Δ ad E Z; hoc eſt quam A Γ Δ triangulum ad triangulum B E Z. quod erat demonſtrandum.*

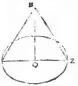
Prop. LVII. *Theor.*

Si recti coni inter ſeſe duplicatam rationem habeant ejus quam habent triangula per axes: ipſi æque-alti erunt.

Deſcribantur coni, & ponatur A H Γ Δ conus ad conum B Θ E Z duplicatam habere rationem ejus quam triangulum A Γ Δ ad triangulum B E Z: dico A H ipſi B Θ æqualem eſſe.

Ponatur enim triangulo B E Z æquale triangulum K Γ Δ. & quoniam A H Γ Δ conus ad conum B Θ E Z duplicatam rationem habet ejus quam triangulum A Γ Δ ad triangulum B E Z; eſt autem triangulum B E Z æquale triangulo K Γ Δ: habebit igitur A H Γ Δ conus ad conum B Θ E Z duplicatam rationem ejus quam triangulum A Γ Δ ad triangulum K Γ Δ, hoc eſt quam A H ad H K, hoc eſt, quam conus A H Γ Δ ad conum K H Γ Δ: ergo ut conus A H Γ Δ ad conum K H Γ Δ ita K H Γ Δ conus ad conum B Θ E Z. quoniam igitur conorum K H Γ Δ, B Θ E Z triangula per axem K Γ Δ, B E Z æqualia ſunt, baſis coni H ad baſim Θ duplicatam rationem habebit ejus quam conus K H Γ Δ ad conum B Θ E Z, ut in quinquageſima quinta hujus demonſtratum eſt. ſed ut conus K H Γ Δ ad conum B Θ E Z ita conus A H Γ Δ ad conum K H Γ Δ, & ita recta A H ad H K: circulus igitur H ad circulum Θ duplicatam rationem habet ejus quam A H ad H K. ſed & duplicatam habet rationem ejus quam diameter Γ Δ ad diametrum E Z: ergo ut Γ Δ ad E Z ita A H ad H K. itaque quoniam triangulum K Γ Δ triangulo B E Z eſt æquale, erit [per 16. 6.] ut Γ Δ ad E Z ita B Θ ad K H. [oſtenſum eſt autem ut Γ Δ ad E Z ita A H ad H K;] quare ut B Θ ad K H ita A H ad H K: æqualis igitur eſt A H ipſi B Θ. quod erat demonſtrandum. †

τὸν B Θ E Z κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ A Γ Δ τρίγωνον πρὸς τὸ B E Z.

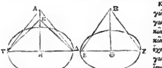


Ἐπεὶ γὰρ ὁ H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ Δ πρὸς τὴν E Z, ὡς δὲ ὁ H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον οὕτως ὁ A H Γ Δ κῶνος πρὸς τὸν B Θ E Z κῶνον· ἰσοϋψεῖς γάρ· καὶ ὁ A H Γ Δ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν B Θ E Z κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Γ Δ πρὸς E Z, τουτέστιν ἤπερ τὸ A Γ Δ τρίγωνον πρὸς τὸ B E Z τρίγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ιζʹ.

Ἐὰν ὀρθοὶ κῶνοι πρὸς ἀλλήλους διπλασίονα λόγον ἔχωσιν ἤπερ τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα· ἰσοϋψεῖς ἔσονται οἱ κῶνοι.

Καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ὑποκείσθω ὁ A H Γ Δ κῶνος πρὸς τὸν B Θ E Z διπλασίονα λόγον ἔχων ἤπερ τὸ A Γ Δ τρίγωνον πρὸς τὸ B E Z τρίγωνον· λέγω ὅτι ἡ A H ἴση ἐστὶ τῇ B Θ.



Κείσθω τῷ B E Z τριγώνῳ ἴσον τὸ K Γ Δ τρίγωνον. ἐπεὶ οὖν ὁ A H Γ Δ κῶνος πρὸς τὸν B Θ E Z κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ A Γ Δ τρίγωνον πρὸς τὸ B E Z, ἴσον δὲ τὸ B E Z τρίγωνον τῷ K Γ Δ τριγώνῳ· ὁ ἄρα A H Γ Δ κῶνος πρὸς τὸν B Θ E Z κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ A Γ Δ τρίγωνον πρὸς τὸ K Γ Δ τρίγωνον, τουτέστιν ἤπερ ἡ A H πρὸς H K, τουτέστιν ἤπερ ὁ A H Γ Δ κῶνος πρὸς τὸν K H Γ Δ κῶνον· καὶ ὡς ἄρα ὁ A H Γ Δ κῶνος πρὸς τὸν K H Γ Δ κῶνον οὕτως ὁ K H Γ Δ πρὸς τὸν B Θ E Z. καὶ ἐπεὶ τῶν K H Γ Δ, B Θ E Z κώνων τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τὰ K Γ Δ, B E Z ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἡ ἄρα H βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν Θ βάσιν διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ K H Γ Δ κῶνος πρὸς τὸν B Θ E Z, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ νεʹ. πρὸ τούτου θεωρήματι. ὡς δὲ ὁ K H Γ Δ κῶνος πρὸς τὸν B Θ E Z οὕτως ὁ A H Γ Δ κῶνος πρὸς τὸν K H Γ Δ, καὶ ἡ A H εὐθεῖα πρὸς τὴν H K· ὁ ἄρα H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ A H πρὸς τὴν H K. ἔχει δὲ ὁ H κύκλος πρὸς τὸν Θ κύκλον διπλασίονα λόγον οὗ ὃν ἔχει ἡ Γ Δ διάμετρος πρὸς τὴν E Z· ὡς ἄρα ἡ Γ Δ πρὸς τὴν E Z οὕτως ἡ A H πρὸς H K. ἐπεὶ δὲ τὸ K Γ Δ τῷ B E Z τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, κατ' ἀντιπεπόνθασιν ἄρα ὡς ἡ Γ Δ πρὸς E Z οὕτως ἡ B Θ πρὸς K H. ὡς ἄρα ἡ B Θ πρὸς K H οὕτως ἡ A H πρὸς H K· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ A H τῇ B Θ.

* Si *α* fuerit ipſi *α* æqualis, erit *α b b* ad *α β β* ſicut *α α b b* ad *α α β β*, hoc eſt in duplicata ratione ejus quam habet *α b* ad *α β* ſive *α β*.

† Si *α b b* ſit ad *α β β* ſicut *α α b b* ad *α α β β*, erit *α* ad *α* ſicut *α α* ad *α α*, ac proinde *α* ipſi *α* æqualis.

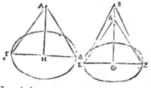
ΠΡΟ-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νη΄.

Τῶν ἀντιπεπονθότων κώνων ὀρθῶν τοῖς ἄξοσι τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

Καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ἔστω ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ὁ ΒΘ ἄξων πρὸς τὸν ΑΗ· λέγω ὅτι τὰ ΑΓΔ, ΒΕΖ τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τῷ ΑΗΓΔ κώνῳ ἰσοϋψὴς ὁ ΚΘΕΖ κῶνος. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΑΗ, ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΘΚ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ἡ ΒΘ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΚ, τουτέστιν ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον. ἀλλ' ὡς ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον οὕτως τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἔχει δὲ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ ἰσοϋψῆ κῶνον διπλασίονα λόγον οὗ ἔχει τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς ἐδείχθη ἐν τῷ πρὸ ἑνὸς θεωρήματι· ὡς ἄρα τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ ἴσον ἐστίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



Prop. LVIII. *Theor.*

Si recti coni reciproce proportionales ſint ſuis axibus; triangula per axes inter ſe æqualia erunt.

Deſcribantur coni, & ſit ut ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ ita axis ΒΘ ad ΑΗ axem: dico triangula ΑΓΔ, ΒΕΖ inter ſe æqualia eſſe.

Sit enim cono ΑΗΓΔ conus ΚΘΕΖ æque-altus. & quoniam ut ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ ita recta ΒΘ ad ΑΗ, æqualis autem eſt ΑΗ ipſi ΘΚ; erit itaque ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ ſicut ΒΘ ad ΘΚ, hoc eſt ut ΒΘΕΖ conus ad conum ΚΘΕΖ: conus igitur ΑΗΓΔ ad conum ΚΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam habet conus ΒΘΕΖ ad conum ΚΘΕΖ. ſed ut conus ΒΘΕΖ ad conum ΚΘΕΖ ita triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΕΖ; ergo conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam ΒΕΖ triangulum ad triangulum ΚΕΖ. habet autem conus ΑΗΓΔ ad conum æque-altum ΚΘΕΖ duplicatam rationem ejus quam habet ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ, ut demonſtratum eſt in quinquageſima ſexta hujus: quare ut ΒΕΖ triangulum ad triangulum ΚΕΖ ita triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ: triangulum igitur ΑΓΔ triangulo ΒΕΖ eſt æquale. quod erat demonſtrandum. *

ΠΡΟΤΑΣΙΣ νθ΄.

Καὶ ἐὰν τὰ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις ᾖ, ἀντιπεπόνθασιν οἱ κῶνοι τοῖς ἄξοσιν.

Ὑποκείσθω γὰρ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ τριγώνῳ ἴσον εἶναι· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον οὕτως ὁ ΒΘ ἄξων πρὸς τὸν ΑΗ.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς καὶ κατασκευῆς, ἐπεὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον τῷ ΒΕΖ ἴσον ἐστί· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ οὕτως τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἐπεὶ δὴ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ ἰσοϋψῆ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς δὲ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ οὕτως τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, τουτέστιν ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΘΕΖ, τουτέστιν ἡ ΒΘ πρὸς τὴν ΘΚ. ἀλλ' ἡ ΘΚ τῇ ΑΗ ἴση ἐστί· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ὁ ΒΘ ἄξων πρὸς τὸν ΑΗ ἄξονα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LIX. *Theor.*

Si triangula per axes inter ſe æqualia ſint; erunt coni ſuis axibus reciproce proportionales.

Ponatur ΑΓΔ triangulum triangulo ΒΕΖ æquale: dico ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita eſſe axem ΒΘ ad axem ΑΗ.

In eadem enim figura & conſtructione, quoniam triangulum ΑΓΔ æquale eſt triangulo ΒΕΖ; erit ut ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ ita triangulum ΒΕΖ ad ΚΕΖ triangulum. ſed conus ΑΗΓΔ ad conum æque-altum ΚΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ; & ut triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ ita triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΕΖ: conus igitur ΑΗΓΔ ad conum ΚΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam habet triangulum ΒΕΖ ad ipſum ΚΕΖ, hoc eſt quam conus ΒΘΕΖ ad conum ΚΘΕΖ: ergo ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita conus ΒΘΕΖ ad ΚΘΕΖ, hoc eſt ita ΒΘ ad ΘΚ. eſt autem ΘΚ ipſi ΑΗ æqualis; igitur ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita ΒΘ axis ad axem ΑΗ. quod erat demonſtrandum. †

* Si *abb* ſit ad *ααββ* ſicut *a* ad *α*, erit [per 16.6.] *aabb* ipſi *ααββ* æquale, unde patet *ab* ipſi *αβ* æquale eſſe.

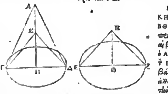
† Si *ab* ipſi *αβ* æquale ſit, erit & *aabb* ipſi *ααββ* æquale, adeoque *ἀνάλογον* *abb* erit ad *ααββ*, ſive conus ad conum, ſicut *α* ad *a*, hoc eſt reciproce ut axes.

[] Y PROP.

Prop. LX. *Theor.*

Si coni recti ſuis baſibus reciproce proportionales ſint; triangula per axes inter ſe triplicatam rationem habebunt ejus quam habent triangulorum baſes inter ſe reciproce.

DEſcribantur coni; & ſit ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita baſis Θ ad baſim Η: dico ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem habere ejus quam habet ΕΖ ad ΓΔ.



Ponatur enim ipſi ΒΘ æqualis ΚΗ; erunt itaque coni æque-alti ΚΗΓΔ, ΒΘΕΖ inter ſeſe ut eorum baſes. quoniam igitur ut ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ ita Θ baſis ad baſim Η; & ut baſis Θ ad baſim Η ita conus ΒΘΕΖ ad conum ΚΗΓΔ, erit ut ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ ita ΒΘΕΖ ad ipſum ΚΗΓΔ conum: quare conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΗΓΔ duplicatam rationem habet ejus quam conus ΒΘΕΖ ad conum ΚΗΓΔ. ſed ut conus ΑΗΓΔ ad ΚΗΓΔ ita ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΓΔ: triangulum igitur ΑΓΔ ad ipſum ΚΓΔ duplicatam rationem habet ejus quam ΒΘΕΖ conus ad conum æque-altum ΚΗΓΔ. conus autem ΒΘΕΖ ad ipſum ΚΗΓΔ duplicatam rationem habet ejus quam triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΓΔ, per quinquageſimam ſextam huj. ergo triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΓΔ quadruplicatam rationem habet ejus quam habet ΒΕΖ triangulum ad triangulum ΚΓΔ: & propterea triangulum ΑΓΔ ad ipſum ΒΕΖ triplicatam rationem habebit ejus quam triangulum ΒΕΖ habet ad triangulum ΚΓΔ. ſed ut triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΓΔ ita ΕΖ ad ΓΔ: triangulum igitur ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem habebit ejus quam habet ΕΖ ad ΓΔ.* quod erat demonſtrandum.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξ'.

Τῶν ἀντιπεπονθότων ὀρθῶν κώνων ταῖς βάσεσι τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα πρὸς ἄλληλα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ αἱ βάσεις τῶν τριγώνων πρὸς ἄλληλα ἀντιπεπονθότως.

ΚΑταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ἔστω ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η βάσιν· λέγω ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ.

Κείσθω τῇ ΒΘ ἴση ἡ ΚΗ· οἱ ἄρα ΚΗΓΔ, ΒΘΕΖ ἰσοϋψεῖς κῶνοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἐπεὶ οὖν ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η βάσιν, ἀλλ' ὡς ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η βάσιν οὕτως ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ· ὁ ΑΗΓΔ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ. ἀλλ' ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ΑΓΔ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον. ἀλλ' ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ τετραπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ· καὶ τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ. ὡς δὲ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LXI. *Theor.*

Si conorum rectorum triangula per axem inter ſe triplicatam rationem habeant ejus quam habent eorum baſes inter ſe reciproce; hi coni ſuis baſibus reciproce proportionales ſunt.

IN eadem figura & conſtructione habeat ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem ejus quam baſis trianguli ΕΖ ad baſim ΓΔ: dico ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita eſſe circulum Θ baſim coni ΒΘΕΖ ad circulum Η baſim coni ΑΗΓΔ.

Quoniam enim ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem habet ejus quam ΕΖ ad ΓΔ; ut autem ΕΖ ad ΓΔ ita ΒΕΖ tri-

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξα'.

Καὶ ὧν κώνων ὀρθῶν τὰ διὰ τῶν ἀξόνων τρίγωνα τριπλασίονα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα ἤπερ αἱ τῶν τριγώνων βάσεις πρὸς ἄλληλα ἀντιπεπονθότως· οὗτοι ταῖς βάσεσιν ἀντιπεπόνθασιν.

ΕΠΙ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς καὶ κατασκευῆς, ἐχέτω τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΕΖ βάσις τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν· λέγω δὴ ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ἡ Θ βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν Η βάσιν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ΒΕΖ τρίγωνον

* Si a b b ſit ad a β β ſicut β β ad b b, erit [per 16 6.] a b ipſi a β æquale, ac proinde διελόντι a b erit ad a β ſicut β ad b.

πρὸς

πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ· τὸ ἄρα ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΓΔ τετραπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ πρὸς τὸ ΚΓΔ. ὡς δὲ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΓΔ οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ κῶνον τετραπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ. ἔχει δὲ ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ ἰσοϋψῆ κῶνον διπλασίονα λόγον ἤπερ τὸ ΒΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΓΔ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ὁ ΒΘΕΖ πρὸς τὸν ΚΗΓΔ. ὡς δὲ ὁ ΒΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΚΗΓΔ οὕτως ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η βάσιν· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ οὕτως ἡ Θ βάσις πρὸς τὴν Η. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

angulum ad triangulum æque-altum ΚΓΔ: habebit igitur triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem ejus quam triangulum ΒΕΖ ad ipſum ΚΓΔ: ergo triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΓΔ quadruplicatam rationem habebit ejus quam triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΓΔ. ut autem triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΓΔ ita ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΗΓΔ: conus igitur ΑΗΓΔ ad conum ΚΗΓΔ quadruplicatam rationem habet ejus quam triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΒΓΔ. ſed conus ΒΘΕΖ ad conum æque-altum ΚΗΓΔ duplicatam rationem habet ejus quam triangulum ΒΕΖ ad triangulum ΚΓΔ: ergo conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΗΓΔ duplicatam habebit rationem ejus quam ΒΘΕΖ conus ad conum ΚΗΓΔ: quare ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΒΘΕΖ ita ΒΘΕΖ conus ad conum ΒΗΓΔ. ſed ut ΒΘΕΖ conus ad conum ΚΗΓΔ ita baſis Θ ad baſim Η: igitur ut ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ ita baſis Θ ad Η baſim. Q. E. D. *

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξϛ′.

Ἐὰν κῶνος ὀρθὸς πρὸς κῶνον ὀρθὸν διπλασίονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν· τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ τοῦ τριγώνου βάσις πρὸς τὴν βάσιν.

Prop. LXII. *Theor.*

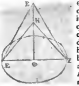
Si rectus conus ad conum rectum duplicatam rationem habeat ejus quam baſis ad baſim; triangulum per axem ad triangulum per axem triplicatam rationem habebit ejus quam habet trianguli baſis ad baſim.

Καταγεγράφθωσαν οἱ κῶνοι, καὶ ὑποκείσθω ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχων ἤπερ ἡ Η βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν Θ βάσιν· λέγω ὅτι τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ βάσις τοῦ τριγώνου πρὸς τὴν ΕΖ.

Ἔστω τῇ ΑΗ ἡ ΘΚ ἴση· οἱ ἄρα ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ κῶνοι, ἰσοϋψεῖς ὄντες, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἐπεὶ οὖν ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ Η βάσις πρὸς τὴν Θ βάσιν, ὡς δὲ ἡ Η βάσις πρὸς τὴν Θ οὕτως ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ οὕτως ὁ ΚΘΕΖ πρὸς τὸν ΒΘΕΖ. καὶ ἐπεὶ ἰσοϋψεῖς εἰσιν οἱ ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ κῶνοι, ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ, ὡς ἐδείχθη. ὡς δὲ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ οὕτως ὁ ΚΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον, καὶ τὸ ΚΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ· τὸ ἄρα ΚΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ



Deſcribantur coni, & ponatur ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem habere ejus quam habet baſis coni Η ad baſim Θ: dico triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ triplicatam habere rationem ejus quam ΓΔ baſis trianguli ad baſim ΕΖ.



Sit ipſi ΑΗ æqualis ΘΚ, & erunt coni æque-alti ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ inter ſeſe ſicut baſes. quoniam igitur ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam habet baſis Η ad baſim Θ; ut autem baſis Η ad Θ ita ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΘΕΖ: habebit ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem ejus quam ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΘΕΖ: ergo ut ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΘΕΖ ita ΚΘΕΖ ad ΒΘΕΖ conum. & quoniam coni ΑΗΓΔ, ΚΘΕΖ æque-alti ſunt; habebit ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem ejus quam triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ, id quod [ad 56. huj.] demonſtratum eſt. ut autem ΑΗΓΔ conus ad conum ΚΘΕΖ ita eſt conus ΚΘΕΖ ad ΒΘΕΖ conum, & ita ΚΕΖ triangulum ad triangulum ΒΕΖ: ergo ΚΕΖ triangulum ad triangulum ΒΕΖ duplicatam rationem habet ejus

* Si vero ab fit ad aβ ſicut β^2 ad b^2; erit, ut prius, ab^2 ipſi $a\beta^2$ æquale, adeoque ἀνάπαλιν abb erit ad aββ ſicut ββ ad bb, hoc eſt conus ad conum ſicut baſis ad baſim reciproce.

quam

quam triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ: ac propterea triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ triplicatam habebit rationem ejus quam ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΒΖ. ſed ut triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ ita baſis ΓΔ ad ΕΖ baſim, ſunt enim triangula æque-alta: triangulum igitur ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem habet ejus quam ΓΔ baſis ad baſim ΕΖ. quod erat demonſtrandum.*

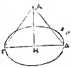
ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ. ὡς δὲ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΒΖ οὕτως ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖ· ἰσοϋψῆ γάρ ἐστι τὰ τρίγωνα· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Prop. LXIII. *Theor.*

Si triangulum per axem ad triangulum per axem triplicatam rationem habeat ejus quam trianguli baſis ad baſim; conus ad conum duplicatam rationem habebit ejus quam habet baſis coni ad baſim.

IN eadem enim figura, triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem habeat quam baſis ΓΔ ad ΕΖ baſim; & rurſus ponatur ipſi ΑΗ æqualis ΘΚ.

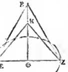
Quoniam igitur triangulum ΑΓΔ ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem habet ejus quam ΓΔ ad ΕΖ; ut autem ΓΔ ad ΕΖ ita ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ: habebit ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΒΕΖ triplicatam rationem ejus quam triangulum ΑΓΔ ad ipſum ΚΕΖ: ergo ΚΕΖ triangulum ad triangulum ΒΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam ΑΓΔ ad triangulum ΚΕΖ. ſed ut triangulum ΚΕΖ ad triangulum ΒΕΖ ita conus ΚΘΕΖ ad conum ΒΘΕΖ: conus igitur ΚΘΕΖ ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem habebit ejus quam ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ. habet autem & ΑΗΓΔ conus ad conum æque-altum ΚΘΕΖ duplicatam rationem ejus quam ΑΓΔ triangulum ad triangulum ΚΕΖ: ergo ut conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΘΕΖ ita ΚΘΕΖ ad conum ΒΘΕΖ: & idcirco ΑΗΓΔ conus ad conum ΒΘΕΖ duplicatam rationem habet ejus quam conus ΑΗΓΔ ad conum ΚΘΕΖ, hoc eſt quam baſis Η ad Θ baſim. quod erat demonſtrandum. †



ΠΡΟΤΑΣΙΣ ξγ'.

Καὶ ἐὰν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον πρὸς τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τριπλασίονα λόγον ἔχῃ ἤπερ ἡ τοῦ τριγώνου βάσις πρὸς τὴν βάσιν· ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον διπλασίονα λόγον ἕξει ἤπερ ἡ βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν βάσιν.

ΕΠΙ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἐχέτω ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ κείσθω πάλιν τῇ ΑΗ ἴση ἡ ΘΚ.



Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς ΕΖ οὕτως τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ἄρα ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΕΖ· τὸ ἄρα ΚΕΖ πρὸς τὸ ΒΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ ΚΒΖ. ἀλλ' ὡς τὸ ΚΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΖ οὕτως ὁ ΚΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΒΖ· ὁ ἄρα ΚΘΕΖ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΕΖ. ἔχει δὲ καὶ ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ κῶνον ἰσοϋψῆ διπλασίονα λόγον ἤπερ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΒΖ· ὡς ἄρα ὁ ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΚΘΕΖ οὕτως ὁ ΚΘΒΖ πρὸς τὸν ΒΘΒΖ· ὁ ἄρα ΑΗΓΔ κῶνος πρὸς τὸν ΒΘΕΖ κῶνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ὁ ΑΗΓΔ πρὸς τὸν ΚΘΒΖ κῶνον, τουτέστιν ἤπερ ἡ Η βάσις τοῦ κώνου πρὸς τὴν Θ βάσιν.

* Si abb fuerit ad $\alpha\beta\beta$ ſicut b^3 ad β^3; erit ab ad $\alpha\beta$ ſicut b^2 ad β^2; itemque a ad α ſicut bb ad $\beta\beta$: unde patet Conorum baſes (hoc in caſu) ſuis altitudinibus directe eſſe proportionales.

† Si ab ſit ad $\alpha\beta$ ſicut b^3 ad β^3; erit abb ad $\alpha\beta\beta$ ſicut b^4 ad β^4, hoc eſt, Coni erunt inter ſe in duplicata ratione baſis ad baſim.

FINIS.

A01 1462530

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google